Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universitätbonn

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 11 — Abgabe vor der Vorlesung am 08.07.2016

Aufgabe 1

Es seien $a, b, e > 0$ und $c, d \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Problems

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_x + du_y - eu = 0 \text{ in } \Omega. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass u kein positives Maximum oder negatives Minimum in Ω annimmt.

b) Folgern Sie hieraus, dass die einzige Lösung von (1) mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ die triviale Lösung $u \equiv 0$ ist.

Aufgabe 2

Finden Sie eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= x^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hinweis: Falls u hinreichend regulär ist, so ist auch $v = \partial_x^3 u$ eine Lösung.

Aufgabe 3

Es seien $f \in C_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}), u_0 \in C^0(\mathbb{R})$ mit supp(f), supp(u_0) kompakt gegeben. Finden Sie eine Lösung $u \in C_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^0([0, \infty) \times \mathbb{R})$ des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u + t^2 u &= f \text{ in } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u &= u_0 \text{ auf } \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hinweise:

- Finden Sie eine Lösung $w \in C^1([0, \infty))$ des Problems

  $$\begin{aligned} \partial_t w + t^2 w &= 0, \\ w(0) &= 1, \end{aligned}$$

  und zeigen Sie, dass $w(t) > 0$ für alle $t \in [0, \infty)$.
- Betrachten Sie den Ansatz $u(t, x) = w(t)v(t, x)$ und bestimmen Sie die von v erfüllte Gleichung.

Aufgabe 4

Es sei $\Omega = (0, L) \times (0, 1)^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Finden Sie ein $L > 0$ und eine nicht-triviale Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so dass

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie Produkte von trigonometrischen Funktionen.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.