Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 12

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 11.07.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Homogene Distributionen)**.** Seien f_g und f_u (für "gerade" und "ungerade") die holomorphen Familien homogener Distributionen die für Schwartzfunktionen ϕ und $\mathrm{Re} z > 0$ durch

$$f_g(\phi)(z) = \frac{\pi^{z/2}}{\Gamma(z/2)} \int_{\mathbb{R}} |x|^z \phi(x) \frac{dx}{|x|}, \quad f_u(\phi)(z) = \frac{\pi^{(z+1)/2}}{\Gamma((z+1)/2)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sgn}(x)|x|^z \phi(x) \frac{dx}{|x|},$$

gegeben sind. Zeigen Sie wie in der Vorlesung agesprochen dass $f_g(\phi)(-2n) = c_{2n}\phi^{(2n)}(0)$ und $f_g(\phi)(-2n-1) = c_{2n+1}\phi^{(2n+1)}(0)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt und rechnen Sie die Konstanten c_n aus.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie dass

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx, \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

(b) Die Bernoullizahlen B_m sind durch $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{m=0}^\infty B_m x^m/m!$ (für kleine $|x|$) definiert. Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

(c) Zeigen Sie dass

$$\int_0^1 \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx = \sum_{m=0}^\infty \frac{B_m}{m!(z+m-1)}, \quad \mathrm{Re}(z) > 1,$$

(d) Benutzen Sie die Aufgabenteile (a) und (c) um zu zeigen dass ζ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ besitzt.

Aufgabe 3 (Betafunktion)**.** Die *Betafunktion* ist definiert durch

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt, \quad \mathrm{Re}\alpha > 0, \mathrm{Re}\beta > 0.$$

(a) Zeigen Sie dass

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Hinweis: schreiben Sie $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-t-s} dt ds$ und führen Sie den Variablenwechsel $s = ur$, $t = u(1-r)$ durch.

(b) Zeigen Sie die Funktionalgleichung

$$B(x, y) \cdot B(x+y, 1-y) = \frac{\pi}{x \sin(\pi y)}.$$

Aufgabe 4 (Satz von Bohr–Mollerup)**.** Eine auf einem offenen Intervall definierte Funktion f heißt *konvex* falls $f \in C^2$ und punktweise $f'' \geq 0$ gilt. Eine Funktion f heißt *logarithmisch (oder log-) konvex* falls $f > 0$ und $\log f$ konvex ist. Es ist möglich diese Begriffe für weniger reguläre Funktionen zu definieren, wir werden von dieser Möglichkeit aber keinen Gebrauch machen.

(a) Zeigen Sie dass die Summe zweier log-konvexen Funktionen wieder log-konvex ist. Da die Funktionen $x \mapsto t^{x-1}$ log-konvex sind und indem man Integrale durch Riemannsummen approximiert lässt sich daraus schließen dass die Funktion Γ auf $(0, \infty)$ log-konvex ist; Sie dürfen diese Tatsache als gegeben voraussetzen.

(b) Sei f eine log-konvexe Funktion auf $(0, \infty)$ sodass $f(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt. Zeigen Sie dass für jedes $n \geq 2$ und $x \in (0, 1)$ gilt

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$$

Hinweis: vergleichen Sie die Differenzenquotienten von $\log f$ auf den Intervallen $(n-1, n)$, $(n, n+x)$, und $(n, n+1)$.

(c) Nehmen Sie nun an dass die Funktion im Teil (b) die Funktionalgleichung $f(x+1) = xf(x)$ erfüllt. Zeigen Sie dass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad x \in (0,1).$$

(d) Folgern Sie aus der letzten Gleichung den Satz von Bohr–Mollerup: jede Funktion f die die Voraussetzungen von (b) und (c) erfüllt ist gleich der Gammafunktion.