
Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr.3

Abgabe vor der Vorlesung am 06.05.2016

Aufgabe 1

a) Es sei $a \in C(\mathbb{R})$ und $x \in C^1(\mathbb{R})$ erfülle

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq a(t)x(t).$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $t \geq 0$

$$x(t) \leq x(0) \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right).$$

b) Es seien $y \in C^1(\mathbb{R})$ und $b \in C(\mathbb{R})$ mit $b \geq 0$ und $\int_0^\infty b(s) ds < \infty$ so dass

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} y^2(t) \leq y(t)b(t)$$

für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann für alle $t \geq 0$

$$y(t) \leq |y(0)| + \int_0^\infty b(s) ds.$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -y + zy \sin(y), \\ \dot{z} &= -z. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$

$$|y(t)| \leq |y(0)| \exp(|z(0)| - t).$$

Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = y(t)e^t$

Aufgabe 3

Es seien $T, c \geq 0$ und es seien $\phi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ nicht-negative Funktionen, so dass für $t \in [0, T)$

$$\phi(t) \leq c + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds.$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $t \in [0, T)$

$$\phi(t) \leq c \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Zeigen Sie hierfür die folgenden Schritte:

- Es seien $h(t) = c + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds$ und $\theta(t) := \dot{h}(t) - \psi(t)h(t)$. Zeigen Sie, dass dann $\theta \in C([0, T))$ nicht-positiv ist.
- Lösen Sie die Gleichung

$$\dot{y} - \psi y = \theta, y(0) = c.$$

- Beweisen Sie die Aussage.

Aufgabe 4

a) Es seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\begin{aligned}u_x &= v_y, \\u_y &= -v_x.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann $\Delta u = \Delta v = 0$

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u(x, y) = \Re(x + iy)^n, v(x, y) = \Im(x + iy)^n$ (Real- und Imaginärteil). Zeigen Sie, dass $\Delta u = \Delta v = 0$.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 12.05 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 9.05., Di. 10.05. und Mi. 11.05. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de