Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 11

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 04.07.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Laurentreihen)**.** Seien $0 \leq r < R \leq \infty$ und sei f eine holomorphe Funktion auf dem offenen Kreisring $A_{r,R} := \{r < |z| < R\}$. Zeigen Sie dass f auf $A_{r,R}$ eine *Laurentreihenentwicklung* besitzt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite lokal gleichmäßig absolut konvergiert. Hinweis: wenden Sie den Cauchy-Integralsatz zunächst auf den Rand eines abgeschlossenen Kreisrings $\overline{A_{r',R'}}$ mit $r < r' < R' < R$ an und schreiben Sie $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\zeta^{n+1}$ bzw. $\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n/z^{n+1}$ auf den beiden Komponenten des Randes.

Aufgabe 2 (Torusabbildungen)**.** Seien $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ Gitter und sei f eine ganze Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 - z_2 \in \Lambda \implies f(z_1) - f(z_2) \in \Lambda'.$$

Zeigen Sie dass f ein affine Funktion ist, also $f(z) = az + b$.

Aufgabe 3 (Charakterisierung der Gammafunktion)**.** In der Vorlesung wurde implizit bewiesen dass für jede meromorphe Funktion Γ_i auf $\mathbb{C}$ die die Funktionalgleichung $z\Gamma_i(z) = \Gamma_i(z+1)$ erfüllt und auf dem Streifen $\{1 < \mathrm{Re} z < 2\}$ beschränkt ist die Funktion

$$\Gamma_i(z)\Gamma_i(1-z)\sin \pi z$$

auf $\mathbb{C}$ konstant ist. Diese Aussage wird als gegeben vorausgesetzt.
Seien nun Γ_1, Γ_2 zwei Funktionen dieser Art. Zeigen Sie dass $\Gamma_1(z)\Gamma_2(1) = \Gamma_1(1)\Gamma_2(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4 (Mellintransformation)**.** Die *Mellintransformation* einer Funktion f ist definiert durch

$$(\mathcal{M}f)(z) := \int_0^{\infty} f(t) t^{z-1} dt,$$

wobei das Iintegral als $\lim_{R\to\infty} \int_{1/R}^{R}$ aufgefasst wird. Zeigen Sie

(a) $(\mathcal{M}\cos)(z) = \Gamma(z)\cos(\pi z/2)$, $0 < \mathrm{Re} z < 1$.

(b) $(\mathcal{M}\sin)(z) = \Gamma(z)\sin(\pi z/2)$, $-1 < \mathrm{Re} z < 1$.

Hinweis zum Teil (b): betrachten Sie zuerst $\mathrm{Re} z > 0$.
Die Aussage (b) verallgemeinert das Ergebnis der Aufgabe 2 vom Blatt 3.