Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universitätbonn

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 12 — Abgabe vor der Vorlesung am 15.07.2016

Aufgabe 1

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 Polyeder mit Normaleneinheitsvektorfeld ν und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \nu \cdot \nabla u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Aufgabe 2

Es sei $F \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $\|F(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Ferner seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Es sei nun $u \in C^2([0,\infty \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u - \Delta u &= F, \\ u(0,\cdot) = f, \quad \partial_t u(0,\cdot) &= g, \end{aligned}$$

Ferner definieren wir

$$E^2(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t u|^2(t,x) + |\nabla u|^2(t,x) dx$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} E^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^n} F(t,x) \partial_t u(t,x) dx$$

b) Folgern Sie, dass für eine geeignete Konstante $C > 0$

$$E(t) \leq E(0) + C$$

für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3

Finden Sie eine Lösung $u \in C_1^2((0,\infty) \times (0,\pi)) \cap C^1([0,\infty) \times [0,\pi])$ des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= (x^2 - 2\pi x)e^{-t} \text{ in } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ \partial_x u(t,0) = 2\pi e^{-t}, \quad \partial_x u(t,\pi) &= 0 \text{ für } t > 0, \\ u(0,x) &= 2\pi x - x^2 \text{ für } x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie den Ansatz $u(t,x) = (2\pi x - x^2)e^{-t} + v(t,x)$.

Aufgabe 4

Es seien $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ sei eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u = g, \partial_t u = h \text{ auf } \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir die kinetische Energie

$$k(t) = \frac{1}{2} \int |\partial_t u(t,x)|^2 dx,$$

sowie die potentielle Energie

$$p(t) = \frac{1}{2} \int |\partial_x u(t,x)|^2 dx.$$

a) Zeigen Sie, dass $E = p(t) + k(t)$ konstant ist.

b) Zeigen Sie, dass eine Zeit $T > 0$ existiert, so dass $k(t) = p(t)$ für $t > T$.

Hinweis: Stellen Sie $u(t,x)$ und $p(t) - k(t)$ in Termen von $F(x+t)$ und $G(x-t)$ dar.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.