Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 3 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 2. November 2012

Aufgabe 9 (10 Punkte)

a) Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie: $A \subset X$ offen $\Longleftrightarrow X \setminus A$ abgeschlossen.

b) Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand der folgenden Mengen.

(i) $\{x \in \mathbb{Q}^n \mid |x| < 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}^n$.

(ii) $\{x \in \mathbb{Q}^n \mid |x| < 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(iii) $\{x \in \mathbb{Q}^n \mid |x| = 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}^n$.

(iv) $\{x \in \mathbb{Q}^n \mid |x| = 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(v) $\left\{x \in C_b([0,1]) \mid \|x\|_{sup} \leq 1\right\}$ als Teilmenge von $C_b([0,1])$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

a) Zeigen Sie: Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist der Graph $\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$.

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage? Betrachten Sie zunächst Funktionen auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Welche geometrischen Objekte im $\mathbb{R}^2$ sind durch die Bahnen der folgenden Wege gegeben? Zeichnen Sie die Bahnen zum Beispiel mit Octave und berechnen Sie die Bogenlänge.

a) $[0, 4\pi] \ni t \mapsto (\frac{t}{2}\cos(t), \frac{t}{2}\sin(t))^T$.

b) $[-3, 3] \ni t \mapsto (2\cosh(t), \sinh(t))^T$.

c) $[0, \pi] \ni t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))^T$.

d) $$[0, 4\pi) \ni t \mapsto \begin{cases} (\cos(t), \sin(t) + 1)^T & \text{für alle } t \in [0, \pi), \\ (\cos(t - \frac{\pi}{2}) - 1, \sin(t - \frac{\pi}{2}))^T & \text{für alle } t \in [\pi, 2\pi), \\ (\cos(t - \pi), \sin(t - \pi) - 1)^T & \text{für alle } t \in [2\pi, 3\pi), \\ (\cos(t - \frac{3\pi}{2}) + 1, \sin(t - \frac{3\pi}{2}))^T & \text{für alle } t \in [3\pi, 4\pi). \end{cases}$$

e) $[1, 4] \ni t \mapsto (t, \log(t))^T$.

Bitte wenden!

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Auf einem endlich-dimensionalen normierten Raum E sind alle Normen äquivalent.

Setzen Sie einen vollständigen Beweis dieses Satzes aus den folgenden Beweispuzzleteilen zusammen.

a) Seien zwei beliebige Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf E gegeben.

b) Wir definieren $\|x\|_{1,E,\mathcal{B}} := \sum_{j=1}^{n} |a_j(x)|$ abhängig von der gewählten Basis.

c) Offensichtlich gilt $\|x\|_E \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j(x)| \|e_j\|_E$ für alle $x \in E$.

d) Offensichtlich ist M beschränkt.

e) Dann ist $\widetilde{a}(x) \in M$ und wir wissen deshalb, dass $c \leq \|\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j(x) e_j\|_E = \|a(x)\|_1^{-1} \|x\|_E$.

f) Mit $C := \max_{j=1,\dots,n} \|e_j\|_E$ folgt, dass $\|x\|_E \leq C \|x\|_{1,E,\mathcal{B}}$ gilt.

g) Es ist einfach zu zeigen, dass $\|\cdot\|_{1,E,\mathcal{B}}$ eine Norm auf E ist.

h) Sei nun $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben durch $a \mapsto \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_E$.

i) Da $\{1\}$ abgeschlossen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist, folgt aus der Stetigkeit von $\|\cdot\|_1$, dass M abgeschlossen ist.

j) Sei $\|\cdot\|_E$ eine Norm auf E. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$. Jedes $x \in E$ kann als $x = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) e_j$ geschrieben werden, wobei $a_j(x) \in \mathbb{R}$ die Koordinaten von x bezüglich e_j sind.

k) Die Kompaktheit von M folgt.

l) Dann ist klar, dass $|f(a)| \leq C \|a\|_1$ gilt.

m) Beachte nun, dass $\|a(x)\|_1 = \|x\|_{1,E,\mathcal{B}}$ gilt. Es folgt also $c\|x\|_{1,E,\mathcal{B}} \leq \|x\|_E$.

n) Wir haben schon gezeigt, dass jede Norm äquivalent ist zu $\|\cdot\|_{1,E,\mathcal{B}}$. Die Konstanten nennen wir hier c_1, C_1 bzw c_2, C_2.

o) Somit gilt auch $|f(a) - f(b)| \leq C \|a - b\|_1$.

p) Der Satz vom Maximum/Minimum impliziert also, dass eine Konstante $c := \min_{a \in M} \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_E$ existiert so dass $c \leq \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_E$ für alle a mit $\|a\|_1 = 1$ gilt.

q) Sei nun ein beliebiger Punkt $x = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) e_j \in E$ gegeben. Wir betrachten die Koordinaten $\widetilde{a}_j(x) := \|a(x)\|_1^{-1} a_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

r) Damit gilt für jedes $x \in E$ auch $\|x\| \leq C_1 \|x\|_{1,E,\mathcal{B}} \leq \frac{C_1}{c_2} |||x|||$ und $\|x\| \geq c_1 \|x\|_{1,E,\mathcal{B}} \geq \frac{c_1}{C_2} |||x|||$.

s) Dies zeigt die Stetigkeit von f.

t) Wir definieren $M := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\|_1 = 1\}$.

u) Damit haben wir die Äquivalenz von $\|\cdot\|_{1,E,\mathcal{B}}$ mit $\|\cdot\|_E$ gezeigt.