Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 6 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 22. November 2012

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Existieren Potentiale für folgende Vektorfelder? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential.

a) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T \mid x_1 \in (-\infty, 0]\} \to \mathbb{R}^2,\ F(x) = (\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2})^T$.

b) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T \mid x_1 \in (-\infty, 0]\} \to \mathbb{R}^2,\ F(x) = (-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2})^T$.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Gegeben seien die Wege

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sin(\frac{\pi t}{2}) \end{pmatrix}$$

und die Funktionen

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_1(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

$$F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_2(x) := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Integrale $\int_{\gamma_i} F_j d\vec{x}$ für $i, j = 1, 2$.

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehende Funktionen auf lokale Extremstellen. Werden Maximum und Minimum angenommen? Bestimmen Sie die Extremalstellen und -werte, falls diese angenommen werden.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := (x_1 + x_2)^2 e^{-x_1 - x_2}$.

b) $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) := 1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^3$.

Bitte wenden!

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Fünf Institute der Universität Bonn planen ein gemeinsames Hörsaalgebäude. Das Hörsaalgebäude soll so gebaut werden, dass die Summe der Quadrate der Wegstrecken aller Einwohner minimal wird. Die zu minimierende Zielfunktion ist also gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{j=1}^{5} n_j |x - y^{(j)}|^2,$$

wobei wir annehmen dürfen, dass direkte Wege gebaut werden.
Wo soll das Hörsaalgebäude gebaut werden, wenn die Lage und Studierendenverteilung der Institute wie folgt lautet:

Institut j	Lage $y^{(j)}$	Studierende
A	$(-3,0)^T$	500
B	$(0,5)^T$	1000
C	$(0,3)^T$	2500
D	$(1,3)^T$	4000
E	$(5,0)^T$	2000