Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 9

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 20.06.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Poissonkern auf der Halbebene)**.** Man definiere für eine beschränkte messbare Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,t) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(x-y)^2 + t^2} U(y) dy. \tag{1}$$

Beweisen Sie dass diese Funktion harmonisch auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ ist. Hinweis: transformieren Sie die Halbebene $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ mittels einer Möbiustransformation in die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}$.

Aufgabe 2. Man nehme an dass die Funktion U in der Aufgabe 1 einen Sprung in 0 macht, also

$$\lim_{y\to 0-} U(y) = U_- \neq U_+ = \lim_{y\to 0+} U(y).$$

Beweisen Sie dass die Funktion (1) in diesem Fall folgendes Verhalten in der Nähe von 0 aufweist:

$$\lim_{z=x+it\to 0} f(x,t) - \frac{\arg z}{\pi} U_- - \frac{\pi - \arg z}{\pi} U_+ = 0.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie dass

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - ae^{i\theta}| d\theta = 0$$

(a) für alle $|a| < 1$

(b) für alle $|a| = 1$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie dass

$$\int_0^1 \log(\sin(\pi x)) = -\log 2.$$

Benutzen Sie dazu den unten abgebildeten Integrationspfad und lassen Sie anschließend $R \to \infty$ und $r \to 0$ gehen.