**Mathematisches Institut**
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universität**bonn**

## Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr.2 — Abgabe vor der Vorlesung am 29.04.2016

### Aufgabe 1

Finden Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $t\frac{d}{dt}x + 2x = 10t^2$ mit $x(1) = 3$.

b) $t\frac{d}{dt}x - x = t^2$ mit $x(1) = 3$.

c) $\frac{d}{dt}x + 2tx = e^{t-t^2}$ mit $x(0) = -1$.

d) $\frac{d}{dt}A + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} 3te^t \\ 3e^t \end{pmatrix} = 0, \quad A(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

### Aufgabe 2

Es sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Zeigen Sie, dass für jede Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x + ax = f \tag{1}$$

ebenfalls $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

### Aufgabe 3

Wir betrachten eine radioaktive Substanz **A** die in **B** zerfällt, welches dann weiter in die Substanz **C** zerfällt.

a) Es seien $\lambda_1, \lambda_2$ die Zerfallskonstanten (d.h. $\frac{\ln(2)}{T_{\text{Halbwert}}}$) von **A** und **B** und $A_0, B_0$ die Mengen der Stoffe zu Beginn der Beobachtung. Formulieren Sie eine Differentialgleichung für die Menge $B(t)$ des Stoffes **B** zum Zeitpunkt $t$ und lösen Sie diese.

b) Es seien nun $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Bestimmen Sie zu welchem Zeitpunkt $B(t)$ maximal ist.

**Aufgabe 4**

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{d}{dt}u - \Delta u = 0, \tag{2}$$

$$(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

und suchen eine Lösung der Form

$$u(t, x) = t^{-n/2} v(t^{-1/2} x). \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass ein $u$ dieser Form genau dann eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, wenn

$$\text{div}\left(\frac{1}{2} v x + \nabla_x v\right) = 0. \tag{5}$$

b) Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Lösung von

$$\frac{1}{2} v x + \nabla v = 0. \tag{6}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $y(s) = v(sa)$ für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |a| = 1, s \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie dass

$$\frac{1}{2} s y + \frac{d}{ds} y = 0. \tag{7}$$

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.