**Mathematisches Institut**
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

universität**bonn**

## Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 1 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 18. Oktober 2012

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktion $f$ für die Werte $c$ und die achsenparallelen Schnitte an $x_1 = a$ und $x_2 = b$ in den folgenden Fällen.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2|x_2|, c \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}, a, b \in \{1, 2\}.$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = x_1 \sin(x_2), c \in \{0, 1\}, a \in \{0, 1\}, b \in \{\frac{\pi}{2}, \pi\}.$

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = z^2$, sowie die Mengen

$M_1(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = a\}, M_2(b) := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = b\}$ für $a, b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Skizzieren Sie die Mengen, auf die $M_1(a)$ und $M_2(b)$ von $f = Re(f) + iIm(f)$ abgebildet werden.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beschreiben und skizzieren Sie die folgenden Abbildungen.

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = x_1 x_2 + 2.$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$

c) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = e^z.$

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

a) Gegeben sei ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|_X)$. Zeigen Sie: Die Einheitskugel $\{x \in X \mid \|x\|_X < 1\}$ ist konvex.

b) Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Einheitskugeln bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

c) Welche der folgenden Formeln definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^2$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   (i) $\|x\| := \sqrt{|x_1|} + x_2$.

   (ii) $\|x\| := \max\ \{|x_1|, |x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|\}$.

d) Wir betrachten eine bezüglich $0$ punktsymmetrische konvexe Menge $K$ im $\mathbb{R}^2$, die den Kreis um $0$ mit Radius $1$ enthält und im Kreis um $0$ mit Radius $10$ enthalten ist, sowie das Minkowski-Funktional von $K$, gegeben durch

$$\|x\|_K := \inf\ \left\{\lambda > 0 \mid \lambda^{-1}x \in K\right\}.$$

Überprüfen Sie die Definition einer Norm Schritt für Schritt.

**Hinweis:** Zeigen Sie $(\lambda + \mu)^{-1}(x + y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda^{-1}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mu^{-1}y$ für $x,\ y \in K$ und $\lambda,\ \mu > 0$ und leiten Sie aus der Konvexität von $K$ die Dreiecksungleichung her.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

a) Welche der folgenden Formeln definieren eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   (i) $d(x, y) := \|x + y\|_2$.

   (ii) $d(x, y) := \min\ \{\|x - y\|_2, 1\}$.

   (iii) $d(x, y) := (\|x\|_2^2 + 1)\|x - y\|_2$.

b) Betrachten Sie die Menge aller Bahnhöfe in Deutschland und definieren Sie die darauf die Fahrtkostenfunktion $d(Bahnhof_1, Bahnhof_2)$ als Preis der billigsten Fahrkarte von $Bahnhof_1$ nach $Bahnhof_2$. Ist $d$ eine Metrik? Argumentieren Sie.