Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 4 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 8. November 2012

Aufgabe 13 (10 Punkte)

a) Gegeben sei der Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{5 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma f ds$.

b) Gegeben sei der Weg

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$

und die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x) := \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ e^{x_2} + x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma F d\vec{x}$.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Asteroide (Aufgabe 11 c)) bezüglich $f = 1$.

b) Gegeben sei die Hyperbel

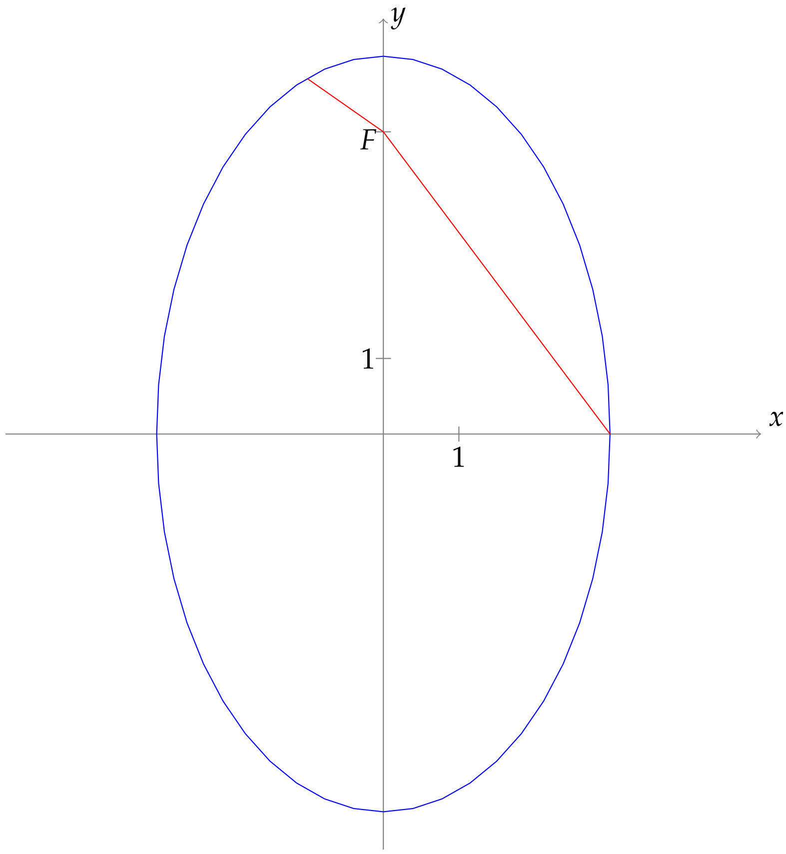
$$\gamma : [1, 3] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche im $\mathbb{R}^2$, die von der Verbindungsstrecke zwischen $(0, 0)^T$ und $\gamma(1)$, dem Weg der Kurve γ und der Verbindungsstrecke zwischen $(0, 0)^T$ und $\gamma(3)$ begrenzt wird.

Bitte wenden!

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Gegeben sei die Ellipse $(\gamma) = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1\right\}$. Der Fahrstrahl ist die Verbindungsstrecke zwischen dem oberen Brennpunkt F und einem Punkt auf der Ellipse, die beiden Scheitelpunkte sind die Schnittpunkte der Verbindungsgerade der Brennpunkte und der Ellipse.



a) Wählen Sie einen Weg, der die Ellipse parametrisiert (das heißt dessen Bahn die Ellipse ist).

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Ellipse beschränkten Fläche und geben Sie eine Formel für die Fläche an, die vom Fahrstrahl zwischen den Ellipsenpunkten $(x_1, y_1)^T \in (\gamma)$ und $(x_2, y_2)^T \in (\gamma)$ überstrichen wird.

c) Verwenden Sie das zweite Kepler'sche Gesetz (vgl. Wikipedia) um eine Aussage über das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Fahrstrahls in den beiden Scheitelpunkten zu treffen.

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Berechnen Sie die totale Ableitung der folgenden Abbildungen.

a) $f : \mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathrm{Mat}(n \times n),\ f(A) := A^3 + A^2$.

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) := x^T A x$ für eine gegebene Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$.
Hinweis: Entwicklen Sie $(x+h)^T A(x+h)$. Vergleichnen Sie mit dem skalaren Fall.