Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

universitätbonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 2 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 25. Oktober 2012

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf X heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c und C gibt mit

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|$$

für alle $x \in X$. Für eine Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in(0,1)} |f(x)| \text{ und } \|f\|_{L^1} := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

sowie den Raum

$$X := \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{\sup} < \infty \text{ und } \|f\|_{L^1} < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\|\cdot\|_{\sup}$ und $\|\cdot\|_{L^1}$ sind beides Normen auf X.

b) $\|\cdot\|_{\sup}$ und $\|\cdot\|_{L^1}$ sind nicht äquivalent auf X.

   Hinweis: Berechnen Sie hierzu die Normen der Funktion $f_n(x) := x^n$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p < 1\}$ für $p = \frac{1}{2}$ und $p = 4$.

b) Zeigen Sie, dass $\|x\|_p$ für $1 \leq p < \infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

   (i) Seien $\phi,\ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Zeigen Sie: $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \phi(x_1) + \psi(x_2)$ ist konvex.

   (ii) Zeigen Sie, dass $K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^p + x_2^p < 1\}$ konvex ist für alle $1 \leq p < \infty$.

   (iii) Weisen Sie nach, dass $\|\cdot\|_p$ mit dem Minkowski-Funktional von K übereinstimmt.

c) Zeigen Sie, dass $\|x\|_p$ für $0 < p < 1$ keine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

d) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Für welche Werte von $0 < q < \infty$ ist $d(x,y) := \|x-y\|_p^q$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$?

Bitte wenden!

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei $X := \{\text{Felder eines Schachbretts}\}$ und

$$d(x, y) := \text{ Minimale Anzahl der Springerzüge, um von } x \text{ nach } y \text{ zu gelangen.}$$

a) Zeigen Sie: d ist eine Metrik auf X.

b) Bestimmen Sie den maximalen Abstand zwischen zwei Feldern, das heißt den Durchmesser von X, bezüglich d.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge, auf der die folgenden Funktionen stetig sind und skizzieren Sie jeweils Schnitte und Höhenlinien.

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) := \frac{|x|xy}{x^2+y^2}$.