Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universitätbonn

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 9 — Abgabe vor der Vorlesung am 24.06.2016

Aufgabe 1

Es sei $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ eine nicht-triviale Funktion, so dass für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Delta u &= \lambda u \text{ in } B_1(0), \\ u &= 0 \text{ auf } \partial B_1(0). \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \leq 0$.
- Finden Sie eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsdatum u:

$$\begin{aligned} \partial_t v - \Delta v &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times B_1(0), \\ v &= u \text{ auf } \{0\} \times B_1(0), \\ v &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \partial B_1(0). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Es sei $u(t, x)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ und es seien $\lambda > 0$, $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Funktionen Lösungen sind:

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= u(\lambda^2 t, \lambda x), & u_2(t, x) &= u(t + t_0, x + x_0), \\ u_3(t, x) &= u(t, Ax), & u_4(t, x) &= u(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n). \end{aligned}$$

b) Es sei $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ und $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty))$ habe kompakten Träger. Finden Sie je eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= u_0 \text{ auf } \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty), \end{aligned}$$

mit Dirichlet Randdaten

$$u = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

beziehungsweise mit Neumann Randdaten

$$\partial_{x_n} u = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

Aufgabe 3

a) Es seien $u_1(s,t), \dots, u_n(s,t)$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_{ss} u = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(x_j, t)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Es sei $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $u = K * f$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsdatum f. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t \to \infty} u(t,x) = 0$ gleichmäßig in x.

Aufgabe 4

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f \in C^0([a,b])$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.
Hinweis: Betrachten Sie eine Fortsetzung von f und die zugehörige Lösung der Wärmeleitungsgleichung.