Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universitätbonn

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 6 — Abgabe vor der Vorlesung am 03.06.2016

Aufgabe 1

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u \in C(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in \Omega$ eine Folge $r_j \to 0$ existiert, so dass

$$u(x) = \fint_{\partial B_{r_j}(x)} u.$$

Zeigen Sie, dass u harmonisch ist. Hierfür dürfen Sie verwenden, dass für jeden Ball B und jede Funktion $f \in C(\partial B)$ eine eindeutige Lösung $v \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ des Problems

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \text{ in } B, \\ v &= f \text{ auf } \partial B, \end{aligned}$$

existiert.

b) Es sei $B_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_n > 0\}$ und $u \in C^2(B_+) \cap C(\overline{B_+})$ sei harmonisch und $u = 0$ auf $\partial B_+ \cap \{x : x_n = 0\}$. Es sei ferner $v : B_1(0) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{falls } x_n < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass v harmonisch ist.

Aufgabe 2

Es sei $\theta \in (0, 2\pi)$ und $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (x,y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi)), r > 0, \phi \in (0, \theta)\}$. Finden Sie eine nicht-triviale Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$ und $f \in C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger. Finden Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Wir nennen die Abbildung

$$x \mapsto Lx$$

konform falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} = \frac{\langle Lx, Ly\rangle}{|Lx||Ly|},$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm ist. Allgemeiner heißt eine Abbildung $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ konform, falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $x \mapsto Df(\xi)x$ konform ist.

a) Es sei $A \in O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. $A^T A =$ Id. Zeigen Sie, dass $x \mapsto Ax$ konform ist.

b) Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ konform. Zeigen Sie, dass $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\nabla f_1 \perp \nabla f_2$ und $|\nabla f_1| = |\nabla f_2|$ und verwenden Sie Aufgabe 4 des dritten Zettels.

c) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ harmonisch und $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ konform. Zeigen Sie, dass die Funktion $v = u(f)$ harmonisch ist.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.