Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

universitätbonn

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 10 — Abgabe vor der Vorlesung am 01.07.2016

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(t, x, y)$ der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \text{ in } \Omega_T, \\ u &= g \text{ auf } \Gamma_T, \\ u &= u_0 \text{ auf } \{0\} \times \Omega, \end{aligned}$$

für die Gebiete

a) $H = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$, $n \geq 2$,

b) $(0, \infty)^n$,

c) $(0, 1)^n$.

Hinweis: Betrachten Sie im dritten Fall eine periodische Fortsetzung.

Aufgabe 2

Es sei $t > 0$ und für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Zeigen Sie, dass für $s, t > 0$

$$\Phi(s + t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y)\Phi(s, y)dy.$$

Aufgabe 3

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\Omega_T)$, $g \in C^0(\Gamma_T)$. Ferner seien $u, v_1, v_2 \in C^2_1(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$, so dass

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \text{ in } \Omega_T, \\ u &= g \text{ auf } \Gamma_T, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t v_1 - \Delta v_1 \leq f &\leq \partial_t v_2 - \Delta v_2 \text{ in } \Omega_T, \\ v_1 \leq u &\leq v_2 \text{ auf } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$v_1 \leq u \leq v_2 \text{ in } \overline{\Omega_T}.$$

Zeigen Sie als Anwendung, dass für $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 1 \text{ in } \Omega_T, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_T, \end{aligned}$$

gilt, dass $0 \leq u(x,t) \leq t$ auf Ω_T.

Aufgabe 4

Es seien $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^n$ konstant und $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_1^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit supp(f),supp(u_0) kompakt, gegebene Funktionen. Finden Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + cu + d \cdot \nabla u &= f \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= u_0 \text{ auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\exp(-x \cdot d)u(t,x)$.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.