Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 8 Abgabe vor der Vorlesung am 17.06.2016

Aufgabe 1

a) Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die *äußere Sphärenbedingung* in $x_* \in \partial\Omega$ wenn $y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ existieren, so dass

$$\overline{B_r(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}\,. \tag{1}$$

Geben Sie ein Beispiel einer beschränkten Menge Ω mit C^1 Rand, so dass diese Bedingung für einen Randpunkt nicht erfüllt ist.

b) Der Punkt $x_* \in \partial\Omega$ erfüllt die *äußere Kegelbedingung*, wenn eine offene Kugel $B_r(y)$ existiert, so dass

$$\overline{\text{conv}(B_r(y) \cup \{x_*\})} \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}$$

wobei conv die konvexe Hülle bezeichnet. Zeigen Sie, dass für Ω mit C^1 Rand diese Bedingung in jedem Randpunkt erfüllt ist.

Aufgabe 2

Es sei $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$ subharmonisch und beschränkt. Zeigen Sie, dass u konstant ist. Zeigen Sie ferner durch ein Beispiel, dass diese Implikation für $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ nicht gilt.

Hinweis: Die Funktion $A + B \log |x|$ ist harmonisch außerhalb von 0 für alle Konstanten A, B.

Aufgabe 3

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, S_f wie in der Vorlesung und

$$P[f](x) = \sup\{u(x) : u \in S_f\}.$$

Zeigen Sie, dass das Dirichlet Problem allgemein lösbar ist, genau dann wenn für alle $f \in C^0(\partial\Omega)$, $P[f] = -P[-f]$ auf $\overline{\Omega}$.

Aufgabe 4

Es sei $u : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy.$$

a) Zeigen Sie, dass $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$, $u(t,x) > 0$ und, dass u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist:

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

b) Zeigen Sie, dass $u(t,x)$ für $t \downarrow 0$ konvergiert und bestimmen Sie $v(x) := \lim_{t \downarrow 0} u(t,x)$. Zeigen Sie inbesondere, dass v nicht stetig ist und, dass der Träger supp$(v) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \neq 0\}}$ kompakt ist.

Hinweis: Wir sagen, dass die die Wärmeleitungsgleichung regularisiert und eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.