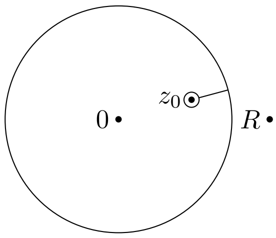
Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 4

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 09.05.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Isolierte Polstelle)**.** Sei $f : D_R(0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, wobei $R > 0$ und $z_0 \in D_R(0)$ eine Polstelle der Ordnung $k > 0$ ist, das heißt dass $f(z)(z-z_0)^k$ sich zu einer holomorphen Funktion auf $D_R(0)$ fortsetzen lässt, nicht aber $f(z)(z-z_0)^{k-1}$. Sei $f(z) = \sum_n a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f im Punkt 0. Zeigen Sie dass $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = z_0$.
Hinweis: benutzen Sie die Cauchy-Integralformel mit der folgenden ("Schlüsselloch-") Kurve:



Aufgabe 2 ("Universelle" ganze Funktion)**.** Eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *konvergiert kompakt* gegen eine Funktion f falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ die Folge $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert.

(a) Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie dass die Folge der Partialsummen der Taylorreihe von f um den Punkt 0 kompakt gegen f konvergiert.

(b) Konstruieren Sie eine Funktion F der Form
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z - M_n) e^{-\epsilon_n (z-M_n)^2}$$
sodass für jede ganze Funktion f eine Teilfolge der Folge der Funktionen $F(\cdot + M_n)$ kompakt gegen f konvergiert.

Aufgabe 3 (Satz von Hadamard über drei Geraden)**.** Sei f eine beschränkte stetige Funktion auf dem Streifen $\{0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1\}$ die in seinem Inneren $\{0 < \mathrm{Re} z < 1\}$ holomorph ist und sei $F(\theta) := \sup_{\mathrm{Re} z = \theta} |f(z)|$. Zeigen Sie dass
$$F(\theta) \leq F(0)^{1-\theta} F(1)^{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$
Hinweis: führen Sie dies auf den Fall $F(0) = F(1) = 1$ zurück. Betrachten Sie dann die Funktion $f(z)e^{\epsilon z(z-1)}$.

Aufgabe 4 (Automorphismen eines Kreisrings)**.** Ein Kreisring mit den Radien $0 < r < R$ ist die Menge $A_{r,R} = \{r < |z| < R\}$. Sei $f : \overline{A_{1,e}} \to \overline{A_{1,e}}$ eine stetige Abbildung die auf $A_{1,e}$ holomorph ist und für die $|f(z)| = |z|$, $z \in \partial A_{1,e}$, gilt. Zeigen Sie dass dann notwendig $f(z) = az$ mit $|a| = 1$ gilt.
Hinweis: wenden Sie den Satz über drei Geraden auf die Funktionen $f(e^z)$ und $e/f(e^z)$ an.