Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

universitätbonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 5 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 15. November 2012

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen partiell differenzierbar und wo stetig differenzierbar? Begründen Sie und berechnen Sie die Jacobimatrix.

a)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

b)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

c)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) := \begin{pmatrix} \operatorname{Arsinh}(x_2 \tan(\frac{x_1^2}{x_1^2+1})) \\ \operatorname{Arcosh}(2 + \tanh(x_1 x_2)) \\ \operatorname{Artanh}(\pi^{-1} \arctan(x_1 - x_2)) \end{pmatrix}.$$

d)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := \begin{pmatrix} \sinh(x_2) e^{\cosh(x_1) x_3} \\ \arcsin(\tanh(x_1 + x_2 x_3)) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18 (10 Punkte)

Mit a_j sei die j-te Spalte einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ bezeichnet. Wir betrachten die Determinantenfunktion $f : \operatorname{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R},\ f(A) := det(A)$.
Zeigen Sie, dass die totale Ableitung dieser Funktion gegeben ist durch

$$Df(A)B = \sum_{j=1}^{n} det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Bitte wenden!

Aufgabe 19 (10 Punkte)

a) Es sei
$$p^{(2)} : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ p^{(2)} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
die zweidimensionale Transformation auf Polarkoordinaten.
Zeigen Sie, dass $p^{(2)}$ total differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobimatrix und deren Determinante.

b) Es sei
$$p^{(3)} : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}^3,\ p^{(3)} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$
die dreidimensionale Transformation auf Polarkoordinaten.
Zeigen Sie, dass $p^{(3)}$ total differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobimatrix und deren Determinante.

Aufgabe 20 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung von $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ als Komposition $f = g \circ h$ von $g : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = y^x$ und $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x,x)^T$.

b) Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^x \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$ als Komposition $f = g \circ h$ von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \int_1^x \frac{\sin(yt)}{t}\,dt$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x,x)^T$.