Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 3

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 02.05.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Fresnelintegrale)**.** Zeige dass

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

Benutze den Cauchy-Integralsatz für die Funktion e^{-z^2} und den Pfad der aus den Liniensegmenten $(0, R)$ und $(0, Re^{i\pi/4})$ sowie dem Kreissegment zwischen R und $Re^{i\pi/4}$ besteht.

Aufgabe 2 (Cauchy-Hauptwert)**.** Der *Cauchy-Hauptwert* (engl. *principal value*) in 0 eines Integrals ist definiert durch

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int_{1/R<|t|<R} f(t)dt.$$

Zeige mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes dass

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi}}{t} dt = i\pi \operatorname{sign}(\xi), \qquad \operatorname{sign}(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi < 0 \\ 0, & \xi = 0 \\ 1, & \xi > 0. \end{cases}$$

Ergänze dazu den Integrationsbereich durch zwei Halbkreise.

Aufgabe 3. Sei $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = f^{(1)}(0) = \cdots = f^{(N-1)}(0) = 0$ und $f^{(N)}(0) \neq 0$. Zeige dass es ein $\epsilon > 0$ gibt sodass für jedes z mit $0 < |z| < \epsilon$ die Gleichung $f(\zeta) = z$ genau N Lösungen besitzt.

Aufgabe 4 (Maximumprinzip)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant, und $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$. Sei $z \in \overline{D_R(z_0)}$ ein Punkt in dem das Maximum von $|f(z)|$ auf $\overline{D_R(z_0)}$ angenommen wird. Zeige $f'(z) \neq 0$.