Zusammenfassung der Vorlesung

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Herbert Koch
Universität Bonn
Sommersemester 2016

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Wie in der Vorlesung besprochen, werden folgende Bücher empfohlen:

- L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS Graduate Studies in Mathematics 19
- F. John, Partial Differential Equations, Springer
- J. Jost, Partielle Differentialgleichungen, Springer
- W. Walter, Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen, Springer

Dieses Skript basiert auf den Skripten von Prof. Müller (SS 2009), Prof. Szekelyhidi (SS 2010), Prof. Niethammer (2014) und Prof. Conti (2015) und ist teils wörtlich übernommen.

Tippfehler und Korrekturen bitte an `koch@math.uni-bonn.de` oder in der Sprechstunde.

Diese Zusammenfassung ist nur für Hörer der Vorlesung V2B2 EPDE an der Universität Bonn, Sommersemester 2016, bestimmt. Eine aktuelle Version ist unter `http://www.math.uni-bonn.de/ag/ana/SoSe2016/V2B2_SS_16.html` zu finden.

Tutoren: Leona Schlöder `leona.schloeder@gmx.de`,
Tobias Schmidt `ts.math@web.de`,
Florian Schweiger `fl-schweiger@t-online.de`

Inhaltsverzeichnis

12.04.16

1 Einleitung

1.1 Partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen (abgekürzt 'PDG' oder nach dem englischen 'partial differential equations' als 'PDE' bezeichnet) sind Gleichungen, die eine Funktion mehrerer Variablen, sowie deren partielle Ableitungen enthalten. Die Ordnung der Differentialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Gleichung auftaucht.

Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige glatte (d.h. für uns, dass alle Ableitungen, die wir benötigen, existieren und stetig sind) Funktion auf Ω. Wir benutzen die folgenden Notationen für partielle Ableitungen. Die i-te partielle Ableitung von u ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.1}$$

und wird auch mit

$$\partial_{x_i} u, \qquad \partial_i u, \qquad D_i u, \qquad u_{x_i} \qquad u_i$$

abgekürzt. Ebenso schreiben wir partielle Ableitungen zweiter Ordnung als

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u, \quad \partial^2_{x_i x_j} u, \quad \partial^2_{ij} u, \quad u_{x_i x_j}, \qquad u_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.2}$$

Allgemein definiert man für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, mit Ordnung $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$

$$D^\alpha u(x) = \partial^\alpha u(x) = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \ldots \partial^{\alpha_n}_{x_n} u \tag{1.3}$$

Für spätere Zwecke führen wir hier noch die Notation $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$, sowie $x^\alpha = \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$ ein. Mit

$$D^k u(x) = D^\alpha u(x); |\alpha| = k \tag{1.4}$$

bezeichnen wir die Menge aller partiellen Ableitungen der Ordnung k. Wichtige Spezialfälle sind die (totale) erste Ableitung

$$Du = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_1} u),$$

und der Gradient,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

sowie die Hesse matrix

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} u & \dots & \partial^2_{x_n x_1} u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_1 x_n} u & \dots & \partial^2_{x_n x_n} u \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Der Satz von Schwarz impliziert dass die Hessematrix symmetrisch ist falls u zweimal stetig differenzierbar ist.

Eine partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung läßt sich nun schreiben als

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0. \tag{1.7}$$

Als wichtigste Beispiele werden wir im nächsten Abschnitt die Wärmeleitungsgleichung, sowie die Poisson-Gleichung, etwas ausführlicher motivieren. Weitere bekannte Beispiele sind

(i) Die Helmholtz-Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$-\Delta u + \mu u = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}_+,$$

wobei

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i x_i} u. \tag{1.8}$$

(ii) Die Minimalflächengleichung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$-\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

wobei $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i$.

(iii) Die Wellengleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u_{tt} - \Delta u = f.$$

(iv) Die (viskose) Burgers-Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\nu \geq 0$

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}, \qquad \text{wobei } \nu \geq 0.$$

(v) Die Korteweg-de-Vries Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0.$$

(vi) Die stationäre Schrödingergleichung in $\mathbb{R}^n$. Gegeben $V \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$-\Delta u + V u = \lambda u$$

1.2 Ein wichtiges Beispiel: die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung ist die einfachste Gleichung, welche die Ausbreitung von Stoffen durch Diffusion beschreibt. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Sei $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ die Massendichte eines Stoffes (d.h. $u(t,x)$ ist die Dichte im Raumpunkt $x \in \Omega$ zur Zeit t). Sei

$$j : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3 \tag{1.9}$$

die Flußdichte des Stoffes, d.h. der Gesamtfluß des Stoffes durch eine Hyperfläche A mit Normale ν ist durch $\int_A j \cdot \nu dS$ gegeben. Sei schließlich $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ die Produktionsrate des Stoffes. Dann gilt für jedem Ball $B_r(x) \subset \Omega$ und jedes t

$$\frac{d}{dt} \int_{B_r(x)} u dy = - \int_{\partial B_r(x)} j \cdot \nu dS + \int_{B_r(x)} f dy \tag{1.10}$$

wobei das linke Integral die Gesamtmasse in $B_r(x)$, das linke Integral auf der rechten Seite den Massenabfluß und das zweite Integral die Massenproduktion in $B_r(x)$ beschreibt. Mit dem Satz von Gauss (und der Vertauschung von Integration und Differentiation) folgt

$$\int_{B_r(x)} u_t dy = \int_{B_r(x)} (-\operatorname{div} j + f) dy. \tag{1.11}$$

Da dies für alle Bälle mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ gilt, folgt (für $u \in C^1$, $j \in C^1$, $f \in C$)

$$\partial_t u + \operatorname{div} j - f = 0 \qquad \in (0,T) \times \Omega \tag{1.12}$$

Diese Gleichung heißt Bilanzgleichung oder Erhaltungssatz, weil sie die Erhaltung der Masse bzw. die Massebilanz beschreibt. Diese Bilanzgleichung gilt unabhängig von dem konkreten Stoff, den wir betrachten. Um eine Gleichung für u zu gewinnen, fehlt noch eine Beziehung zwischen j und u (diese hängt von dem konkreten Stoff ab). Im einfachsten Fall ist j zu ∇u proportional,

$$j = -D \nabla u. \tag{1.13}$$

Die Konstante D heißt Diffusionskoeffizient. Es gilt $D > 0$, da der Fluß von Gebieten hoher Massedichte zu solchen niedriger Massedichte erfolgt. Setzt man der Einfachheit halber $D = 1$ so ergibt sich die Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \tag{1.14}$$

Lösungen der Gleichung $-\Delta v = f$ entsprechen gerade stationären Masseverteilungen, d.h $u(t,x) = v(x)$ ist eine Lösung von (1.14) Statt der Diffusion von Stoffen kann man auch die zeitliche Entwicklung der Temperatur in einem Stoff betrachten. In diesem Fall ist u die Temperatur, j der Wärmefluß und f die Wärmezufuhr. Die in der Kugel $B_r(x)$ gespeicherte Energie ist $\int_{B_r(x)} cu\ dy$, wobei die Konstante c die spezifische Wärmekapazität (Energie/ Temperatur $\times$ Volumen) des Stoffes ist. Die zugehörige Bilanzgleichung ist

$$\partial_t(cu) = -\operatorname{div} j + f \tag{1.15}$$

und mit $j = -D\nabla u$ und $c = 1$, $D = 1$ ergibt sich wieder (1.14). Im den folgenden Kapiteln werden wir uns zunächst mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, dann mit der Gleichung $-\Delta u = f$, der sogenannten Poisson-Gleichung, beschäftigen und insbesondere zunächst mit dem Spezialfall $f = 0$.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Definition, die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = (a, b)$, $F \in C((a, b) \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = F(t, x(t))$$

beschreibt die Ableitung der Funktion $x : (c, d) \to \Omega$ mit $(c, d) \subset (a, b)$ als Funktion von t und $x(t)$.

Eine Funktion $x \in C^1((c, d); \Omega)$ heißt Lösung, wenn sie der Differentialgleichung genügt. Ist $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \Omega$ so ist $x \in C^1((c, d); \Omega)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = F(t, x) \qquad x(t_0) = x_0$$

falls x der Differentialgleichung genügt, $t_0 \in (c, d) \subset (a, b)$ und $x(t_0) = x_0$.

Satz 2.1 (Peano). *Zu F wie oben existiert eine Lösung des Anfangswertproblems.*

Wir nennen F lokal Lipschitzstetig in x, wenn für alle $K \subset (a, b) \times \Omega$ kompakt ein $L_K > 0$ existiert, so dass

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq L_K |x - y|$$

für $(t, x), (t, y) \in K$.

Satz 2.2. *[Picard Lindelöf, Analysis II] Ist F lokal Lipschitz stetig in x, so ist die Lösung eindeutig.*

15.04.2016
Beispiele.

(i) $\dot{x} = x$, $x(0) = C$. Lösung: Ce^t. Eindeutigkeit: Sei $x(t)$ eine Lösung, so ist unter Verwendung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} e^{-t} x(t) = -e^{-t} x(t) + e^{-t} x(t) = 0$$

und damit $e^{-t} x(t) = e^{-0} x(0) = C$.

(ii) Sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten

$$\dot{x} = a(t)x, \qquad x(0) = C.$$

Dann ist $x(t) = Ce^{\int_0^t a(s)ds}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

(iii) Der freie Fall. Ein Körper der Masse m wird durch die Schwerkraft beschleunigt. Nach Newton ist die Beschleunigungskraft gleich der Ableitung des Impulses mv, also

$$\frac{d}{dt}(mv) = m\frac{d}{dt} v = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Position $x(t)$. We erhalten

$$m\frac{d^2}{dt^2} x = -ge_3$$

und die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = x_0 + tv_0 - \frac{1}{2} e_3 g t^2$$

wobei x_0 die Anfangsposition und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist. Die Bahn ist eine Parabel.

(iv) Betrachte

$$\dot{x} = |x|^{\frac{1}{2}}$$

Die Wurzelfunktion ist nicht Lipschitzstetig. Eine Lösung ist

$$x = \frac{1}{2}|t|t$$

aber auch für $t_0 \leq t_1$

$$x = \left\{ \begin{array}{rl} -\frac{1}{2}(t-t_0)^2 & \text{für } t \leq t_0 \\ 0 & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1}{2}(t-t_1)^2 & \text{für } t \geq t_1 \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

Insbesondere definiert (2.1) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = |x|^{\frac{1}{2}} \qquad x(0) = 0$$

für $t_0 \leq 0 \leq t_1$.

(v) Wir betrachten
$$\dot{x}(t) = x^2(t), \qquad x(0) = 1$$
Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist durch
$$x(t) = (1-t)^{-1}.$$
In diesem Fall ist $d = 1$ maximal.

Die letzten beiden Gleichungen sind mit einem Separationsverfahren lösbar. Eine einprägsame Form, die aber mathematisch begründet werden muß, ist folgendermassen. Wir betrachten $\Omega \subset \mathbb{R}$,
$$\dot{x} = f(t)F(x)$$
das wir als
$$\frac{dx}{dt} = f(t)F(x)$$
schreiben. Wir multiplizieren mit $dt/F(x)$ (Was bedeutet das?), erhalten
$$F(x)^{-1}dx = f(t)dt$$
integrieren beide Seiten und erhalten
$$G(x(t)) := \int_{x_0}^{x(t)} F(y)^{-1}dy = \int_{t_0}^{t} f(s)ds =: h(t)$$
und lösen nach $x = x(t)$ auf.

Satz 2.3. *Ist $F \in C((a,b),(0,\infty))$ und $f \in C(a,b)$ so definiert dieser Separationsansatz die eindeutige Lösung.*

Bemerkung: Diese Eindeutigkeitsaussage folgt nicht aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

Beweis. Es gilt
$$G'(x) = F(x)^{-1}(x) > 0.$$
Nach dem Satz von der inversen Funktion ist $x \to G(x)$ in einer Umgebung invertierbar. Wir nennen die Umkehrfunktion H. Wir definieren für t in einer Umgebung von t_0
$$x(t) = H(h(t))$$
und verifizieren
$$x(t_0) = H(h(t_0)) = H(0) = x_0$$
und
$$\dot{x} = \dot{H}(h(t))\dot{h}(t) = F(H(h(t))f(t) = f(t)F(x(t)).$$
Dieser Ansatz liefert also eine Lösung der Differentialgleichung.

Sei nun umgekehrt $\tilde{x}(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems für t in der Nähe von t_0. Wir definieren $\tilde{h}(t) = G(\tilde{x}(t))$ und berechnen

$$\dot{\tilde{h}}(t) = F(\tilde{x}(t))^{-1}\dot{\tilde{x}}(t) = f(t).$$

Außerdem gilt $\tilde{h}(t_0) = G(x_0) = 0$ und daher $\tilde{h} = h$ and $\tilde{x} = x$. □

Nachtrag zu dem Satz von Picard-Lindelöf: Das maximale Existenzintervall.

Satz 2.4. *Unter den Voraussetzungen und mit der Notation von Satz 2.2 können wir d so wählen dass der Abschluß des Graphen* $G = \{(t, x(t)) : t_0 \leq t < d\}$ *nicht kompakt ist in* $(a, b) \times \Omega$.

Beweis. Ist $d = b$ so ist nichts zu zeigen. Sind (c_0, d_0) und (c_1, d_1) die Definitionsbereiche der Lösungen x_0 und x_1 des Anfangswertproblems so stimmen die Lösungen nach der Eindeutigkeitsaussage auf dem Schnitt der Definitionsbereiche überein. Damit ist die Vereinigung aller Definitionsbereiche ein maximaler Definitionsbereich (c, d) einer Lösung. Sei nun $t_0 < d < b$. Wir führen die Annahme, G sei kompakt zu einem Widerspruch. Ist G kompakt in $(a, b) \times \Omega$ so ist $F|_G$ beschränkt und der Limes

$$x_1 := \lim_{t \to d} x(t) \in \Omega$$

existiert. Nach dem Satz 2.2 existert $d < d_1 \leq b$ und eine Lösung des Anfangswertproblems mit dem Anfangswert $x(d) = x_1$, mit der wir den Definitionsbereich erweitern können, da die Limiten der Ableitung auf beiden Seiten existieren und übereinstimmen mit $F(x_0)$. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität. □

2.2 Lineare Systeme

Es sei A eine stetige Abbildung von (a, b) in die $n \times n$ Matrizen und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Der Einfachheit halber betrachten wir$(a, b) = \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x(0) = x_0$$

hat eine eindeutige lokale Lösung nach dem Satz von Picard-Lindelöf. Es gilt

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = 2x^t(t)A(t)x(t)$$

Mit

$$c_T = \sup_{-T \leq t \leq T} \|A\|$$

ist

$$\frac{d}{dt} e^{-2c_T t}|x(t)|^2 \leq 0$$

und daher auf $(c,d) \cap [0,T]$

$$|x(t)| \le e^{c_T t}|x_0|$$

Nach Satz 2.4 existiert die Lösung auf $[0,T]$ für jedes T. Für negative Zeiten argumentieren wir genauso.

Lemma 2.5. *Die Raum der Lösungen der homogenen Gleichung*

$$\dot{x} = Ax$$

ist ein linearer Vektorraum der Dimension n. Ist $f \in C((a,b);\mathbb{R}^n)$ so ist die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$\dot{x} - Ax = f$$

eine Lösung der homogenen Gleichung. Ist $\tilde{x}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung so läßt sich jede andere Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe von $\tilde{x}$ und einer Lösung der homogenen Gleichung schreiben.

Wir versuchen die Lösung für konstantes A mit einem Iterationsverfahren zu konstruieren, beginnend mit $x(t) = x_0$ und

$$\dot{x}^{j+1} = Ax^j, \qquad x^{j+1}(0) = x_0.$$

Diese Gleichung können wir rekursiv integrieren.

$$\begin{aligned} x^j(t) =& x_0 + \int_0^t Ax^{j-1}(s)ds \\ =& x_0 + \int_0^t A\left(x_0 + \int_0^{t_1} A\left(x_0 + \int_0^{t_2} \dots x_0 + \int_0^{t_j} Ax_0\right)\dots\right) \\ =& x_0 + tAx_0 + \frac{1}{2}t^2A^2x_0 + \dots + \frac{1}{j!}t^jA^jx_0 \\ =& \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{l!}(tA)^l x_0 \end{aligned}$$

Satz 2.6. *Die Folge $x_j(t)$ konvergiert gleichmässig mit allen Ableitungen auf kompakten Intervallen gegen die eindeutige Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems. Die Abbildung $x_0 \to x(t)$ ist linear. Wir bezeichnen diese linear Abbildung mit e^{tA} und die Lösung des Anfangswertproblems mit*

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Beweis. Die gleichmässige Konvergenz der Folge

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{(tA)^j}{j!}$$

zusammen mit allen Ableitungen auf kompakten Intervallen sieht man genauso wie bei der Exponentialfunktion da

$$\|A^j\| \leq \|A\|^j.$$

Damit dürfen wir termweise ableiten und erhalten

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

und e^{tA} ist eine matrixwertige Lösung des Anfangswertproblems mit

$$e^{0A} = 1.$$

Ist

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

so folgt

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

und

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^{j} \frac{(tA)^i}{i!}x_0 \to x(t)$$

konvergiert gleichmässig mit allen Ableitungen auf kompakten Intervallen. □

19.04.16

Wir betrachten wieder die homogene Gleichung

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Insbesondere erhalten wir genau eine Lösung $x_j(t)$ zu den Anfangswerten $x_0 = e_j$, wobei e_j der j-te Einheitsbasisvektor ist. Wir definieren die matrixwertige Abbildung $U(t)$, die $x_j(t)$ als j-ten Spaltenvektor besitzt.

Die Familie $U(t)$ heißt Fundamentallösung. Sie genügt der Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{U} = AU, \qquad U(0) = 1_{\mathbb{R}^n}.$$

Definition 2.7. *Ist $V \in C(a,b;\mathbb{R}^{n\times n})$ eine matrixwertige Funktion so heißt*

$$w(t) = \det U(t)$$

Wronskideterminante.

Lemma 2.8. *Die Wronskideterminante $w = \det U(t)$ genügt der Gleichung*

$$\dot{w} = \operatorname{tr} A(t)w(t).$$

Insbesondere ist w nie Null und damit U invertierbar.

Beweis. Die Abbildung $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ ist analytisch, genauer ein Polynom in den Einträgen, das affin in jedem Eintrag ist. Die Ableitung in der Identität in Richtung B ist $\operatorname{tr} B$ da

$$\det(1_{\mathbb{R}^n} + B) - \prod(1 + b_{jj}) = O(\|B\|^2)$$

d.h. es existierten $\varepsilon > 0$ and $C > 0$ so dass

$$\left|\det(1_{\mathbb{R}^n} + B) - \prod(1 + b_{jj})\right| \le C\|B\|^2$$

für $\|B\| \le \varepsilon$. Dann folgt aber auch

$$\det(1 + B) - (1 + \operatorname{tr} B) = O(\|B\|^2)$$

und damit

$$D \det A|_{1_{\mathbb{R}^n}}(B) = \operatorname{tr} B.$$

In einer Umgebung der invertierbaren Matrix A_0 gilt

$$\det A = \det(AA_0^{-1}) \det A_0$$

und damit

$$D \det A|_{A_0}(B) = \operatorname{tr}(BA_0^{-1}) \det A_0$$

Es folgt

$$\frac{d}{dt} \det U(t) = \operatorname{tr}(\dot{U}(t)U^{-1}(t)) \det U(t) = \operatorname{tr}(A(t)) \det U(t)$$

und damit die Aussage. □

Dann genügt die matrixwertige Funktion

$$V(t) := U(t)U(s)^{-1}$$

dem Anfangswertproblem

$$\dot{V} = AV, \qquad V(s) = 1_{\mathbb{R}^n}.$$

Lemma 2.9. *Die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

ist durch die Variation der Konstanten

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t)U(s)^{-1} f(s) ds$$

gegeben, wobei das Integral komponentenweise definiert ist.

Beweis. Wir müssen lediglich die Ableitung nachrechnen.

$$\dot{x} = AU(t)x_0 + f(t) + A\int_{t_0}^{t} U(t)U(s)^{-1}f(s)ds = Ax + f.$$

□

Bemerkung: Wir können mit komplexen Gleichungen und Lösungen arbeiten.

2.2.1 Die Matrixexponentialfunktion

Aus $AB = BA$ folgt

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

Sei S eine invertierbare $n \times n$ Matrix, und A eine beliebige $n \times n$ Matrix. Da

$$(SAS^{-1})^j = SA^j S^{-1}$$

folgt

$$Se^{tA}S^{-1} = e^{tSAS^{-1}}.$$

Die Jordansche Normalform kontruiert eine 'gute' Basis mit Hilfe des Basiswechsels S,

$$A = SJS^{-1}$$

Ist A diagonalisierbar so besteht S aus den Eigenvektoren. Für allgemeine Matrizen sind die Einträge verallgemeinerte Eigenvektoren, d.h. $(A - \lambda \mathrm{Id})^k v = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Matrix $J = S^{-1}AS$ besteht aus Jordanblöcken. Da trivialerweise

$$e^{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix}$$

genügt es für die Exponentialfunktion einer deratigen Blockdiagonalmatrix die Exponentialfunktion der Blöcke zu bestimmen.

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Da darüber hinaus die Einheitsmatrix mit allen Matrizen kommutiert können wir die Matrixexponentialfunktion für alle (komplexen) Jordanblöcke leicht bestimmen. Damit ergibt sich folgender Algorithmus für die Exponentialfunktion e^A

(i) Bestimme eine Jordanzerlegung $A = SJS^{-1}$

(ii) Berechne die Exponentialfunktion der Jordanblöcke.

(iii) Bestimme $S^{-1}e^J S$.

21.04.2016

2.3 Gleichungen höherer Ordnung

Gleichungen und Systeme höhere Ordnung können auf Systeme erster Ordnung reduziert werden. Genauer: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^{(j)} = f(t, x, x', \dots x^{(j-1)}).$$

Wir definieren

$$x_l = x^{(l)}$$

für $0 \leq l < j$. Dann ist die Gleichung equivalent zu

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(t, x_0, x_1 \dots x_{j-1}) \end{pmatrix}$$

und die Anfangswerte

$$x^{(l)}(t_0) = x_{0,l}$$

werden zu

$$x(t_0) = x_0.$$

Damit können wir die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf anwenden.

Genauso können wir lineare Gleichungen transformieren:

$$x^{(j)} = \sum_{l=0}^{j-1} a_i(t) x^{(i)} + f$$

ist äquivalent zu

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat der Vektorraum der Lösungen der homogenen Gleichung die Dimension n.

Im Fall konstanter Koeffizienten gibt es eine Besonderheit. Die Gleichung

$$x^{(j)} + \sum_{l=0}^{j-1} a_l x^{(l)} = 0$$

hat genau dann eine Lösung der Form $e^{\lambda t} x_0$ wenn λ ein Eigenwert der Matrix A des Systems ist, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\lambda^j + \sum_{l=0}^{j-1} a_l \lambda^l = 0.$$

Der Exponent λ heisst dann charakteristischer Exponent mit Vielfachheit m wobei m die Vielfachheit der Nullstelle ist. Eine Basis des Raum der Lösungen ist dann

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots e^{\lambda_n t}, t^{m_n-1} e^{\lambda_n t},$$

da

$$\left(\frac{d^j}{dx^j} + \sum_{i=1}^{j-1} a_i \frac{d^i}{dx^i} \right) u = \prod_n \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right)^{m_n} u$$

und für $i < m$

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^m \left(t^i e^{\lambda t} \right) = 0$$

Die zugehörigen Jordanblöcke haben die Dimension m_j. Dies sieht man für festes t in durch $t^j e^{\lambda_i t}$ definierten Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_i \\ \vdots \\ (n-1)\lambda_i^{n-2} \end{pmatrix}, \dots.$$

Beispiele:

2.3.1 Der harmonische Oszillator

$$\ddot{x} + x = 0$$

$\lambda = \pm i$. Eine Basis ist durch e^{it} und e^{-it} gegeben und eine reelle Basis durch

$$\cos t = \operatorname{Re} e^{it}, \sin t = \operatorname{Im} e^{it}.$$

Das zugehörige 2×2 System ist

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Eigenvektoren sind

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Sie definieren die Matrix S

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

mit inverser Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

2.3.2 Der anharmonische Oszillator

$$\ddot{x} = F(x)$$

wobei $F(x) = -V'(x)$ und V ist zweimal stetig differenzierbar, strikt konvex und koerziv, d.h. $V(x) \to \infty$ wenn $x \to \infty$. Das Anfangswertproblem hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine lokale Lösung zu gegebenen Anfangswerten

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1.$$

Wir definieren die Energie (als Summe der kinetischen und der potentiellen Energie)

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

und berechnen

$$\frac{d}{dt} E(x(t), \dot{x}(t)) = (\ddot{x} + F(x))\dot{x} = 0$$

und die Bahn $(x(t), \dot{x}(t))$ bewegt sich auf Niveaumengen der Energie E. Diese Niveaumengen sind kompakt. F hat genau eine Nullstelle, zu der eine stationäre Lösung gehört. Die Niveaumengen sind geschlossene Kurven.

2.4 Abhängigkeit von Parametern, Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf

Definition 2.10. *Sei X ein metrischer Raum. Wir bezeichnen den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf X mit $C_b(X)$ mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_{sup} = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Dabei erlauben wir Werte in einem Banachraum.

Der Raum $C_b(X)$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum. *Beweisskizze*

Zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf formulieren wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = F(t,x) \qquad x(t_0) = x_0$$

als Integralgleichung

$$y(t) = \int_{t_0}^t F(s, x_0 + y(s))ds,$$

mit $x(t) = y(t) + x_0$. Jede Lösung der Integralgleichung führt zu einem Fixpunkt der Abbildung

$$J : y \to \int_{t_0}^t F(s, x_0 + y(s))ds$$

und umgekehrt.

Dann existiert $R > 0$ so dass $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$. Auf $\overline{B_R(x)} \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ nimmt $|F|$ das Maximum M an. Notfalls durch Wahl einer kleineren Konstanten dürfen wir

$$\delta M \le R$$

annehmen. Ist

$$\|y\|_{C_b([t_0-\delta,t_0+\delta])} \le R$$

so ist auch

$$\| \int_{t_0}^t F(s, x_0 + y(s))\|_{C_b([t_0-\delta,t_0+\delta])} \le R$$

und J bildet $X = \overline{B_R(0)}$ in $C_b([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ auf sich selbst ab.

Sei L die Lipschitzkonstante auf der kompakten Menge

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B_R(0)}$$

Dann ist

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, x_0 + y_1(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, x_0 + y_2(s))ds \right| \le \delta L \|y_2 - y_1\|_{C_b([t_0-\delta,t_0+\delta])}$$

und wir dürfen (nach Wahl eines kleineren $\delta > 0$ falls notwendig) annehmen, dass $\delta L < 1$. Dann folgt

$$\left\| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, y_2(s))ds \right\|_{C_b([t_0-\delta, t_0+\delta])} \leq \delta L \|y_2 - y_1\|_{C_b([t_0-\delta, t_0+\delta])}$$

und die Abbildung J ist eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein eindeutiger Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist eine Funktion der Integralgleichung, und daher stetig differenzierbar. Mit einer Anwendung des Hauptsatzes sehen wir, dass wir eine Lösung der Differentialgleichung erhalten.

Wir betrachten nun eine Familie von Differentialgleichungen. Seien

$$\Lambda \subset \mathbb{R}^m, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \qquad (a, b)$$

offen, $\lambda_0 \in \Lambda$, $t_0 \in (a, b)$ und $x_0 \in \Omega$

$$F \in C(\Lambda \times (a, b) \times \Omega; \mathbb{R}^n)$$

lokal Lipschitz stetig in x, d.h. für kompakte Mengen $K \subset \Lambda \times (a, b) \times \Omega$ existiert ein L so dass

$$|F(\lambda, t, x) - F(\lambda, t, y)| \leq L|x - y|.$$

Mit der obigen Konstruktion existieren $a < b < t_0 < d < c$ und $r > 0$ so dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = F(\lambda, t, x), \qquad x(t_0) = \tilde{x}_0$$

mit $|\lambda - \lambda_0| < r$, $|\tilde{x}_0 - x_0| < r$ genau eine Lösung mit

$$\|x^\lambda - \tilde{x}_0\|_{C_b([c,d])} < r$$

besitzt.

Seinen nun $\lambda^1, \lambda^2 \in B_r(\lambda_0)$, $x_0^1, x_0^2 \in B_r(x_0)$ und x^{λ_j} die Lösung mit Anfangswerten x_0^j. Die Differenz $y = x^{\lambda_2} - x^{\lambda_1}$ genügt der Gleichung

$$\begin{aligned} y(t) =& x_0^2 - x_0^1 + \int_{t_0}^t F(\lambda_1, s, x^{\lambda_2}(s)) - F(\lambda_1, s, x^{\lambda_1}(s))ds \\ &+ \int_{t_0}^t (F(\lambda_2, s, x^{\lambda_2}(s)) - F(\lambda_1(\lambda_1, s, x^{\lambda_2}(s))ds \end{aligned} \tag{2.2}$$

26.04.16

Lemma 2.11. *Die Abbildung*

$$B_r(\lambda_0) \times [a,b] \times B_r(x_0) \ni (\lambda, t, \tilde{x}_0) \to u^{\lambda,\tilde{x}_0}(t)$$

auf die Lösung mit Anfangswert $\tilde{x}_0$ ist stetig und Lipschitz stetig in t und x_0, d.h.

$$\sup \frac{|x^{\lambda,x_0^2}(t) - x^{\lambda,x_0^1}(s)|}{|x_0^2 - x_0^1| + |t-s|} + \sup \frac{|\dot{x}^{\lambda,x_0^2}(t) - \dot{x}^{\lambda,x_0^1}(t)|}{|x_0^2 - x_0^1|} < \infty.$$

Ist F zusätzlich lokal Lipschitzstetig in λ so ist die obige Abbildung Lipschitzstetig in allen Ableitungen.

Beweis. Nach der lokalen Lipschitzstetigkeit existiert ein $L > 0$ sodass

$$|F(\lambda_1, s, x^{\lambda_2}(s)) - F(\lambda_1, s, x^{\lambda_1}(s))| \leq L|y|$$

und damit

$$|y(t)| \leq L|t-t_0| \left(|x_0^2 - x_0^1| + \int_a^b |(F(\lambda_2, s, x^{\lambda_2}(s)) - F(\lambda_1(\lambda_1, s, x^{\lambda_2}(s))ds \right). \tag{2.3}$$

Da F stetig ist, ist es auf kompakten Mengen gleichmässig stetig. Daher existiert für $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass

$$|F(\lambda_2, s, x) - F(\lambda_1(\lambda_1, s, x(s))| < \varepsilon$$

für $|\lambda_2 - \lambda_1| < \delta$. Nach Konstruktion dürfen wir annehmen dass $L(d-c) \leq \frac{1}{2}$ und damit

$$\begin{aligned} \|y\|_{C_b([c,d])} &\leq |x_0^2 - x_0^1| + \varepsilon \\ \|\dot{y} - F(\lambda_2, s, x_0)\|_{C_b([c,d])} &\leq C|x_0^2 - x_0^1| + \varepsilon \end{aligned}$$

woraus Stetigkeit und Lipschitzstetigkeit in $\tilde{x}_0$ folgen. Die Lipschitzstetigkeit in t folgt aus der Beschränktheit von F auf kompakten Mengen. $\square$

Wir betrachten nun höhere Regularität.

Satz 2.12. *Die Funktion*

$$F : \Lambda \times (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

sei stetig und für festes t k mal stetig differenzierbar nach λ und x mit stetigen Ableitungen in $\Lambda \times (a,b) \times \Omega$. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$ und

$$x \in C^1((a,b);\Omega)$$

sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = F(\lambda_0, t, x).$$

Sei $a < c < t_0 < d < b$. Dann existiert $r > 0$ so dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}^\lambda = F(\lambda, t, x^\lambda), \qquad x^\lambda(t_0) = \tilde{x}_0$$

mit $|\tilde{x}_0 - x| < r$, $|\lambda - \lambda_0| < r$ eine eindeutige Lösung auf $[c, d]$ hat. Für festes t ist die Abbildung

$$B_r(\lambda_0) \times B_r(x(t_0)) \ni (\lambda, \tilde{x}^0) \to (x^{\lambda, \tilde{x}_0}(t), \dot{x}^{\lambda, \tilde{x}_0}(t))$$

k mal stetig differenzierbar. Die Ableitungen sind stetig in

$$B_r(\lambda_0) \times [c, d] \times B_r(x_0).$$

Beweis. Wir bemerken dass wir zunächst die Aussage in Lemma 2.11 mit dem im wesentlichen gleichen Beweis in dem größeren Intervall (c, d) des Satzes bekommen. Da die Menge

$$\{(\lambda_0, t, x(t)) : c \le t \le d\}$$

kompakt ist, existiert eine Umgebung auf der die Lipschitzkonstante beschränkt ist und damit ein r für das für $|y| < r$ und $|\lambda - \lambda_0| \le r$

$$\{(t, x(t) + y) : c \le t \le d\}$$

in dieser Menge ist. Wir verwenden nun die Abschätzung (2.3) rekursiv auf kleinen Intervallen und bekommen die gleiche Aussage mit einer schlechteren Konstanten.

Wir zeigen die Aussage zunächst für $k = 1$, $m = 1$ und für einen festen Anfangswert.

Formal können wir die Gleichung nach λ differenzieren falls die Aussage des Satzes wahr ist.

Sei $y = \frac{dx}{d\lambda}|_{\lambda_0}$. Dann gilt

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda_0, t, x^{\lambda_0}) + D_x F(\lambda_0, t, x^{\lambda_0}) y, \qquad y(t_0) = 0. \tag{2.4}$$

Sei $y^h = \frac{1}{h}(x^{\lambda_0 + h} - x^{\lambda_0})$ mit $h \ne 0$ klein. Es genügt der Differentialgleichung

$$\dot{y}^h = \frac{1}{h}(F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0 + h}) - F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0})) + \frac{1}{h}(F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0}) - F(\lambda_0, t, x^{\lambda_0})). \tag{2.5}$$

Es gilt

$$f_h(t) := \frac{1}{h}(F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0}) - F(\lambda_0, t, x^{\lambda_0})) \to \frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda_0, t, x^{\lambda_0}) =: f(t)$$

und

$$\frac{1}{h}(F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0 + h}) - F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0})) = A_h y^h$$

mit

$$A_h(t) := \int_0^1 D_x F(\lambda_0 + h, t, x^{\lambda_0} + \mu(x^{\lambda_0+h} - x^\lambda))d\mu \to D_x F(\lambda_0, t, x^\lambda)$$

Wir schreiben (2.5) bzw (2.4) als

$$\dot y^h = A_h y^h + f_h \qquad \dot y = Ay + f$$

mit dem Anfangswert 0. Damit konvergiert die Differentialgleichung (2.5) gegen (2.4) und mit Lemma 2.11 konvergieren die Lösungen $y^h \to y$ und $\dot y^h \to \dot y$. Für die Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert argumentieren wir genauso.

Die Gleichung (2.4) hängt stetig von λ ab. Damit erhalten wir die Stetigkeit der Richtungsableitungen in Richtungen im Parameterraum, und Differenzierbarkeit. Im allgemeinen Fall $m \geq 1$ erhalten wir die stetige Differenzierbarkeit der partiellen Ableitungen. Nun gehen wir rekursiv vor und wenden im Fall $k > 1$ die selben Argumente auf (2.4) an.

□

Insbesondere sind Lösungen auf dem maximalen Existenzintervall eindeutig.

Bemerkung: Wie beim Satz über implizite Funktionen und dem Satz von der Umkehrfunktion ist die Anwendung suggestiv: Wenn die Vorausstzungen vorliegen differenziert man die Gleichung und betrachtet das Ergebnis.

Beispiel:

$$\dot x = x^2, \qquad x(0) = a$$

2.5 Differentialungleichungen, die Gronwallungleichung

Lemma 2.13. *Die Funktion F sei stetig, Lipschitzstetig in x auf kompakten Mengen und monoton wachsend in x. Es gelte*

$$y(t) \leq \int_0^t F(s, y(s))ds$$

und

$$x(t) = \int_0^t F(t, x(s))ds$$

auf (a, b). Dann ist $y(t) \leq x(t)$.

Beweis. Sei x^ε die Lösung auf einem möglicherweise kleineren Zeitintervall von

$$\dot x^\varepsilon = F(t, x^\varepsilon), \qquad x^\varepsilon(0) = \varepsilon$$

Sei $[0, t_1)$ ein Intervall, in dem $y(t) < x^\varepsilon(t)$. Es folgt

$$y(t) - x^\varepsilon(t) \leq \int_0^t F(s, y(s)) - F(s, x(s))ds - \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Damit folgt $y(t_1) \leq x(t_1) - \varepsilon$ und t_1 ist nicht maximal. Also ist $y(t) \leq x^\varepsilon(t)$ und damit $y(t) \leq x(t)$. Nach Lemma 2.11 (siehe Diskussion im Beweis von Satz 2.12) existiert for jedes $T < b$ ein $\varepsilon > 0$ so dass x^ε auf $[0, T]$ definiert ist und $x^\varepsilon \to x$. □

Lemma 2.14. *Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ and*

$$\langle F, x \rangle \leq 1 + |x|^2$$

Dann ist das maximale Existenzintervall jeder Lösung von

$$\dot{x} = F(x)$$

ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. Auf dem Existenzintervall gilt mit $y(t) = |x(t)|^2 - |x(t_0)|^2$ wobei t_0 ein fester Punkt des Existenzintervalls ist:

$$\dot{y} = 2\langle x, \dot{x} \rangle = 2\langle x, F(x) \rangle \leq 2(1 + y)$$

und damit

$$y(t) \leq 2 \int_{t_0}^t 1 + y(s) + |x(t_0)|^2 ds$$

Das Anfangswertproblem

$$\dot{z} = 2(1 + |x(t_0)|^2 + z), \quad z(0) = 0$$

hat die Lösung (für $t \geq t_0$, mit Variation der Konstanten)

$$z(t) = 2(1 + |x(t_0)|^2) \int_{t_0}^t e^{2(t-s)} ds.$$

Damit folgt mit Lemma 2.13 (mit einer Verschiebung in t)

$$|x(t)|^2 \leq z(t) + |x(t_0)|^2.$$

Damit ist $|x(t)|$ auf jedem Intervall beschränkt, was nach Satz 2.4 globale Existenz impliziert. □

29.04.2016

2.6 Das Randwertproblem, Sturm-Liouvilleprobleme

Beispiel:

$$-\ddot{x} = \lambda x, \qquad x(0) = x(1) = 0$$

Seien $f, V \in C([0,1];\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir betrachten das inhomogene Randwertproblem

$$-\ddot{x} + V(t)x - \lambda x = f, \qquad x(0) = x(1) = 0 \tag{2.6}$$

Ist $f = 0$ so ist der Raum der Lösungen ein eindimensionaler Vektorraum: Sind x und y nichttriviale Lösungen des Randwertproblems so ist auch $z = ax + by$ eine Lösung mit

$$z(0) = 0, \dot{z}(0) = a\dot{x}(0) + b\dot{y}(0).$$

Dann existieren aber a, b nicht beide Null, so dass $\dot{z}(0) = 0$. Da die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist folgt $ax+by = 0$ in $[0,1]$. Damit sind die beiden Lösungen linear abhängig.

Die Liouvilleidentität

$$x(-\ddot{y} + Vy) - (-\ddot{x} + V(x))y = \frac{d}{dt}(\dot{x}y - x\dot{y}) \tag{2.7}$$

folgt mit einer einfachen Rechnung. Sei x eine Lösung der homogenen Gleichung und $y = \bar{x}$. Dann folgt

$$\operatorname{Im}\lambda \int_0^1 |x|^2 dt = 0$$

und λ ist entweder reell, oder es gibt nur die triviale Lösung.

Satz 2.15. *Das Problem* (2.6) *hat genau dann eine Lösung wenn*

$$\int fy dt = 0$$

für jede Lösung y der homogenen Gleichung. Die Lösung ist eindeutig wenn die homogene Gleichung nur die triviale Lösung besitzt.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die homogene Gleichung nur die triviale Lösung besitzt. Ohne Berücksichtigung der Randwerte hat der Raum der Lösungen der homogenen Gleichung die Dimension 2. Wir wählen eine Basis u, v, was auch Fundamentalsystem genannt wird. Die Wronskideterminante

$$J(t) = \det\begin{pmatrix} u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} = u\dot{v} - \dot{u}v$$

ist nach der Liouvilleidentität konstant. Da das homogene Randwertproblem keine nichttriviale Lösung besitzt dürfen wir $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1$ und $v(1) =$

0, $\dot{v}(1) = 1$ wählen. Dann ist aber $J(t) \neq 0$, da sonst $v(0) = 0$ folgen würde, und die Lösungen linear abhängig wären. Dann ist aber auch $u(1) \neq 0$.

Sei y die Lösung mit den Anfangswerten $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Die allgemeine Lösung hat die Form

$$x(t) = \tilde{x} + au(t) + bv(t).$$

Wir wählen $a = -\tilde{x}(1)/u(1)$ und $b = -\tilde{x}(0)/v(0)$. Da die Differenz zweier Lösungen die homogene Gleichung lößt, diese aber nur die triviale Lösung besitzt folgt die Eindeutigkeit.

Sei jetzt y eine nichttriviale Lösung des homogenen Randwertproblems, und x eine Lösung des inhomogenen Problems. Dann ist $\lambda = 0$ und wir können reelle Lösungen betrachten. Mit der Liouvilleidentität und Integration folgt

$$\int_0^1 fydt = 0.$$

Sei jetzt $\int_0^1 fydt = 0$ und x die Lösung des Anfangswertproblems mit

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

Wieder mit der Liouvilleidentität und Integration folgt

$$x(1)\dot{y}(1) = 0$$

und x ist eine Lösung des inhomogenen Randwertproblems.

□

Definition 2.16. *Der Wert λ heißt Eigenwert von $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ falls ein nicht identisch verschwindendes $x \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ mit $x(0) = x(1) = 0$ existiert, dass das Randwertproblem löst. x heißt dann Eigenfunktion.*

Satz 2.17. *Eigenfunktionen x, y zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sind orthogonal in dem Sinn dass*

$$\int xydt = 0$$

Beweis. Wieder mit der Liouvilleidentität

$$(\lambda - \mu) \int_0^1 xy\,dt = 0$$

□

Eigenfunktionen haben höchstens einfache Nullstellen, und sie ändern daher das Vorzeichen in jeder Nullstelle.

Das Verhalten der Nullstellen der Eigenfunktionen ist interessant.

Satz 2.18. *Seien $x, y \in C^2([a,b])$, $y(a) = y(b) = 0$, $y \geq 0$ und*

$$-\ddot{x} + Vx - \lambda x = 0 \qquad -\ddot{y} + Vy - \lambda y < 0$$

Dann hat x eine Nullstelle in (a,b).

Beweis. Wir nehmen an x habe keine Nullstelle in (a,b) und ohne Einschränkung sei $x > 0$ auf $[a,b]$. Nach de l'Hopital ist $z = y/x \in C([a,b])$ und

$$\begin{aligned}
\ddot{z} =& \frac{d}{dt}(\frac{\dot{y}}{x} - \frac{y}{x}\frac{\dot{x}}{x}) \\
=& \frac{\ddot{y}}{x} - 2\frac{\dot{y}\dot{x}}{x^2} + 2\frac{y(\dot{x})^2}{x^3} - \frac{y}{x}\frac{\ddot{x}}{x} \\
>& (\lambda - V)\frac{y}{x} - (\lambda - V)\frac{y}{x} - 2\frac{\dot{x}}{x}\frac{d}{dt}\frac{y}{x} \\
=& -2\frac{\dot{x}}{x}\dot{z}
\end{aligned}$$

auf (a,b). Dann hat z kein inneres Maximum und nimmt das Maximum entweder in a oder b an. Wir nehmen an dass $z(a)$ das Maximum ist. Dann ist $x(a) = 0$ da sonst $z(a) = 0$ ist, was nicht das Maximum sein kann.

Da $\ddot{x}(a) = 0$ nach der Gleichung und $\ddot{x}(a) > 0$ ist folgt nach d'Hopital

$$\ddot{z}(a) > 0$$

Das ist ein Widerspruch. □

Korollar 2.19. *Sei $\lambda > \mu$ und*

$$-\ddot{x} + Vx = \lambda x \qquad -\ddot{y} + Vy = \mu y.$$

Dann liegt zwischen je zwei Nullstellen von y eine von x. Ist $h > 0$ und

$$\lambda > \sup V + \frac{\pi^2}{h^2} \tag{2.8}$$

so enthält jedes Intervall der Länge h eine Nullstelle von x. ist

$$\lambda \leq \inf V + \frac{\pi^2}{h^2} \tag{2.9}$$

so ist der Abstand der Nullstellen von x mindestens h

Beweis. Die erste Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz 2.18. Sei (a,b) ein Intervall der Länge h. Dann genügt

$$y = \sin(\pi\frac{x-a}{h})$$

$$-\ddot{y} - \frac{\pi^2}{h^2} y = 0$$

und damit

$$-\ddot{y} + Vy - \lambda y = (\frac{\pi^2}{h^2} + V - \lambda) y < 0$$

und die Aussage folgt unmittelbar. Im dritten Fall vertauschen wir die Rollen von x und y. $\square$

03.05.2016

Satz 2.20. *Alle Eigenwerte sind reell und diskret, d.h. sie haben keinen Häufungspunkt. Sie lassen sich zu einer monoton gegen unendlichen gehenden Folge $\lambda_j \to \infty$ anordnen. Die Eigenfunktionen zu λ_j haben $j-1$ Nullstellen in $(0,1)$.*

Beweis. Wir haben gesehen, dass alle Eigenwerte reell sind.

Nach Korollar 2.19 (iii) ist jeder Eigenwert $\geq \inf V + \pi^2$. Wir definieren x^λ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}^\lambda - Vx^\lambda - \lambda x = 0 \qquad x^\lambda(0) = 0, \qquad \dot{x}^\lambda(0) = 1.$$

Sei $\lambda < \mu$ und $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_j < 1$ die Nullstellen von x^λ und $0 < s_1 < \cdots < s_l < 1$ die Nullstellen von x^μ. Nach Korollar 2.19 (i) ist $0 < s_1 < t_1$. Induktiv sehen wir: $s_i < t_i$ für $1 \leq i \leq j$. Sei $N(\lambda)$ die Anzahl der Nullstellen in $(0,1]$. Damit ist $N(\mu) \geq N(\lambda)$ und $N(\mu) > N(\lambda)$ falls λ ein Eigenwert ist.

Wir nehmen nun an, V sei als beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert. Dann sind die Funktionen x^λ auf $[0,\infty)$ definiert. Sei jetzt λ ein Eigenwert, also $x^\lambda(1) = 0$ und $t_{j+2} > 1$ die nächste Nullstelle. t^μ_{j+2} ist eine stetige monoton fallende Funktion des Eigenwerts μ. μ ist kein Eigenwert solange $t^\mu_{j+2} > 1$ ist. Damit existiert ein Intervall $(\lambda, \lambda+\varepsilon)$ so dass $x^\mu(1) \neq 0$ für $\mu \in (\lambda, \lambda+\varepsilon)$. Damit ist für diese μ $N(\mu) = N(\lambda) + 1$. Genauso sehen wir: Ist λ kein Eigenwert, also $x^\lambda(1) \neq 0$, so existiert ein Intervall $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ auf dem $N(\lambda)$ konstant ist. Damit sind die Eigenwerte diskret.

Nach dem dritten Teil von Korollar 2.19 gilt $N(\lambda) \to \infty$ für $\lambda \to \infty$. Insbesondere hat die erste Eigenfunktion keine Nullstelle, und die j-te Eigenfunktion $j-1$ Nullstellen. $\square$

3 Harmonische Funktionen und die Poisson Gleichung

3.1 Maß, Integration und der Satz von Gauß

In diesem Abschnitt betrachten wir Grundlagen aus der Analysis I-III.

(i) Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist eine Menge X mit einer Sigmaalgebra $\mathcal{A}$ von Mengen von X und einem Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

(ii) Eine meßbare Funktion ist eine Abbildung $X \to [-\infty, \infty]$ für die $\{x : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Für nichtnegative meßbare Funktionen g ist das Integral durch

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt$$

definiert. Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, wenn $\int |f| d\mu < \infty$. In diesem Fall definieren wir

$$\int_X f d\mu = \int_X \max\{f, 0\} d\mu - \int_X \max\{-f, 0\} d\mu.$$

Das Integral ist linear, additiv in der Integrationsmenge und es gelten eine Reihe von Konvergenzsatz: Satz Beppo Levi, Lemma von Fatou und der Konvergenzsatz von Lebesgue.

(iv) Das Lebesguemaß $\mathcal{L}^n$ ist das eindeutig bestimmte vollständige Maß auf $\mathbb{R}^n$, das translationsinvariant ist, das auf jeder offenen Menge (und daher auf jeder Borelmenge) definiert ist, mit $\mu([0,1)^n) = 1$.

(v) Es gilt

$$\mathcal{L}^n(B_R(0)) = R^n \mu(B_1(0))$$

(vi) Ist f integrierbar auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ so ist $x_2 \to f(x_1, x_2)$ für fast jedes x_1 integrierbar, $x_1 \to \int f(x_1, x_2) d\mathcal{L} n_2$ ist integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1, x_2) d\mathcal{L}^{n_2}(x_2) d\mathcal{L}^{n_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2) d\mathcal{L}^n(x_1, x_2)$$

(vii) Mit diesen Eigenschaften läßt sich das Maß der Einheitskugel bestimmen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-|x_1|^2} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-|x_2|^2} d\mathcal{L}^{n_2}(x_2) d\mathcal{L}^{n_1}(x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-|x_1|^2} d\mathcal{L}^{n_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-|x_2|^2} d\mathcal{L}^{n_2}(x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d\mathcal{L}^n(x) = \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{x : e^{-|x|^2} > t\}) &= \int_0^1 \mathcal{L}^n(B_{(-\ln t)^{\frac{1}{2}}}(0)) dt \\ =& \mathcal{L}^n(B_1(0)) \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{n}{2}} dt \\ =& \mathcal{L}^n(B_1(0)) \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s} ds \\ =& \mathcal{L}^n(B_1(0)) \Gamma(\frac{n+2}{2})\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx = \pi, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}},$$

$$\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}.$$

(viii) Die Transformationsformel. Ist $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv so gilt

$$\int_{\phi(U)} f(y) d\mathcal{L}^n(y) = \int_U f \circ \phi(y))| \det D\phi(x)| dx \tag{3.1}$$

(ix) Hausdorffmaß und Integration über Untermannigfaltigkeiten. Das s dimensionale Hausdorffmaß $\mathcal{H}^s$ ist ein translationsinvariantes Maß auf den Borelmengen. Im Fall $s = n$ stimmt es mit dem Lebesguemaß überein. Auf m dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M^m ist die Einschränkung ein Maß auf der Untermannigfaltigkeit, das ein Integral

$$\int_{M^m} f d\mathcal{L}^m$$

definiert.

(x) Die Areaformel. Ist $\phi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ injektiv so gilt

$$\int_{\phi(U)} f \circ \phi d\mathcal{H}^m = \int_U f \circ \phi (\det D\phi^T D\phi)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^m \tag{3.2}$$

Damit kann man das Maß des Einheitsballes mit Hilfe von Polarkoordinaten bestimmen.

(xi) Die Coareaformel. Ist $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $m \geq n$ so gilt

$$\int_U f(\det D\phi D\phi^T)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\phi^{-1}(t)} f(x) d\mathcal{H}^{m-n} d\mathcal{L}^n(t) \tag{3.3}$$

Genauer: Ist $f(\det D\phi D\phi^T)^{\frac{1}{2}}$ integrierbar, so ist für fast alle t f auf $\phi^{-1}(t)$ integrierbar.

Beispiel: $m = n - 1$, $\phi(x) = |x|$, $D\Phi D\Phi^T = 1$ und

$$\mathcal{L}^n(B_1(0)) = \int_0^1 \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_t(0)) = \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \int_0^1 t^{n-1} dt \tag{3.4}$$

und daher

$$\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) = n\mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

Insbesondere ist die Länge des Einheitskreises 2π. Hier kann man alternativ Polarkoordinaten verwenden und erhält diese identität mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini.

(xii) Der Satz von Gauß. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge, deren Rand ∂U eine C^1 Untermannigfaltigkeit M^{n-1} enthält. Ω liege lokal immer auf einer Seite von M. Es gelte $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U) < \infty$ und $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U \backslash M^{n-1}) = 0$. Sei ν die äußere Einheitsnormale. Ist $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F$ integrierbar, so gilt

$$\int \operatorname{div} F d\mathcal{L}^n = \int_{M^{n-1}} F \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.5}$$

06.05.2016

Definition 3.1. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ mit $0 < \mu(E) < \infty$, u integrierbar. Dann definieren wir:*

$$⨍_E u \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u \, d\mu \,. \tag{3.6}$$

3.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

3.2.1 Definition

Definition 3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Die Funktion u heißt harmonisch wenn $\Delta u = 0$ auf Ω. Dabei $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$.*

Beispiele:

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Funktion $x \mapsto x \cdot Ax$ ist genau dann in $\mathbb{R}^n$ harmonisch, wenn $\operatorname{Tr} A = 0$. Insbesondere sind $x \mapsto x_1^2 - x_2^2$ und $x \mapsto x_1 x_2$ in $\mathbb{R}^n$ harmonisch.

(ii) $x \mapsto \ln|x|$ ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonisch, für $n \geq 3$ ist $x \mapsto |x|^{2-n}$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch.

3.2.2 Mittelwerteigenschaft

Satz 3.3 (Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$.*

(i) Falls $\Delta u = 0$ in Ω, dann gilt

$$u(x) = ⨍_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} = ⨍_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.7}$$

(ii) Falls $-\Delta u \leq 0$ in Ω, dann gilt

$$u(x) \leq ⨍_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.8}$$

und

$$u(x) \leq ⨍_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.9}$$

(iii) Falls $-\Delta u < 0$ in Ω, dann gilt

$$u(x) < \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.10}$$

und

$$u(x) < \fint_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.11}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst (3.8). Sei $\varphi : [0, r] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(\rho) = \fint_{\partial B_1(0)} u(x + \rho z) \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \tag{3.12}$$

definiert. Die Funktion φ ist stetig (Konvergenzsatz von Lebesgue), $\varphi(0) = u(x)$ und für $\rho > 0$ gilt

$$\varphi(\rho) = \fint_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \,. \tag{3.13}$$

Die Funktion φ ist in allen $\rho \in (0, r)$ differenzierbar (Differenzenquotient, Konvergenzsatz von Lebesgue), und

$$\frac{d}{d\rho}\varphi(\rho) = \fint_{\partial B_1(0)} Du(x + \rho z) \cdot z \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \tag{3.14}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{\partial B_1(0)} Du(x + \rho z) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \tag{3.15}$$

$$= \frac{\rho}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{B_1(0)} (\Delta u)(x + \rho z) \, d\mathcal{L}^n \geq 0 \,. \tag{3.16}$$

Hier wurde den Satz von Gauß benutzt, und

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} D_i u(x + \rho z) = \rho \sum_i D_i D_i u(x + \rho z) = \rho \Delta u(x + \rho z) \tag{3.17}$$

gerechnet. Aus $-\Delta u \leq 0$ folgt, dass φ monoton wachsend ist. Da φ stetig ist, folgt $u(x) = \varphi(0) \leq \varphi(r)$ und (3.8) ist bewiesen.

(3.9) folgt mit der Coareaformel (3.4)

$$\int_{B_r(x)} u d\mathcal{L}^n = \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u d\mathcal{H}^{n-1}$$

Der Beweis impliziert (iii) indem wir jeweils $\leq$ durch $<$ ersetzen. Für (i) wenden wir (ii) auf u und $-u$ an. $\square$

Satz 3.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Die drei Eigenschaften* *(i) u ist harmonisch, d.h.,*

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega\,, \tag{3.18}$$

(ii) u erfüllt die sphärische Mittelwerteigenschaft, d.h.,

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.19}$$

für alle (x, r) mit $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$,

(iii) u erfüllt die Kugelmittelwerteigenschaft, d.h.,

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \tag{3.20}$$

für alle Kugel $B_r(x) \subset \Omega$,

sind äquivalent.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii) folgt aus Satz 3.3.

(ii)$\Rightarrow$(iii) folgt aus

$$\int_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n = \int_{[0,r]} \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) d\mathcal{L}^1(\rho) \tag{3.21}$$

$$= \int_{[0,r]} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\rho(x)) u(x) d\mathcal{L}^1(\rho) = u(x)\mathcal{L}^n(B_r(x))\,. \tag{3.22}$$

(vgl. (3.4)) .

(iii)$\Rightarrow$(i) wird durch Widerspruch bewiesen. Sei $x \in \Omega$, so dass $\Delta u(x) \neq 0$. Wir können oBdA annehmen, dass $\Delta u(x) > 0$ (sonst betrachten wir $-u$). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset \Omega$ und $\Delta u > 0$ in $B_r(x)$. Dann folgt aus Satz 3.3(iii), dass

$$u(x) < \fint_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n\,, \tag{3.23}$$

entgegen der Annahme. □

3.2.3 Regularität

Die Funktion f auf $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar. Damit ist auch

$$g(x) = f(1 - 4|x|^2)$$

beiliebg oft differenzierbar mit Träger $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$. Die Funktion g ist positiv im Inneren. Wir definieren

$$\eta(x) = \frac{g(x)}{\int g d\mathcal{L}^n}.$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, mit Träger in $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$, radial, radial fallend, mit Integral 1. Wir definieren die Funktion

$$\eta_r = r^{-n}\eta(x/r) \tag{3.24}$$

deren Integral wieder 1 ist.

Lemma 3.5. *Die Funktion u sei integrierbar und erfülle die Mittelwerteigenschaft, d.h.,*

$$u(x) = ⨍_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \tag{3.25}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Dann folgt

$$u(x) = (u * \eta_r)(x) \tag{3.26}$$

für alle $B_r(x) \subset \Omega$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
(u * \eta_r)(x) &= \int_\Omega u(y)\eta_r(x-y) \, d\mathcal{L}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \int_0^{\eta_r(x-y)} dt \, d\mathcal{L}^n(y) \\
&= \int_{\{(t,x):0\le t\le \eta_r(x-y)\}} u(y) d\mathcal{L}^{n+1}(y,t) \\
&= \int_0^\infty \int_{\{\eta_r(x-y)>t\}} u(y) d\mathcal{L}(y) dt \\
&= u(x) \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{y : \eta_r(x-y) > t\}) dt \\
&= u(x) \int \eta_r dy \\
&= u(x)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

wobei wir mehrfach Fubini und in der fünften Gleichung die Mittelwerteigenschaft verwendet haben. □

Satz 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar . Falls*

$$u(x) = ⨍_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \tag{3.28}$$

für alle Kugeln $B_r(x) \subset \Omega$, dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{3.29}$$

Insbesondere ist jede harmonische Funktion beliebig oft differenzierbar.

Beweis von Satz 3.6. Sei $x \in \Omega$, $r > 0$, so dass $B_{2r}(x) \subset \Omega$. Dann gilt

$$u(y) = \int_{B_{2r}(x)} u(z)\eta_r(z-y)dz \tag{3.30}$$

für alle $y \in B_r(x)$. Aus $\eta_r \in C_c^\infty$ folgt (mit Differenzenquotienten und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz) , dass u differenzierbar ist und

$$|\partial_i u(x)| = r^{-1}\left|\int_{B_r(x)} u(y)r^{-n}(\partial_i\eta)(\frac{x-y}{r})dy\right| \le r^{-1}\int |\partial_i\eta| d\mathcal{L}(y)\|u\|_{C_b(B_r(x))}. \tag{3.31}$$

Wir können das Argument iterieren und sehen, dass u beliebig oft differenzierbar ist. Insbesondere ist u zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Nach Satz 3.4 ist u harmonisch.

Da jede harmonische Funktion auf einer kleineren Menge integrierbar ist können wir die erste Aussage auf harmonische Funktionen anwenden.

□

Satz 3.7 (Liouville)**.** *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $M = \sup|u|(\mathbb{R}^n)$. Nach (3.31) gilt

$$|\partial_{x_i} u(x)| \le r^{-1}\int |\partial_{x_i}\eta| d\mathcal{L}\|u\|_{C_b(\mathbb{R}^n)}.$$

Da r beliebig ist, folgt $Du(x) = 0$. □

3.2.4 Maximumprinzip

Definition 3.8. *Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn für alle offene Mengen $A, B \subset U$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = U$ gilt: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.*

Bemerkung. Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn zu jedem Paar $x, y \in U$ eine Kurve $\varphi \in C^0([0,1], U)$ existiert, so dass $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$. Die Kurve darf auch in C^∞ gewählt werden. Jeder Punkt einer offenen Mengen liegt in einer maximalen zusammenhängenden offen Teilmenge. Derartige Teilmengen heißen Zusammenhangskomponenten.

Satz 3.9 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$, so dass*

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \text{ für alle } B_r(x) \subset \Omega \,. \tag{3.32}$$

Dann gilt

$$u(x) \leq \max u(\partial\Omega) \qquad \text{für alle } x \in \Omega$$

Insbesondere nehmen harmonische Funktionen das Maximum auf dem Rand an.

Beweis. Das ist eine Konsequenz der Mittelwerteigenschaft. Sei x_0 im Inneren an dem ein Maximum angenommen wird. Nach der Mittelwerteigenschaft gilt

$$u(x_0) \leq \fint_{B_r(x_0)} u(y) d\mathcal{L}^n = u(x_0) + \int_{B_r(x_0)} (u(y) - u(x_0)) d\mathcal{L}^n$$

und damit

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x_0)| d\mathcal{L}^n = 0$$

Insbesondere gilt das auch für den maximalen Ball in Ω, der den Rand berührt. Aufgrund der Stetigkeit folgt die Behauptung. □

10.05.2016

Bemerkung. Falls u harmonisch ist, dann gilt auch

$$\min u(\overline{\Omega}) = \min u(\partial\Omega) \,. \tag{3.33}$$

Satz 3.10 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, so dass*

$$\Delta u = \Delta v \text{ in } \Omega \tag{3.34}$$

$$u = v \text{ auf } \partial\Omega \,. \tag{3.35}$$

Dann gilt $u = v$.

Beweis. Die Funktion $w = u - v$ ist harmonisch, und gleich null auf $\partial\Omega$. Deshalb gilt $w = 0$ in Ω. □

Satz 3.11 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend. Sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$, so dass*

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n \text{ für alle } B_r(x) \subset \Omega \,. \tag{3.36}$$

Dann gilt entweder

(i) $u(x) < \max u(\partial\Omega)$ für alle $x \in \Omega$

oder

(ii) Die Funktion u ist konstant auf Ω.

Bemerkung. Falls $u \in C^2(\Omega)$, dann kann die Annahme (3.36) durch $-\Delta u \leq 0$ in Ω ersetzt werden (Satz 3.3(ii)).

Beweis. Sei $M = \max u(\overline{\Omega})$, $V = \Omega \cap u^{-1}(M) = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$.

Sei $x \in V$, $B_r(x) \subset \Omega$. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt, $B_r(x) \subset V$. Deshalb ist V offen.

Da u stetig ist, ist auch die Menge $\Omega \setminus V = \{x \in \Omega : u(x) \neq M\}$) offen. Da Ω zusammenhängend ist, gilt $V = \emptyset$ (Option (i)) oder $V = \Omega$ (Option (ii)). □

Satz 3.12 (Harnack-Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, V offen, beschränkt, zusammenhängend, mit $\overline{V} \subset \Omega$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, so dass*

$$\sup u(V) \leq c \inf u(V) \tag{3.37}$$

für alle $u \in C^2(\Omega)$ die $\Delta u = 0$ und $u \geq 0$ auf Ω erfüllen.

Beweis. Die Menge $\overline{V}$ ist kompakt, deshalb gilt:

$$r = \frac{1}{4} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega) > 0\,. \tag{3.38}$$

Da $\overline{V}$ kompakt ist können wir es mit endlichen vielen Bällen $B_r(x_j)$, $1 \leq j \leq N$ überdecken. Wir betrachten zuerst zwei Punkte $x, y \in B_r(x_j)$, mit $|x - y| < r$. Aus der Mittelwerteigenschaft, $B_r(x) \subset B_{2r}(y) \subset \Omega$ und $u \geq 0$ folgt

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u \tag{3.39}$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(y)} u \tag{3.40}$$

$$= 2^n \fint_{B_{2r}(y)} u = 2^n u(y)\,. \tag{3.41}$$

Aus der Stetigkeit von u folgt die gleiche Aussage für

$$u(z) \leq 2^n u(w) \qquad \text{für } z, w \in \overline{B}_r(x_j) \cap V.$$

Seien $x, y \in V$. Dann gibt es eine Kurve $\varphi \in C^0([0,1]; V)$, die x und y verbindet. Die Menge $\varphi([0,1])$ auch diese N Bälle überdeckt. Es folgt

$$u(x) \leq 2^{Nn} u(y)\,. \tag{3.42}$$

□

Satz 3.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \mathbb{N} \to C^2(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen, die in $L^1(\Omega)$ eine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es $u_* \in L^1(\Omega)$, so dass:*

(i) $u_j \to u_*$ *in* $L^1(\Omega)$*;*

(ii) $u_* \in C^\infty(\Omega)$ *und* $\Delta u_* = 0$*;*

(iii) $D^\alpha u_j$ *konvergiert punktweise gegen* $D^\alpha u$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, insbesondere ist die Funktion* u_* *harmonisch.*

(iv) Falls $K \subset \Omega$ *kompakt ist und* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, dann konvergiert* $D^\alpha u_j \to D^\alpha u_*$ *gleichmäßig in* K*.*

Beweis. Sei $x \in \Omega$, $B_r(x) \subset \Omega$. Aus

$$|u_j - u_m|(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u_j - u_m|(y) dy \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \|u_j - u_m\|_{L^1(\Omega)} \quad (3.43)$$

folgt, dass $j \mapsto u_j(x)$ eine Cauchy-Folge ist (wir schreiben $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$). Wir definieren $u_*(x) = \lim u_j(x)$. Da u_j eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$ ist, gilt auch $u_j \to u_*$ in $L^1(\Omega)$.

Aus

$$u_*(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x) = \lim_{j\to\infty} \fint_{B_r(x)} u_j \, d\mathcal{L}^n = \fint_{B_r(x)} u_* \, d\mathcal{L}^n \quad (3.44)$$

folgt, dass u_* die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Deshalb (Satz 3.6) ist u_* harmonisch.

Sei $K \subset \Omega$ kompakt, $r = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Für alle $x \in K$ gilt $B_r(x) \subset \Omega$ und deshalb

$$|\partial^\alpha (u_j - u_*)|(x) \leq \frac{C_{n,\|\alpha\|}}{r^{n+\|\alpha\|}} \|u_j - u_*\|_{L^1(\Omega)} \, . \quad (3.45)$$

Es folgt, dass

$$\lim_{j\to\infty} \max_K |\partial^\alpha (u_j - u_*)| = 0 \, . \quad (3.46)$$

Das beendet den Beweis. □

Satz 3.14 (Weyl's Lemma)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* u *integrierbar. Falls*

$$\int u \Delta\varphi = 0 \quad (3.47)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*, dann gibt es* $\hat{u} \in C^\infty(\Omega)$ *mit* $\hat{u} = u$ *fast überall und*

$$\Delta \hat{u} = 0 \text{ in } \Omega \, . \quad (3.48)$$

Beweis. Sei η_r wie in Lemma 3.5, $B = B_R(x_*)$ eine Ball mit $\overline{B_{2R}(x_*)} \subset \Omega$.

Wir definieren, für $r \in (0, R)$, $u_r = u * \eta_r \in C^\infty(B)$. Dann

$$\Delta u_r(x) = \Delta(u * \eta_r) = u * (\Delta\eta_\varepsilon) = \int u(y) \Delta\eta_r(x-y) d\mathcal{L}^n = 0 \quad (3.49)$$

Deshalb $\Delta u_r = 0$. Da $u_r \to u$ in L^1, folgt die Aussage aus Satz 3.13. □

Wir zeigen jetzt, dass harmonische Funktionen analytisch sind. Dafür brauchen wir eine bessere Abschätzung der Konstanten $C_{n,k}$.

Definition 3.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt analytisch, falls für alle $x \in \Omega$ ein $r > 0$ existiert, so dass f gleich ihrer Taylorreihe in $B_r(x)$ ist, d.h.,*

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)(y-x)^\alpha \tag{3.50}$$

für alle $y \in B_r(x) \subset \Omega$ gilt.

Satz 3.16. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann ist u analytisch.*

Wir wollen die höheren Ableitungen abschätzen.

Satz 3.17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, $B_r(x) \subset \Omega$. Dann gilt für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ der Ordnung k*

$$|\partial^\alpha u|(x) \leq \frac{n^k k^k}{r^k} \|u\|_{C_b(B_r(x))}. \tag{3.51}$$

Bemerkung. Für $k = 0$ folgt aus der Mittelwerteigenschaft

$$|u|(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u| \, d\mathcal{L}^n \, . \tag{3.52}$$

und wir können die Supremumsnorm auf der rechten Seite durch das Integral des Betrages über den doppelten Ball ersetzen.

Beweis. Teil 1: $k = 1$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Die Funktion $x \mapsto \partial_{x_i} u(x)$ ist ebenfalls harmonisch (weil $u \in C^\infty$, und $\Delta \partial_{x_i} u = \partial_{x_i} \Delta u$). Aus der Mittelwertformel und dem Satz von Gauß folgt

$$\partial_{x_i} u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \partial_{x_i} u \, d\mathcal{L}^n = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(x)} u \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1} \, , \tag{3.53}$$

wobei ν die äußere Normale ist. Die Aussage für $k = 1$ folgt mit

$$\left| \int_{\partial B_r(x)} u \nu_i d\mathcal{H}^{n-1} \right| \leq n \mathcal{L}^n(B_1(0)) r^{n-1}.$$

Teil 2: Der Induktionsschritt Sei α ein Multiindex mit $\|\alpha\| = k + 1 \geq 1$. Dann gibt es $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein Multiindex β mit $\|\beta\| = k$, so dass

$$\partial^\alpha u = \partial_i \partial^\beta u \, . \tag{3.54}$$

Die Funktion $\partial^\beta u$ ist ebenfalls harmonisch. Analog zu Teil 1 folgt für alle $\rho \in (0,r)$

$$|\partial^\alpha u|(x) \le \frac{n}{\rho} \sup\{|D^\beta u(x)| : x \in (\partial B_\rho(x))\}\,. \tag{3.55}$$

Aus der Induktionsannahme, angewendet auf die Kugel $B_{r-\rho}(y) \subset B_r(x) \subset \Omega$, folgt

$$|\partial^\beta u|(y) \le \frac{n^k k^k}{(r-\rho)^k} \|u\|_{C_b(B_r(x))} \tag{3.56}$$

für alle $y \in \partial B_\rho(x)$. Man wählt $\rho = r/(k+1)$, so dass $r - \rho = \frac{k}{k+1} r$.

□

Beweis von Satz 3.16. Es reicht, die Restgliedabschätzung der Taylorreihe in (3.50) mit Satz 3.17 zu kontrollieren. Für jedes N gilt

$$u(y) = \sum_{|\alpha| \le N-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{\alpha!} \partial^\alpha u(x+t(y-x)dt \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$$

und wir können das Restglied durch

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{n^N N^N}{r^N} |y-x|^N \|u\|_{C_b(B_r(x))}$$

abschätzen. Nach der binomischen Formel ist

$$n^N = (1+1+\cdots+1)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!}$$

und daher

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \le n^N (N!)^{-1}.$$

Nun ist

$$N! \ge (N/3)^N$$

und daher ist das Restglied kleiner als

$$\left(\frac{|y-x|}{r/(3n^2)} \right)^N$$

und die Taylorreihe konvergiert in $B_{r/(3n^2)}(x)$. □

13.05.16

3.3 Explizite Lösung der Poissongleichung

Definition 3.18. *Für $k \ge 1$ bezeichnet $C^k(\overline{\Omega})$ die Menge der stetigen Funktionen $u \in C^k(\Omega) \cap C^{k-1}(\overline{\Omega})$, so dass $v \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n)$ mit $v = D^k u$ in Ω existiert. Analoges gilt für $C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$.*

Bemerkung. Die Fortsetzung von Du auf dem Abschluss $\overline{\Omega}$ ist eindeutig.

3.3.1 Fundamentallösung, Laplacegleichung im Ganzraum

Definition 3.19 (Fundamentallösung)**.** *Man definiert $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \textit{falls } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \textit{falls } n \geq 3 \end{cases} \tag{3.57}$$

und $\Phi(0) = 0$, wobei $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1)$.

Bemerkung. Im Beispiel in Abschnitt 3.2.1 haben wir gesehen, dass

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,. \tag{3.58}$$

Ist Ω eine Menge mit C^1 Rand und äußerer Einheitnormalen und $u \in C^1(\bar{\Omega})$ dann definieren wir $\partial_\nu u$ als die Richtungsableitung in Richtung ν.

Lemma 3.20. *Für alle $r > 0$ gilt*

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi \, d\mathcal{H}^{n-1} = -1\,. \tag{3.59}$$

Beweis. Man rechnet $\nabla|x| = x/|x|$,

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|^n}\,, \tag{3.60}$$

und

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi \, d\mathcal{H}^{n-1} = -\int_{\partial B_r(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|^n} = -1\,. \tag{3.61}$$

□

Satz 3.21. *Sei $n \geq 2$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, $u = f * \Phi$, d.h.,*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy\,. \tag{3.62}$$

Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$-\Delta u = f\,. \tag{3.63}$$

Definition 3.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man bezeichnet mit $L^1_{loc}(\Omega)$ die Menge der messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ integrierbar sind.*

Gegeben sei eine Funktionenfolge $f : \mathbb{N} \to L^1_{loc}(\Omega)$ und eine Funktion $f_* \in L^1_{loc}(\Omega)$; man sagt dass $f_j \to f_*$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |f_j - f_*| d\mathcal{L}^n = 0\,. \tag{3.64}$$

Bemerkung. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $f\chi_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $R > 0$; $f_j \to f_*$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $f_j\chi_{B_R(0)} \to f_*\chi_{B_R(0)}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $R > 0$.

Beispiele. $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ und $C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Insbesondere ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = |x|^2/j$, in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$; diese Folge konvergiert gegen 0 in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (aber nicht in L^1!).

Bemerkung. Die Fundamentallösung Φ, in Def. 3.19 eingeführt, erfüllt $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 3.23. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

(i) $C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$*;*

(ii) Für $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\,, \tag{3.65}$$

und $f * g \in C_b(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Falls zusätzlich $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, dann $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $D(f * g) = (Df) * g$.

Beweis. (i): Jede stetige Funktion ist auf einer beliebigen kompakte Menge integrierbar.

(ii): Sei $R > 0$, so dass $\operatorname{supp} f \in B_R(0)$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $f(x-y)g(y) = 0$ für alle $y \notin B_R(x)$, deshalb existiert das Integral.

Sei $x_j \to x$. Dann ist $B_R(x_j) \subset B_{R+1}(x)$ für alle j groß genug. Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_{R+1}(x)} f(x_j - y)g(y)dy = \int_{B_{R+1}(x)} \lim_{j\to\infty} f(x_j - y)g(y)dy \tag{3.66}$$

$$= \int_{B_{R+1}(x)} f(x-y)g(y)dy\,, \tag{3.67}$$

deshalb ist $f * g$ stetig.

(iii): Man rechnet, für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $h \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,

$$\frac{(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)}{h} = \int_{B_{R+1}(x)} g(y) \frac{f(x + he_i - y) - f(x-y)}{h} dy\,. \tag{3.68}$$

Da $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_i - y) - f(x-y)}{h} = D_i f(x-y) \tag{3.69}$$

gleichmäßig in y. Mit $g \in L^1_{loc}$, und der Stetigkeit von Df folgt, dass $f * g \in C^1$ mit

$$D(f * g) = (Df) * g\,. \tag{3.70}$$

□

Beweis von Satz 3.21. Aus Lemma 3.23 folgt, dass das Integral existiert, $u \in C^1$ und

$$Du = \Phi * Df\,. \tag{3.71}$$

Eine weitere Anwendung von Lemma 3.23 zeigt dass $Du \in C^1$ und

$$D^2 u = \Phi * D^2 f\,. \tag{3.72}$$

Deshalb gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, mit $\Delta u = \Phi * \Delta f$.

Sei $R > |x|$, so dass $\operatorname{supp} f \in B_R(0)$. Wir rechnen

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy \tag{3.73}$$

$$= \int_{B_R(x)} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy \tag{3.74}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy\,. \tag{3.75}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $y \mapsto \Phi(y)\Delta f(x-y)$ in $L^1(B_R(x))$ liegt, und $\chi_{B_\varepsilon(0)} \to 0$ punktweise fast überall. Wir wenden jetzt den Satz von Gauß zweimal an; dabei nehmen wir an, dass $B_\varepsilon(0) \subset B_R(x)$ (wenn nicht, können wir R durch $R + |x| + 1$ ersetzen).

$$\int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy = -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\partial_\nu f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.76}$$

$$-\int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} D\Phi(y)\cdot Df(x-y)dy\,. \tag{3.77}$$

Die Integrale auf $\partial B_R(x)$ können weggelassen werden, weil $f(x-y) = 0$ und $Df(x-y) = 0$ für alle $y \in \partial B_R(x)$. Hier und im Folgendem ist schreiben wir $\partial_\nu f(x-y)$ für $(\partial_\nu f)(x-y) = (Df)(x-y)\nu(y)$ – d.h., das Differential der Funktion f wird im Punkt $x-y$ entlang der Normale $\nu(y)$ im Punkt y ausgewertet. Dabei ist $\nu(y) = y/|y|$ die äußere Normale auf dem Rand von $B_\varepsilon(0)$ (diese ist zeitgleich die *innere* Normale auf dem Rand von $B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)$, daher das Minuszeichen).

Die zweite Anwendung von Gauß liefert

$$\int_{B-R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy = -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\partial_\nu f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.78}$$

$$+\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Delta\Phi(y)\cdot Df(x-y)dy \tag{3.79}$$

Da $\Delta\Phi = 0$ auf $B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)$, folgt:

$$\int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy \tag{3.80}$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \left[\Phi(y)\partial_\nu f(x-y) - \partial_\nu\Phi(y)f(x-y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{3.81}$$

Man überprüft, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\partial_\nu f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right| = 0 \tag{3.82}$$

(die Funktion $\partial_\nu f(x-y)$ ist beschränkt, der Rest wird explizit integriert). Deshalb gilt:

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_\nu\Phi(y)f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{3.83}$$

Mit dem Variabelwechsel $y = \varepsilon z$ folgt

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_1(0)} \partial_\nu\Phi(z)f(x-\varepsilon z)d\mathcal{H}^{n-1}(z)\,. \tag{3.84}$$

Da $f(x-\varepsilon z)$ beschränkt ist und punktweise gegen $f(x)$ konvergiert, folgt mit dominierter Konvergenz und Lemma 3.20 dass

$$\Delta u(x) = f(x)\int_{\partial B_1(0)} \partial_\nu\Phi(y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -f(x)\,. \tag{3.85}$$

Damit ist der Beweis beendet. □

24.05.2016

3.3.2 Greensche Funktion

Der Satz von Gauß gilt für C^1-Polyeder, d.h. für beschränkte offene Mengen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, deren Rand $\partial\Omega$ von endlichem $\mathcal{H}^{n-1}$ Maß ist, und für die eine C^1 Mannigfaltigkeit M in $\partial\Omega$, so dass Ω immer auf einer Seite von M liegt, und $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega\setminus M) = 0$.

Definition 3.24. *Eine beschränkte offene Menge, die den Bedingungen des Satzes von Gauß genügt, nennen wir C^1 Polyeder.*

Definition 3.25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω falls für jedes $x \in \Omega$ eine Funktion $\varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ existiert, so dass*

$$\Delta\varphi_x = 0 \ \textit{in}\ \Omega \tag{3.86}$$

$$\varphi_x(y) = \Phi(y-x) \ \textit{für alle}\ y \in \partial\Omega\,, \tag{3.87}$$

und $G(x, y) = \Phi(y - x) - \varphi_x(y)$.

Bemerkung. Das bedeutet, dass $G(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega \times \partial\Omega$ und dass $\Delta(G(x, \cdot) - \Phi(\cdot - x)) = 0$.

Sei $f \in \mathcal{D} := C_0^\infty$, mit $\operatorname{supp} f \in \Omega$ und $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Wir schreiben

$$\Lambda_g = \int_\Omega g(y)f(y)d\mathcal{L}^n(y).$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$\Delta\Lambda_{G(x,\cdot)}(f) = \Delta\Lambda_{\Phi(\cdot-x)}(f) + \Delta\Lambda_{\varphi_x}(f) = \Lambda_{\delta_x}(f) = f(x)\,. \tag{3.88}$$

Man schreibt auch suggestiv, für uns aber im Moment nicht rigoros definiert

$$\Delta_y G(x, y) = \delta_x \text{ in } \mathcal{D}', \text{ für alle } x \in \Omega \text{ fest} \tag{3.89}$$

$$G(x, \cdot) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{3.90}$$

Bemerkung. Für beschränkte Mengen Ω ist die Funktion φ_x, falls existent, eindeutig. Deshalb ist auch G in diesem Fall eindeutig.

Bemerkung. $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, für alle $x \in \Omega$ ist $G(x, \cdot) \in C^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$.

Satz 3.26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Polyeder mit $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$, G eine Green'sche Funktion für Ω, $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in}\ \Omega \\ u = g & \textit{auf}\ \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.91}$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\partial_\nu G(x, y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_\Omega G(x, y)f(y)dy\,. \tag{3.92}$$

Beweisidee: Aus Gauß folgt

$$\int_\Omega (u\Delta G - G\Delta u)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu G - G\partial_\nu u) d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{3.93}$$

wobei ΔG distributionell (d.h. wie in (3.88)) interpretiert werden sollte. Mit $\Delta G(x-\cdot) = \delta_x$ und $G = 0$ auf dem Rand folgt die Aussage.

Beweis. Sei $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$, $V_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$. Dann gilt $G(x,\cdot) \in C^2(V_\varepsilon) \cap C^1(\overline{V}_\varepsilon)$, deshalb

$$\int_{V_\varepsilon} [u(y)\Delta G(x,y) - G(x,y)\Delta u(y)]\, dy = \tag{3.94}$$

$$\int_{\partial V_\varepsilon} [u(y)\partial_\nu G(x,y) - G(x,y)\partial_\nu u(y)]\; d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{3.95}$$

Mit $\Delta G = 0$ in V_ε und $G(x,\cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$ reduziert sich diese Gleichung auf

$$-\int_{V_\varepsilon} G(x,y)\Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_\nu G(x,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.96}$$

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu G(x,y) - G(x,y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{3.97}$$

Da Ω beschränkt ist, $\Phi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi_x \in C^0(\overline{\Omega})$ gilt $G(x,\cdot) \in L_1(\overline{\Omega})$ und deshalb

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{V_\varepsilon} G(x,y)\Delta u(y) dy = -\int_\Omega G(x,y)\Delta u(y) dy = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy\,. \tag{3.98}$$

Wir werden unten zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu G(x,y) - G(x,y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = u(x)\,. \tag{3.99}$$

Mit (3.96), (3.98) und (3.99) ist der Beweis beendet.

Es bleibt, (3.99) zu beweisen. Sei $G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi_x(y)$. Aus dem Beweis von Satz 3.21 folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu \Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -u(x)\,. \tag{3.100}$$

Der Term mit φ_x wird partiell integriert:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu \varphi_x(y) - \varphi_x(y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.101}$$

$$= \int_{B_\varepsilon(x)} (u\Delta\varphi_x - \varphi_x \Delta u)(y) dy\,. \tag{3.102}$$

Mit $\Delta\varphi_x = 0$ und

$$\left|\int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_x \Delta u)(y)dy\right| \leq \max|\varphi_x|(\overline{B_{r/2}(x)}) \max|\Delta u|(\overline{B_{r/2}(x)})\omega_n\varepsilon^n \quad (3.103)$$

folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu\varphi_x(y) - \varphi_x(y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0\,. \quad (3.104)$$

Mit (3.100) ist der Beweis beendet. □

Satz 3.27. *Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $G(x,y) = G(y,x)$.*

Beweis. Seien $x, y \in \Omega$ fest. Wir brauchen nur den Fall $x \neq y$ zu betrachten. Wir definieren zwei Funktionen $v, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$v(z) = G(x,z) \quad (3.105)$$

$$w(z) = G(y,z)\,. \quad (3.106)$$

Dann ist $\Delta v = 0$ in $\Omega \setminus \{x\}$, und $\Delta w = 0$ in $\Omega \setminus \{y\}$. Ferner; $v = w = 0$ auf $\partial\Omega$.

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)} \subset \Omega$ und $\overline{B_\varepsilon(x)} \cap \overline{B_\varepsilon(y)} = \emptyset$. Sei $V_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)} \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$. Dann gilt

$$\int_{V_\varepsilon} (w\Delta v - v\Delta w)\, dz = \int_{\partial V_\varepsilon} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{n-1} \quad (3.107)$$

und deshalb

$$0 = \int_{\partial B_\varepsilon(x)\cup\partial B_\varepsilon(y)} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{n-1} \quad (3.108)$$

Wir betrachten die Ränder der zwei Kugeln getrennt. Der erste ist

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{n-1} \quad (3.109)$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w(z)\partial_\nu G(x,z) - G(x,z)\partial_\nu w(z))\, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \quad (3.110)$$

Da $w \in C^2(B_\varepsilon(x))$, folgt aus (3.99)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w(z)\partial_\nu G(x,z) - G(x,z)\partial_\nu w(z))\, d\mathcal{H}^{n-1} = -w(x)\,. \quad (3.111)$$

Analog,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{n-1} \quad (3.112)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} (G(y,z)\partial_\nu v(z) - v(z)\partial_\nu G(y,z))\, d\mathcal{H}^{n-1} = v(y)\,. \quad (3.113)$$

Deshalb gilt $w(x) = v(y)$, und der Beweis ist beendet. □

3.3.3 Spezialgebiete

Erinnerung: Aus Def. 3.19,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{falls } n = 2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\omega_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{falls } n \geq 3\,, \end{cases} \tag{3.114}$$

folgt

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|^n}\,. \tag{3.115}$$

Halbraum

Definition 3.28. *Die Greensche Funktion für das Gebiet*

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \tag{3.116}$$

ist

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - Px)\,, \tag{3.117}$$

wobei $Px = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$*, d.h.,* $P = \mathrm{Id} - 2e_n \otimes e_n$*. Man nennt* $K : \mathbb{R}^n_+ \times \partial\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$*,* $K = -\partial_\nu G$*,*

$$K(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_n} = \frac{2x_n}{n\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n} \tag{3.118}$$

der Poissonkern des Halbraumes.

27.05.2016

Lemma 3.29. *(i) Für alle* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *ist* $K(x, \cdot) \in C^0(\partial\mathbb{R}^n_+) \cap L_1(\partial\mathbb{R}^n_+)$*.*

(ii) Für alle $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *gilt* $K(\cdot, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ *und* $\Delta K(\cdot, y) = \sum_i \partial^2_{x_i} K(x, y) = 0$*.*

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ *es gilt*

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y) = 1\,. \tag{3.119}$$

Beweis. (i): Stetigkeit folgt aus $|x - y| \geq |x_n - y_n| = x_n > 0$. Integrabilität folgt aus der Tatsache dass $|K(x, \cdot)| \leq C/|y|^n$ für alle y groß genug.

(ii): Folgt aus der Definition und $\Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(iii): Sei $x \in \mathbb{R}^n_+$, $\varepsilon \in (0, x_n)$, $R > 2|x|$. Dann ist $y \mapsto \Phi(y - x) - \Phi(y - Px)$ harmonisch in $\Omega_\varepsilon = B_R(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, und aus Gauß-Green folgt

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_\nu \left[\Phi(y - x) - \Phi(y - Px)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0\,. \tag{3.120}$$

Aus Lemma 3.20 folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu \Phi(y-x) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -1\,, \tag{3.121}$$

und mit $\Delta\Phi(y-Px) = 0$ auf $B_\varepsilon(x)$ folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu \Phi(y-Px) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0\,. \tag{3.122}$$

Deshalb gilt

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^n_+ \cap B_R(0))} \partial_\nu \left[\Phi(y-x) - \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -1\,. \tag{3.123}$$

Aus

$$D\Phi(y-x) = D\Phi\left(\frac{y-x}{R}\right)\frac{1}{R^{n-1}} \tag{3.124}$$

und dem Variablenwechsel $y = Rz$ folgt

$$\int_{\partial B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} \partial_\nu \Phi(y-x) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^n_+} \partial_\nu \Phi(z - \frac{x}{R}) d\mathcal{H}^{n-1}(z)\,. \tag{3.125}$$

Da $|x|/R < 1/2$ gilt $|D\Phi(z-x/R)| \leq \max |D\Phi|(\overline{B_{\frac{3}{2}}(0)} \setminus B_{\frac{1}{2}}(0))$ für alle z und R, und mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} \left[\partial_\nu \Phi(y-x) - \partial_\nu \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.126}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^n_+} \left[\partial_\nu \Phi(z-\frac{x}{R}) - \partial_\nu \Phi(z - \frac{Px}{R})\right] d\mathcal{H}^{n-1}(z) \tag{3.127}$$

$$= \int_{\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^n_+} \lim_{R\to\infty} \left[\partial_\nu \Phi(z-\frac{x}{R}) - \partial_\nu \Phi(z - \frac{Px}{R})\right] d\mathcal{H}^{n-1}(z) = 0\,. \tag{3.128}$$

Es folgt, dass

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \partial_\nu \left[\Phi(y-x) - \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -1\,. \tag{3.129}$$

Hier ν ist die äußere Normale, $\nu = -e_n$, deshalb $-\partial_\nu = \partial/\partial y_n$. $\square$

Satz 3.30. *Sei $g \in C^0_b(\partial\mathbb{R}^n_+)$ (d.h., beschränkt und stetig) und sei*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y) g(y) & \textit{falls } x \in \mathbb{R}^n_+ \\ g(x) & \textit{falls } x \in \partial\mathbb{R}^n_+\,. \end{cases} \tag{3.130}$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap C^0_b(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$ und $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Bemerkung. Mithilfe von Liouville kann man zeigen, dass u die einzige harmonische und beschränkte Funktion ist, die mit g auf dem Rand übereinstimmt.

Beweis. Teil 1: wir zeigen $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ und $\Delta u = 0$. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ fest, $\varepsilon = x^*_n/2 > 0$. Die Ableitungen DK, D^2K sind auf $(x, y) \in B_\varepsilon(x^*) \times \partial\mathbb{R}^n_+$ beschränkt und gleichmäßig in y integrierbar. Deshalb gilt $u \in C^2(B_\varepsilon(x^*))$ und

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta K(x, y) g(y) = 0\,. \tag{3.131}$$

Teil 2: wir zeigen $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Für $x_* \in \partial\mathbb{R}^n_+$ und $x \in \mathbb{R}^n_+$ gilt

$$u(x) - u(x_*) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y) g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) - g(x_*) \tag{3.132}$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y)(g(y) - g(x_*))\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{3.133}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(y) - g(x^*)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_{2\delta}(x^*) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$.

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_{2\delta}(x^*)} K(x, y)(g(y) - g(x^*)) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| \tag{3.134}$$

$$\leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |K|(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \varepsilon \tag{3.135}$$

und

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_{2\delta}(x^*)} K(x, y)(g(y) - g(x^*)) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| \tag{3.136}$$

$$\leq 2 \max |g| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_{2\delta}(x^*)} |K|(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{3.137}$$

Für $x \in B_\delta(x)$ gilt $|x - y| \geq |y - x^*| - |x - x^*| \geq |y - x^*| - \delta$, und deshalb

$$\frac{1}{|y - x|^n} \geq \frac{1}{(|y - x^*| - \delta)^n}\,, \tag{3.138}$$

wobei letzte Funktion auf $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_{2\delta}(x^*)$ integrierbar ist. Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{x \to x^*} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^*)} \frac{2x_n}{n\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.139}$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^*)} \lim_{x \to x^*} \frac{2x_n}{n\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0\,. \tag{3.140}$$

Deshalb gibt es ein $\delta' < \delta$, so dass

$$|u(x) - u(x^*)| \leq 2\varepsilon \tag{3.141}$$

für alle $x \in B_{\delta'}(x^*) \cap \mathbb{R}^n_+$. Da g in x^* stetig ist, gibt es ein $\delta'' < \delta'$ so dass (3.141) für alle $x \in B_{\delta'}(x^*) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt. Das beendet den Beweis. $\square$

Kugel

Lemma 3.31. *Die Greensche Funktion für $B_r(0)$ ist*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(y-x) - \Phi\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) & \textit{falls } x \neq 0 \\ \Phi(y) - \Phi(re_1) & \textit{falls } x = 0\,. \end{cases} \tag{3.142}$$

Beweis. Für $y \in \partial B_r(0)$, $x \neq 0$,

$$\left|\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right|^2 = \frac{x^2}{r^2}y^2 - 2x\cdot y + \frac{r^2}{|x|^2}x^2 = x^2 - 2x\cdot y + r^2 = |x-y|^2\,, \tag{3.143}$$

deshalb gilt $G(x,y) = 0$ falls $|y| = r$. Man rechnet $\Delta G(x,y) = \Delta\Phi(y-x) - \frac{|x|^2}{r^2}\Delta\Phi\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) = 0$. $\square$

Für $|y| = r$ gilt

$$\partial_\nu G(x,y) = \frac{y}{r}D\Phi(y-x) - \frac{y}{r}\frac{|x|}{r}(D\Phi)\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{r^2 - x^2}{r|x-y|^n}\,. \tag{3.144}$$

Definition 3.32. *Der Poissonkern für die Kugel $B_r(0)$ ist*

$$K_{B_r(0)}(x,y) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{r^2 - x^2}{r|x-y|^n}\,. \tag{3.145}$$

Für die Kugel $B_r(x_*)$ ist er gegeben durch

$$K_{B(x_*,r)}(x,y) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{r^2 - (x-x_*)^2}{r|x-y|^n}\,. \tag{3.146}$$

31.05.16

Satz 3.33. *Sei $g \in C^0(\partial B_r(z))$, $u : \overline{B}_r(z) \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B_r(z)} K(x,y)g(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \textit{falls } x \in B_r(z) \\ g(x) & \textit{falls } x \in \partial B_r(z) \end{cases} \tag{3.147}$$

definiert. Dann gilt $u \in C^2(B_r(z)) \cap C^0(\overline{B}_r(z))$ und $\Delta u = 0$ in $B_r(z)$.

Bemerkung. Insbesondere gilt für jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ und jede Kugel $\overline{B}_r(z) \subset \Omega$,

$$u(x) = \int_{\partial B_r(z)} K(x,y)u(y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.148}$$

für alle $x \in B_r(z)$. Daraus lässt sich unter anderem eine Taylorreihe für u herleiten sowie die Analytizität von u beweisen.

Beweis. Wie in Lemma 3.29 zeigt man, dass $\Delta_x K = \sum_i \partial_{x_i}^2 K = 0$. Wie in Satz 3.30 folgt, dass u in $B_r(z)$ harmonisch ist.

Es bleibt zu zeigen, dass u auf dem Rand stetig ist. Da $u = 1$ harmonisch ist, folgt aus Satz 3.26, dass $\int_{\partial B} K(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1$ für alle $x \in B_r(z)$.

Sei $x_* \in \partial B_r(z)$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(y) - g(x_*)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{für alle } y \in \partial B_r(0) \cap B_{2\delta}(x_*)\,. \tag{3.149}$$

Sei $x \in B_r(0) \cap B_\delta(x_*)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_*)| &= \left| \int_{\partial B_r(z)} K(x,y)(g(y) - g(x^*))d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| && (3.150)\\
&\leq \int_{\partial B_r(z)} K(x,y)|g(y) - g(x^*)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) && (3.151)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\max|g| \int_{\partial B_r(0)\setminus B_{2\delta}(x_*)} K(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. && (3.152)
\end{aligned}$$

Aus $|y - x_*| \geq 2\delta$ und $|x - x_*| < \delta$ folgt $|x - y| \geq \delta$, $K(x,y) \leq (r^2 - x^2)/(n\omega_n\delta^n)$ und

$$|u(x) - u(x_*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{n\omega_n}\max|g|\frac{r^2 - |x|^2}{\delta^n}\,. \tag{3.153}$$

Deshalb gilt:

$$\limsup_{x\to x_*} |u(x) - u(x_*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.154}$$

für alle $\varepsilon > 0$, da ε beliebig war ist die Aussage bewiesen. $\square$

Wir haben insbesondere folgendes bewiesen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $u \in C^0(\Omega)$. Dann gibt es genau eine Funktion $v \in C^0(\Omega)$, so dass gilt:

$$v = u \text{ in } \Omega \setminus B_r(x) \tag{3.155}$$

$$\Delta v = 0 \text{ in } B_r(x)\,. \tag{3.156}$$

Die Funktion v wird harmonische Fortsetzung von u genannt und ist explizit durch

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus B_r(x) \\ \int_{\partial B_r(z)} K_{B_r(z)}(x,y)u(y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{falls } x \in B_r(x) \end{cases} \tag{3.157}$$

gegeben.

3.4 Existenz von Lösungen

Definition 3.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Die Funktion u heißt subharmonisch, falls*

$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \textit{für alle Kugeln mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega \tag{3.158}$$

und superharmonisch, falls

$$u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \textit{für alle Kugeln mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega. \tag{3.159}$$

Lemma 3.35. *(i) Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist genau dann subharmonisch, wenn*

$$-\Delta u \leq 0 \qquad \textit{in } \Omega\,. \tag{3.160}$$

(ii) Eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ ist genau dann subharmonisch, wenn $-u$ superharmonisch ist.

(iii) Eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ ist genau dann harmonisch, wenn u sowohl subharmonisch als auch superharmonisch ist.

Beweis. (i): in Satz 3.3(ii) (Mittelwertsatz) wurde gezeigt, dass $-\Delta u \leq 0$ (3.158) impliziert. Die Gegenrichtung wird wie in Satz 3.4 bewiesen: Falls ein $x \in \Omega$ mit $-\Delta u(x) > 0$ existieren würde, dann gäbe es ein $r > 0$, so dass $-\Delta u > 0$ auf $B_r(x)$ und $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Dann würde aus 3.3(iii) folgen

$$u(x) > \fint_{B_r(x)} u \, d\mathcal{L}^n\,, \tag{3.161}$$

gegen die Annahme.

(ii): es reicht, $-u$ in der Definition einzusetzen.

(iii): eine harmonische Funktion erfüllt

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega \tag{3.162}$$

und ist damit sowohl subharmonisch als auch superharmonisch. Die Gegenrichtung wurde in Satz 3.6 bewiesen (für alle $x_* \in \Omega$ gibt es ein $r_* > 0$, so dass $\overline{B}(x_*, r_*) \subset \Omega$, dann $u \in L_1(\overline{B}(x_*, r_*))$, und daraus folgt $\Delta u = 0$ in x_* □

Lemma 3.36. *(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$, u subharmonisch, v superharmonisch. Falls $u \leq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt entweder $u < v$ auf Ω oder $u = v$ auf Ω.*

(ii) Sei $u \in C^0(\Omega)$ subharmonisch, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, und sei $v : \Omega \to \mathbb{R}$ die harmonische Fortsetzung von u auf $B_r(x)$, nämlich,

$$v(y) = \begin{cases} u(y) & \text{falls } y \in \Omega \setminus B_r(x) \\ \int_{\partial B_r(x)} K_{B_r(x)}(y,z) u(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) & \text{falls } y \in B_r(x) \,. \end{cases} \tag{3.163}$$

Dann gilt $v \in C^0(\Omega)$, v ist subharmonisch und $u \leq v$.

(iii) Seien $u_1, \dots, u_K \in C^0(\Omega)$ subharmonisch. Dann ist $u = \max\{u_1, \dots, u_K\}$ ebenfalls subharmonisch.

Beweis. (i): Die Funktion $u - v$ ist subharmonisch, und $u - v \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Die Aussage folgt aus dem starken Maximumprinzip, Satz 3.11.

(ii): Aus $v \in C^0(\overline{B}_r(x))$ und $u \in C^0(\Omega \setminus B_r(x))$ mit $u = v$ auf $\partial B_r(x)$ folgt $v \in C^0(\Omega)$.

Die Funktion v ist in $B_r(x)$ harmonisch und auf $\partial B_r(x)$ gilt $u = v$. Aus (i) folgt, dass $u \leq v$ in $B_r(x)$. Deshalb gilt $u \leq v$ auf Ω.

Sei $\overline{B}(y,R) \subset \Omega$. Falls $y \notin B_r(x)$ dann gilt

$$v(y) = u(y) \leq \fint_{\partial B(y,R)} u(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \leq \fint_{\partial B(y,R)} v(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \,. \tag{3.164}$$

Falls $y \in B_r(x)$, betrachten wir die Funktion $w : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$w(z) = \begin{cases} v(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B(y,R) \\ \int_{\partial B(y,R)} K_{B(y,R)}(z,t) v(t)\, d\mathcal{H}^{n-1}(t) & \text{falls } z \in B(y,R) \,. \end{cases} \tag{3.165}$$

Aus der Definition folgt

$$w(y) = \fint_{\partial B(y,R)} w(t) d\mathcal{H}^{n-1}(t) = \fint_{\partial B(y,R)} v(t) d\mathcal{H}^{n-1}(t) \,. \tag{3.166}$$

Falls

$$v(y) \leq w(y) \tag{3.167}$$

dann ist der Beweis beendet.

Es bleibt, (3.167) zu beweisen.

Die Funktion u ist subharmonisch und w ist harmonisch in $B(y,R)$, aus $u \leq v = w$ auf $\partial B(y,R)$ und dem Maximumprinzip folgt $u \leq w$ auf $B(y,R)$.

Die Funktion $v - w$ ist harmonisch in $B_r(x) \cap B(y,R)$, und $v - w = u - w \leq 0$ auf $(\partial B_r(x)) \cap B(y,R) \subset B(y,R)$ und $v - w = 0$ auf $\partial B(y,R)$. Deshalb gilt $v - w \leq 0$ auf $\partial(B_r(x) \cap B(y,R))$ und damit auch in $y \in B_r(x) \cap B(y,R)$.

(iii): Sei $u = \max_j u_j$, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, $p \in \{1, \dots, K\}$, so dass $u(x) = u_p(x)$. Aus $u_p \leq u$ folgt

$$u(x) = u_p(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u_p\, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \fint_{\partial B_r(x)} u\, d\mathcal{H}^{n-1} \,. \tag{3.168}$$

□

Definition 3.37. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann definieren wir:*

$$S_g = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : v \text{ subharmonisch und } v \leq g \text{ auf } \partial\Omega\}\,. \tag{3.169}$$

Satz 3.38. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $g \in C^0(\partial\Omega)$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \tag{3.170}$$

definiert. Die Funktion u ist wohldefiniert und harmonisch.

Beweis. Die Menge S_g ist nicht leer, weil die konstante Funktion $x \mapsto \min g(\partial\Omega)$ in S_g liegt.

Für alle $x \in \overline{\Omega}$ ist die Menge $\sup\{v(x) : v \in S_g\}$ beschränkt, weil $v(x) \leq \max g(\partial\Omega)$ für alle $v \in S_g$. Deshalb ist u wohldefiniert.

Sei $y \in \Omega$, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S_f$ eine Folge, so dass $v_k(y) \to u(y)$. Wir können oBdA annehmen, dass $v_k \leq v_{k+1}$ (sonst betrachten wir die Folge $\max\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$). Sei $\overline{B}_r(y) \subset \Omega$, w_k die harmonische Fortsetzung von v_k auf $B_r(y)$, d.h.,

$$w_k(z) = \begin{cases} v_k(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_r(y) \\ \int_{\partial B_r(y)} K_{B_r(y)}(z,t) v_k(t) d\mathcal{H}^{n-1}(t) & \text{falls } z \in B_r(y)\,. \end{cases} \tag{3.171}$$

Aus Lemma 3.36(ii) folgt, dass w_k subharmonisch ist und $v_k \leq w_k$, insbesondere $w_k \in S_g$. Deshalb gilt $v_k \leq w_k \leq u$, insbesondere konvergiert $w_k(y)$ gegen $u(y)$. Aus der Monotonie der Folge v_k folgt leicht die Monotonie der Folge w_k.

Aus der Monotonie der Folge w_k folgt, dass w_k gegen eine harmonische Funktion U gleichmäßig in $B(y, r/2)$ konvergiert. Beweis davon: Wir wissen, dass $w_k(y)$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $k \leq h$. Da $w_h - w_k \geq 0$, und $\Delta(w_h - w_k) = 0$ auf $B_r(y)$, folgt aus der Harnack-Ungleichung (Satz 3.12), dass

$$\max(w_h - w_k)(\overline{B(y,r/2)}) \leq C \min(w_h - w_k)(\overline{B(y,r/2)}) \leq C(w_h(y) - w_k(y))\,. \tag{3.172}$$

Deshalb ist w_h eine Cauchy-Folge in $C^0(\overline{B(y,r/2)})$ und konvergiert gleichmäßig gegen U. Da U die Mittelwerteigenschaft hat, ist sie harmonisch (Satz 3.6 oder Lemma 3.35(iii)). Ferner, $U(y) = u(y)$ und $U \leq u$ auf $B(y, r/2)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $U = u$ auf $B(y, r/2)$. □

[1: 02.06.16]

Beweis. Falls nicht, dann gäbe es ein $p \in B_{r/2}(y)$, so dass $U(p) < u(p)$. Dann gäbe es ein $V \in S_g$ mit

$$U(p) < V(p)\,. \tag{3.173}$$

Sei $\tilde{v}_k = \max\{V, w_k\}$, und - wie oben -

$$\tilde{w}_k(z) = \begin{cases} \tilde{v}_k(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_r(y) \\ \int_{\partial B_r(y)} K_{B_r(y)}(z,t)\tilde{v}_k(t) d\mathcal{H}^{n-1}(t) & \text{falls } z \in B_r(y)\,. \end{cases} \tag{3.174}$$

Die Folge $\tilde{w}_k$ ist monoton, und $\tilde{w}_k(y) \to u(y)$. Deshalb konvergiert $\tilde{w}_k$ gleichmäßig auf $B(y, r/2)$ gegen eine harmonische Funktion $\tilde{U}$. Aus $w_k \le \tilde{w}_k$ folgt $U \le \tilde{U}$ auf $B(y, r/2)$, mit $\tilde{U}(y) = U(y) = u(y)$ folgt (starkes Maximumprinzip oder Harnack) $\tilde{U} = U$, insbesondere $V(p) \le \tilde{U}(p) = U(p)$, ein Widerspruch zu (3.173). □

Es bleibt, die Randwerte zu behandeln.

Definition 3.39. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_* \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt Barriere in x_* wenn:*

(i) $w(x_*) = 0$ und $w > 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{x_*\}$;

(ii) w ist superharmonisch in Ω, d.h., (3.159) gilt.

Ein Punkt $x_* \in \partial\Omega$ heißt regulär, wenn eine Barriere in x_* existiert.

Lemma 3.40. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $g \in C^0(\partial\Omega)$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \tag{3.175}$$

definiert. Ist $x_* \in \partial\Omega$ regulär, so gilt

$$\lim_{x \to x_*} u(x) = u(x_*) = g(x_*)\,. \tag{3.176}$$

Beweis. Sei w eine Barriere für x_*.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass gilt:

$$|g(x) - g(x_*)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in B(x_*, \delta) \cap \partial\Omega\,. \tag{3.177}$$

Sei

$$C = \frac{2 \max |g|(\partial\Omega)}{\min w(\overline{\Omega} \setminus B(x_*, \delta))}\,. \tag{3.178}$$

Dann gilt, für alle $x \in \partial\Omega$,

$$|g(x) - g(x_*)| \le \varepsilon + Cw(x)\,, \tag{3.179}$$

und deshalb

$$g(x_*) - Cw(x) - \varepsilon \le g(x) \le g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega\,. \tag{3.180}$$

Die erste Funktion ist subharmonisch und deshalb in S_g enthalten, es folgt dass

$$g(x_*) - Cw(x) - \varepsilon \le u(x) \qquad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.181}$$

Die Funktion $x \mapsto g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon$ ist superharmonisch. Für alle $v \in S_g$ gilt

$$v(x) \leq g(x) \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega\,. \tag{3.182}$$

Mit Lemma 3.36(i) folgt

$$v(x) \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega \tag{3.183}$$

und aus der Definition von u folgt

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega\,. \tag{3.184}$$

Deshalb gilt:

$$\limsup_{x \to x_*} |u(x) - g(x_*)| \leq \varepsilon + \lim_{x \to x_*} Cw(x) = \varepsilon \tag{3.185}$$

für alle $\varepsilon > 0$. □

Satz 3.41. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.186}$$

ist genau dann für beliebige $g \in C^0(\partial\Omega)$ lösbar, wenn alle Punkte $x_* \in \partial\Omega$ regulär sind.

Beweis. Falls alle $x_* \in \partial\Omega$ regulär sind, wurde Existenz in Satz 3.38 und Lemma 3.40 bewiesen.

Falls das Dirichletproblem lösbar ist, und $x_* \in \partial\Omega$, dann ist die Lösung von $\Delta u = 0$, $u(x) = |x - x_*|$ auf $\partial\Omega$ eine Barriere in x_*. □

Definition 3.42. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die äußere Sphärenbedingung in $x_* \in \partial\Omega$ wenn $y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ existieren, so dass*

$$\overline{B_r(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}\,. \tag{3.187}$$

Lemma 3.43. *Falls die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in $x_* \in \partial\Omega$ die äußere Sphärenbedingung erfüllt, dann ist x_* ein regulärer Punkt.*

Beweis. Sei

$$u(x) = \Phi(x_* - y) - \Phi(x - y)\,. \tag{3.188}$$

Dann gilt $u \geq 0$ auf $\overline{\Omega}$, und u ist auf Ω harmonisch. □

Beispiel. Jede konvexe Menge erfüllt überall eine Sphärenbedingung, sowie jede Menge deren Rand C^2-regulär ist.

Bemerkung. Die Sphärenbedingung ist nicht notwendig. Ein Punkt $x_* \in \partial\Omega$ erfüllt eine äußere Kegelbedingung, wenn eine offene Kugel $B_r(y)$ existiert, so dass $\operatorname{conv}(\{x_*\} \cup B_r(y)) \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}$. (für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{conv} A$ die kleinste konvexe Menge, die A enthält). Die äußere Kegelbedingung reicht, und ist insbesondere in jedem Gebiet erfüllt, deren Rand Lipschitz-stetig ist. Die ist aber ebenfalls nicht notwendig.

Lemma 3.44. *Ein Punkt $x \in \partial\Omega$ ist genau dann regulär, wenn er als Randpunkt von $B_\rho(x) \cap \overline{\Omega}$ regulär ist.*

Beweis. Hausaufgabe.

□

Lemma 3.45. *Es gibt eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion $g \in C^0(\partial\Omega)$ so dass das Problem $\Delta u = 0$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$, keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ hat.*

Beweis. Sei $\omega = B_1(0) \setminus ([0,1] \times \{0\}^2) \subset \mathbb{R}^3$,

$$u(x) = 4\pi \int_0^1 \Phi(x - te_1) t dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(t-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}} dt\,. \tag{3.189}$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\omega)$ und $\Delta u = 0$ in ω. Eine explizite Integration zeigt, dass

$$u(x) = \begin{cases} v(x) - x_1 \ln(x_2^2 + x_3^2) & \text{falls } x_1 \geq 0 \\ v(x) & \text{falls } x_1 < 0 \end{cases} \tag{3.190}$$

wobei

$$v(x) = A - B + x_1 \ln(1 - x_1 + A) + |x_1| \ln(|x_1| + B) \tag{3.191}$$

mit $A = \sqrt{(1-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $B = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ Es ist leicht zu sehen, dass v in in ω beschränkt ist. Daraus folgt insbesondere, dass u bei 0 nicht stetig ist.

Sei $k > 2 \sup v(B_1(0))$. Sei $\Omega = B_1(0) \cap \{u < k\}$. Sei $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ durch $g = u$ auf $\partial\Omega \setminus \{0\}$, und $g(0) = k$ definiert. Aus $u = k$ auf $\partial\Omega \cap B_1 \setminus \{0\}$ folgt $g \in C^0(\partial\Omega)$.

Wir wollen zeigen, dass keine Lösung $w \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ von $\Delta w = 0$ und $w = g$ existiert.

Sei w eine solche Lösung. Für $\varepsilon > 0$ sei $w_\varepsilon = w + \varepsilon\Phi$. Da u auf Ω beschränkt ist, $\Phi > 0$ überall, und $\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \infty$, gibt es $\delta > 0$ so dass $w_\varepsilon \geq u$ auf $\partial(\Omega \setminus B_\delta)$. Da $w_\varepsilon - u$ auf $\Omega \setminus B_\delta$ harmonisch und auf $\overline{\Omega \setminus B_\delta}$ stetig ist, folgt $w_\varepsilon \geq u$ auf $\Omega \setminus B_\delta$. Da ε beliebig war, folgt $w \geq u$ auf Ω. Analog (mit $w - \varepsilon\Phi$) zeigt man $w \leq u$. Deshalb $w = u$. Das kann aber nicht sein, weil w in $\overline{\Omega}$ stetig ist, u nicht. □

Lemma 3.46. *Sei $\alpha > 0$, $C = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x| < 1, x_n < \alpha|x'|\}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Falls $x_* \in \partial\Omega$ so ist, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $B(r, x_*) \cap \Omega \subset x_* + QC$, wobei $Q \in SO(n)$ eine Rotation ist, dann gibt es eine Barriere in x_*.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $x_* = 0$ und $Q = \mathrm{Id}$. Wir werden eine Funktion u auf C konstruieren. Es ist leicht zu sehen, dass alle Punkte $x_* \in \partial C \setminus \{0\}$ die äußere Sphärenbedingung erfüllen.

Sei $g(x) = |x|$, $g \in C^0(\partial C)$, und $u = \sup S_g$ wie in Satz 3.38. Dann folgt $0 \le u \le 1$ und $\Delta u = 0$ in C. Mit Lemma 3.40 folgt $u = g$ on $\partial C \setminus \{0\}$ und $u \in C^0(\overline{C} \setminus \{0\})$.

Aus Lemma 3.36(i) folgt, dass $u < 1$ in C.

Sei $\omega = C \cap B_{1/2}$, $v : \omega \to \mathbb{R}$ durch $v(x) = u(2x)$ definiert. Sei $a = \max u(\overline{C} \cap \partial B_{1/2})$. Dann ist $1/2 \le a < 1$. Da $v = 1$ auf $C \cap \partial B_{1/2}$ und $u = \frac{1}{2}v$ auf $(\partial\omega) \cap B_{1/2}$, folgt $u \le av$ auf $\partial\omega$.

Wir zeigen jetzt, dass $u \le av$ in ω. Für $\varepsilon > 0$ sei $w_\varepsilon = av + \varepsilon\Phi$. Da u und av beschränkt sind, gibt es $\delta > 0$, so dass $u \le w_\varepsilon$ auf $\omega \cap \partial B_\delta$. Mit $u, w_\varepsilon \in C^0(\overline{\omega \setminus B_\delta})$ folgt $u \le w_\varepsilon$ in $\omega \setminus B_\delta$. Da ε beliebig war, folgt $u \le av$ in ω.

Wir haben gezeigt, dass für $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$

$$\sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) \le a \sup v(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) = a \sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-(k-1)}}). \tag{3.192}$$

Daraus folgt $\sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) \le a^k$. Mit $u \ge 0$ folgt, dass $u(0) = 0$ und u im Punkt 0 stetig ist. Aus dem starken Maximumprinzip folgt, dass $u > 0$ in C. Deshalb ist u eine Barriere. $\square$

06.06.2016

3.5 Energiemethoden

Definition 3.47. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(\Omega)$, mit $u, Du \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Dann definieren wir*

$$I_f[u] := \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 - uf \, d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.193}$$

Für Ω beschränkt und $g \in C^0(\partial\Omega)$ definieren wir

$$\mathcal{A}_g = \{w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : w = g \text{ auf } \partial\Omega\} \,. \tag{3.194}$$

Satz 3.48. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Polyeder, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Eine Funktion $u \in \mathcal{A}_g$ ist ein Minimierer von I_f auf $\mathcal{A}_g$ genau dann, wenn $-\Delta u = f$ in Ω.*

Beweis. Sei $u \in \mathcal{A}_g$ ein Minimierer, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, $\varphi(y) = \eta_r(y-x)$, $t \in \mathbb{R}$. Aus

$$0 \leq I_f[u+t\varphi] - I_f[u] = t^2 \int_\Omega \frac{1}{2}|D\varphi|^2 + t \int_\Omega D\varphi \cdot Du - f\varphi \, d\mathcal{L}^n \tag{3.195}$$

für alle t folgt

$$0 = \int_\Omega D\varphi \cdot Du - f\varphi \, d\mathcal{L}^n = \int_{B_r(x)} D\varphi \cdot Du - f\varphi \, d\mathcal{L}^n \tag{3.196}$$

$$= \int_{B_r(x)} \varphi(-\Delta u - f) \, d\mathcal{L}^n \, . \tag{3.197}$$

Da $\Delta u + f$ stetig ist, gilt

$$(\Delta u + f)(x) = \lim_{r \to 0} (\eta_r * (\Delta u + f))(x) = 0 \, . \tag{3.198}$$

Sei $u \in \mathcal{A}_g$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ und sei $v \in \mathcal{A}_g$. Aus $v = u + (v-u)$ folgt

$$I_f[v] = I_f[u] + \int_\Omega \frac{1}{2}|Dv - Du|^2 + \int_\Omega (Dv - Du) \cdot Du - f(v-u) \, d\mathcal{L}^n \, . \tag{3.199}$$

Mit partieller Integration folgt

$$I_f[v] = I_f[u] + \int_\Omega \frac{1}{2}|Dv - Du|^2 \tag{3.200}$$

$$+ \int_\Omega (v-u)(-\Delta u - f) \, d\mathcal{L}^n + \int_{\partial\Omega} (v-u) \partial_\nu u \, d\mathcal{H}^{n-1} \, . \tag{3.201}$$

Da $\Delta u + f = 0$ in Ω und $v - u = 0$ auf $\partial\Omega$ folgt $I_f[v] \geq I_f[u]$. □

Sei $g \in C^2(\bar{\Omega})$ und $f = 0$. Sei

$$m = \inf \left\{ \int_\Omega |Du|^2 dx : u \in C^2(\overline{\Omega}), u = g \text{ auf } \partial\Omega \right\} \, . \tag{3.202}$$

Die Menge ist nichtleer: Sie enthält g.

Sei $u : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ eine minimierende Folge. Dann

$$|\nabla u_i - \nabla u_j|^2 + |\nabla u_i + \nabla u_j|^2 = 2|\nabla u_i|^2 + 2|\nabla u_j|^2 \, . \tag{3.203}$$

Da

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 d\mathcal{L}^n \to m \qquad \text{as } j \to \infty$$

und $\frac{1}{2}(u_i + u_j) = g$ auf $\partial\Omega$ ist

$$\int_\Omega |\nabla u_i + \nabla u_j|^2 d\mathcal{L}^n \geq 4m$$

und daher

$$\int_\Omega |\nabla(u_i - u_j)|^2 d\mathcal{L}^n \to 0 \qquad \text{as } i,j \to \infty.$$

Dann ist Du_i eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$, deshalb existiert ein $h \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ so dass $u_i \to h$ in L^2. In der Funktionalanalysis werden wir sehen:

- Es existiert genau eine Funktion $v \in L^2$ mit Distributionsableitungen $h_j \in L^2$, d.h.
$$\int h_j \phi dx = -\int v \partial_j \phi dx$$
für jede Funktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt
$$u_i \to v, \partial_k u_i \to h_k \qquad \text{in } L^2(\Omega).$$
- v is harmonisch (die Äquivalenzklasse enthält eine harmonische Funktion. Diese ist eindeutig und wir identifizieren sie mit der Klasse).
- Dieser Zugang suggeriert numerische Verfahren für allgemeine elliptische Gleichungen.

4 Wärmeleitungsgleichung

4.1 Fundamentallösung, homogene Gleichung im Ganzraum

Anfangswertproblem: Gegeben $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, möchten wir $u \in C^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ finden, so dass gilt:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Definition 4.1. *Der Wärmeleitungskern ist die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,*

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)} & \textit{falls } t > 0 \\ 0 & \textit{falls } t \leq 0 \,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Lemma 4.2. *Für alle $t >$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x) dx = 1 \,. \tag{4.3}$$

Für alle $(t,x) \neq (0,0)$ gilt $(\partial_t \Phi - \Delta \Phi)(t,x) = 0$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus ((vii)) im Unterabschnitt 3.1; die zweite ist eine leichte Rechnung. □

Satz 4.3. *Für $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, sei*

$$u(t,x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y) dy & \textit{falls } t > 0 \\ g(x) & \textit{falls } t = 0 \,. \end{cases} \tag{4.4}$$

Dann gilt $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C_b([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \textit{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{4.5}$$

Beweis. Für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ gilt

$$D^\alpha u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) D^\alpha \Phi(t, x-y) dy \tag{4.6}$$

Dies beweist man wie in Lemma 3.23. Wir benötigen

$$\left| \partial_t^k \partial_x^\alpha \Phi(t,x) \right| \leq C_{k,\alpha} t^{-\frac{n}{2} - k - \frac{|\alpha|}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}} .$$

Es folgt, dass $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_t u - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) (\partial_t - \Delta) \Phi(t, x-y) dy = 0 \,. \tag{4.7}$$

Es bleibt zu zeigen, dass u auf $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ stetig ist. Das wird wie in Satz 3.30 gemacht.

Seien $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass

$$|g(y) - g(x_*)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x_*)\,. \tag{4.8}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |u(t,x) - g(x_*)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)(g(y) - g(x_*))dy \right| && (4.9)\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\,|g(y) - g(x_*)|\,dy && (4.10)\\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) + 2\|g\|_{sup} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_*)} \Phi(t, x-y)dy\,. && (4.11) \end{aligned}$$

Falls $x \in B(x_*, \delta/2)$, dann $|x - y| > \delta/2$ und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta/2}(0)} \Phi(t,y)dy &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta/2}(0)} e^{-|y|^2/(4t)}dy && (4.12)\\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta/\sqrt{t}}(0)} e^{-|z|^2}dz && (4.13) \end{aligned}$$

Da $z \mapsto e^{-z^2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt mit dominierter Konvergenz, dass

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta/2}(0)} \Phi(t,y)dy = 0\,. \tag{4.14}$$

Deshalb gibt es ein $\delta' > 0$, so dass für alle $(t,x) \in [0, \delta') \times B_{\delta/2}(x_*)$ gilt

$$|u(t,x) - g(x_*)| < 2\varepsilon\,. \tag{4.15}$$

$\square$

10.06.2016

Lemma 4.4. *Seien g, u wie in Satz 4.3. Dann gilt:*

(i) Falls $a \leq g(x) \leq b$ für alle x, dann $a \leq u(t,x) \leq b$ für alle x, t.

(ii) Falls zusätzlich $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für alle t: $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\,. \tag{4.16}$$

(iii) Falls $g \geq 0$, und ein $x_* \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $g(x_*) > 0$, dann gilt $u(t,x) > 0$ für alle x und alle $t > 0$.

Beweis. (i): Aus $g \leq b$ folgt:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) b dy = b\,. \tag{4.17}$$

Analog wird die andere Aussage bewiesen.

(ii): Sei $t > 0$ fest. Da $\Phi(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt mit dem Satz von Fubini dass $(x,y) \mapsto \Phi(t, x-y) g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

Wieder mit Fubini folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Phi(t, x-y) g(y) d\mathcal{L}^{2n}(x,y) \tag{4.18}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Phi(t,z) g(y) d\mathcal{L}^{2n}(z,y) \tag{4.19}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,z) d\mathcal{L}^n(z) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\mathcal{L}^n(y) \tag{4.20}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\mathcal{L}^n(y)\,. \tag{4.21}$$

(iii): Falls ein $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ existiert, so dass $u(t,x) = 0$, dann folgt aus

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y) dy = 0 \tag{4.22}$$

und $\Phi(t, x-y) g(y) \geq 0$, dass $\Phi(t, x-y) g(y) = 0$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$. Da $\Phi(t, x-y) > 0$ für alle y, folgt $g = 0$ fast überall. Da g stetig ist, folgt $g = 0$ überall, entgegen der Annahme. □

4.2 Inhomogene Gleichung im Ganzraum

Für $f : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ suchen wir eine Lösung u von

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases} \tag{4.23}$$

Definition 4.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann gilt:*

$$C_1^2(I \times \Omega) = \{f \in C^1(I \times \Omega) : \partial_{x_i}\partial_{x_j} f \in C(\Omega \times I),\ \ i,j = 1,\ldots,n\}\,. \tag{4.24}$$

Dabei ist insbesondere gefordert, dass die genannten partiellen Ableitungen existieren.

Falls I nicht offen ist, und für $C_1^2(\overline{\Omega \times I})$, fordert man dass die Ableitungen bis zum Rand stetig fortgesetzt werden können.

Wir definieren $C_{1,b}^2(\Omega)$ als den Banachraum von Funktionen in C_1^2, für die

$$u, \partial_t u, \partial_i u, \partial_{ij}^2 u \in C_b(I \times \Omega)$$

mit der Norm

$$\max\{\|u\|_{C_b(I\times\Omega)}, \|u_t\|_{C_b(I\times\Omega)}, \|\partial_i u\|_{C_b(I\times\Omega)}, \|\partial_{ij}^2 u\|_{C_b(I\times\Omega)}\}.$$

Satz 4.6. *Sei* $f \in C^2_{1,b}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, *und*

$$u(t,x) = \begin{cases} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,x-y) f(s,y)\,dyds & \textit{für } t>0 \\ 0 & \textit{für } t=0\,. \end{cases} \tag{4.25}$$

Dann gilt

$$u \in \bigcap_{T>0} C^2_{1,b}((0,T)\times\mathbb{R}^n) \cap C_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$$

und erfüllt

$$\partial_t u - \Delta u = f \ \textit{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n. \tag{4.26}$$

Beweis. Sei $M = \|f\|_{[0,1]\times\mathbb{R}^n}$. Dann gilt, für alle $t \in (0,1]$,

$$|u|(t,x) \le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) M\,dyds = Mt\,. \tag{4.27}$$

Das beweist

$$\lim_{(t,x)\to(x_*,0)} u(t,x) = 0 \qquad \text{für alle } x_* \in \mathbb{R}^n \tag{4.28}$$

und deshalb Stetigkeit auf $\{0\}\times\mathbb{R}^n$.

Um (4.26) zu beweisen, rechnen wir für $t>0$

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(t-s,x-y)\,dyds \tag{4.29}$$

und damit

$$\partial_t u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\,dy \tag{4.30}$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)\partial_t f(t-s,x-y)\,dyds \tag{4.31}$$

und

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(t-s,x-y)\,dyds\,. \tag{4.32}$$

Insbesondere gilt $u \in C^2_1$, und

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\,dy \tag{4.33}$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)(\partial_t - \Delta) f(t-s,x-y)\,dyds\,. \tag{4.34}$$

Sei $\varepsilon \in (0,t)$. Aus

$$\left|\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)(\partial_t - \Delta)f(t-s,x-y)dyds\right| \tag{4.35}$$
$$\leq \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)\left|(\partial_t - \Delta)f\right|(t-s,x-y)dyds \tag{4.36}$$
$$\leq \varepsilon \|(\partial_t - \Delta)f\|_{[0,t)\times\mathbb{R}^n} \tag{4.37}$$

folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)(\partial_t - \Delta)f(t-s,x-y)dyds = 0\,. \tag{4.38}$$

Mit partieller Integration folgt, da $(\partial_t - \Delta)\Phi = 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)(\partial_t - \Delta)f(t-s,x-y)d\mathcal{L}^n(y)ds \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_\varepsilon^t \int_{B_R(0)} \Phi(s,y)(\partial_t - \Delta)f(t-s,x-y)d\mathcal{L}^n ds \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_\varepsilon^t \int_{B_R(0)} (\partial_t - \Delta)\Phi(s,y)f(t-s,x-y)d\mathcal{L}^n(y)ds \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-\varepsilon}^T \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-\frac{R^2}{4s}} \\
&\qquad \times \int_{\partial B_R(0)} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{|y|}\left[\partial_{x_j} f(t-s,x-y) - \frac{y_j}{2s} f(t-s,x-y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} \left[\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y) - \Phi(t,y)f(0,x-y)\right] d\mathcal{L}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y) - \Phi(t,y)f(0,x-y)\right] d\mathcal{L}^n(y)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

wobei wir den Satz von Gauss zweimal angewandt haben. Den Limes $R \to \infty$ haben wir verwendet, um den Satz vom Gauss anwenden zu können. Dank des schnellen Abfalls der Gaussfunktion verschwinden die Randterme im Limes.

Mit (4.33) und (4.38) folgt

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)dy\,. \tag{4.40}$$

Der Rest vom Beweis ist ähnlich zum Beweis von Satz 4.3. Sei $\delta > 0$. Dann gibt es ein $\rho > 0$, so dass $|f(t-\varepsilon,x-y) - f(t,x)| < \delta$ für alle $\varepsilon \in (0,\rho)$ und alle $y \in B(0,\rho)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y)\,[f(t-\varepsilon, x-y) - f(t,x)]\,dy \tag{4.41}$$

$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) d\mathcal{L}^n + 2\|f\|_{[0,t]\times B_R(0)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0)} \Phi(\varepsilon, y)\, d\mathcal{L}^n(y) \tag{4.42}$$

und der Beweis wird wie in (4.11)–(4.15) beendet. □

4.3 Maximumprinzip

Definition 4.7. *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$ definiert man*

$$\Omega_T = (0,T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{4.43}$$

und

$$\Gamma_T = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega) = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T \subset \partial\Omega_T\,. \tag{4.44}$$

Bemerkung. Γ_T ist abgeschlossen, weil $\Gamma_T = \overline{(\{0 \times \Omega)} \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$.

Satz 4.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, so dass*

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0 \qquad \text{in } \Omega_T. \tag{4.45}$$

Dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u\,. \tag{4.46}$$

Bemerkung. Falls $(\partial_t - \Delta)u = 0$, dann folgt auch

$$\min_{\overline{\Omega_T}} u = \min_{\Gamma_T} u\,. \tag{4.47}$$

Beweis. Wir fangen mit dem Fall $\partial_t u - \Delta u < 0$ an.

Die Menge $\overline{\Omega_T}$ ist kompakt. Sei $M = u(x_*, t_*) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$. Falls $(x_*, t_*) \in \Omega_T$, dann gilt $x_* \in \Omega$ und $t_* > 0$. Dann folgt $D_x u(x_*, t_*) = 0$, $\Delta u(x_*, t_*) \leq 0$, $\partial_t u(x_*, t_*) \geq 0$. Insbesondere folgt $(\partial_t u - \Delta u)(x_*, t_*) \geq 0$ im Widerspruch zur Annahme. Deshalb gilt $(x_*, t_*) \in \Gamma_T$.

Sei jetzt $\partial_t u - \Delta u \leq 0$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir $v_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon t$. Mit $\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon < 0$ und $v_\varepsilon \leq u \leq v_\varepsilon + \varepsilon T$ folgt

$$\max_{\overline{\Omega_T}} \varepsilon t + \max_{\overline{\Omega_T}} v_\varepsilon = \varepsilon T + \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon \leq \varepsilon T + \max_{\Gamma_T} u\,. \tag{4.48}$$

Da ε beliebig war, folgt hieraus die Aussage. □

Lemma 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $g \in C^0(\Gamma_T)$, $f \in C^0(\Omega_T)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ von*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T\,. \end{cases} \tag{4.49}$$

Beweis. Falls u, v zwei Lösungen sind, dann gilt $(\partial_t - \Delta)(u - v) = 0$ in Ω_T, deshalb $\max_{\Omega_T}(u - v) \leq \max_{\Gamma_T}(u - v) = 0$ und $\max_{\Omega_T}(v - u) \leq \max_{\Gamma_T}(v - u) = 0$. Es folgt, dass $u - v = 0$ überall. $\square$

14.06.2016

Satz 4.10. *Sei $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,T] \times \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n \,. \end{cases} \tag{4.50}$$

wobei $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Falls $a, A > 0$ existieren, so dass

$$u(t,x) \leq A e^{a|x|^2} \tag{4.51}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, dann gilt für die Supremumsnorm

$$\|u\|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} = \|g\|_{\mathbb{R}^n} \,. \tag{4.52}$$

Die analoge Aussage gilt auch für $T = \infty$ (mit $[0,\infty)$ statt $[0,T]$ und $(0,\infty)$ statt $(0,T]$).

Beweis. Teil 1: wir betrachten den Fall $4aT < 1$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so dass

$$a < \frac{1}{4(T+\varepsilon)} \,. \tag{4.53}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ definieren wir $v : \mathbb{R}^n \times [0,\infty] \to \mathbb{R}$ durch

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{|x-y|^2/(4(T+\varepsilon-t))} \,. \tag{4.54}$$

Eine leichte Rechnung (ähnlich zur Rechnung in Lemma 4.2) zeigt, dass

$$(\partial_t - \Delta)v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \,. \tag{4.55}$$

Für alle $r > 0$, aus dem Maximumprinzip (Satz 4.8) angewendet auf $\Omega = B_r(y)$ folgt, dass

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v = \max_{\Gamma_T} v \,. \tag{4.56}$$

Für alle $x \in B_r(y)$ gilt $v(0,x) \leq u(0,x) = g(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$.

Für alle $(t,x) \in [0,T] \times \partial B_r(y)$ gilt $|x-y| = r$, und deshalb

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon-t))} \tag{4.57}$$

$$\leq A e^{a(|y|+r)^2} - \frac{\delta}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon))} \,. \tag{4.58}$$

Aus (4.53) folgt

$$\lim_{r\to\infty} Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\delta}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon))} = -\infty\,. \tag{4.59}$$

Deshalb existiert ein $r > 0$, so dass

$$Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\delta}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon))} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g\,. \tag{4.60}$$

Mit (4.57) folgt, dass

$$v(t,x) \leq \sup g(\mathbb{R}^n) \text{ für alle } (t,x) \in [0,T] \times \partial B_r(y). \tag{4.61}$$

Dann folgt aus (4.56), dass

$$v(y,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \tag{4.62}$$

und

$$u(y,t) \leq v(y,t) + \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g + \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \tag{4.63}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $\delta > 0$. Mit $\delta \to 0$ ist der Beweis von Teil 1 beendet.

Teil 2: Sei $\varphi : [0,T] \to [0,\infty]$ durch

$$\varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(t,x) \tag{4.64}$$

definiert. Für alle t, t' mit $0 \leq t \leq t' \leq T$ und $t' - t \leq 1/(4a)$ folgt aus Teil 1, dass

$$\varphi(t) \geq \varphi(t')\,. \tag{4.65}$$

Deshalb ist φ monoton fallend, und $\varphi(t) \leq \varphi(0) = \sup g(\mathbb{R}^n)$ für alle t. □

Lemma 4.11. *Sei $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2_1((0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C_b([0,T] \times \mathbb{R}^n \times [0,T])$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,, \end{cases} \tag{4.66}$$

die

$$|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2} \tag{4.67}$$

für irgendwelche $a, A > 0$ erfüllt.

Beweis. Folgt aus Satz 4.10. □

Satz 4.12. *Es gibt eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, so dass $\partial_t u - \Delta u = 0$, $u(0,x) = 0$ für alle x, aber $u \neq 0$.*

Beweis. Es reicht, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Für $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ definieren wir

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} g(t) . \tag{4.68}$$

Wir setzen

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0 , \end{cases} \tag{4.69}$$

so dass $u(t, x) = 0$ für $t \leq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe konvergiert.

Um die Ableitungen abzuschätzen, betrachten wir die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$v(t, s) = \operatorname{Re} \exp\left(-\frac{1}{(t + is)^2}\right) . \tag{4.70}$$

Es ist klar, dass $g(t) = v(t, 0)$ für alle $t > 0$. Da $z \mapsto \exp(-1/z^2)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, ist die Funktion v in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonisch. Alternativ:

$$v(t, s) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{(t + is)^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{1}{(t + is)^{2k}} + \frac{1}{(t - is)^{2k}}\right] \tag{4.71}$$

und

$$(\partial_t^2 + \partial_s^2) \frac{1}{(t + is)^{2k}} = \frac{2k(2k + 1)}{(t + is)^{2k+2}} + \frac{2k(2k + 1)i^2}{(t + is)^{2k+2}} = 0 , \tag{4.72}$$

wobei alle Reihen gleichmäßig auf kompakten Mengen konvergieren.

Sei $T > 0$. Mit Satz 3.17 und $B_{T/3}(T, 0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt, dass

$$|g^{(k)}(T)| = |\partial_t^k v(T, 0)| \leq \frac{2^k k^k}{(T/3)^k} \|v\|_{C_b(B_{T/3}(T,0))} , \tag{4.73}$$

Ferner,

$$|v(t, s)| \leq \left|\exp\left(-\frac{1}{(t + is)^2}\right)\right| \tag{4.74}$$

$$= \exp\left(-\operatorname{Re} \frac{1}{(t + is)^2}\right) = \exp\left(\frac{s^2 - t^2}{(t^2 + s^2)^2}\right) . \tag{4.75}$$

Für $(t, s) \in B_{T/3}((T, 0))$ gilt $|s| \leq T/3$ und $2T/3 \leq t \leq 4T/3$ und deshalb

$$\frac{s^2 - t^2}{(t^2 + s^2)^2} \leq \frac{(T/3)^2 - (2T/3)^2}{((T/3)^2 + (4T/3)^2)^2} = \frac{-3/9}{T^2(17/9)^2} = -\frac{27/289}{T^2} \leq -\frac{1}{(5T)^2} . \tag{4.76}$$

Deshalb gilt, für alle $T > 0$,

$$|g^{(k)}(T)| \leq \frac{6^k k^k}{T^k} e^{-\frac{1}{(5T)^2}} \tag{4.77}$$

Für $T \leq 0$ gilt $g^{(k)}(T) = 0$. Die Funktion $h(T) = T^{-k}e^{-\frac{1}{(5T)^2}}$ genügt $h(T) \to 0$ für $T \to 0$ und $T \to \infty$. Aus

$$h'(T) = \left(\frac{2}{25T^3} - kT^{-1}\right)$$

folgt das h das Maximum in $T = \left(\frac{25k}{2}\right)^{1/2}$ annimmt und damit

$$|g^{(k)}(T)| \leq 30^k k^{\frac{3}{2}k}$$

und

$$\frac{1}{(2k)!}|g^{(k)}(t)| \leq 30^k \left(\frac{3}{2k}\right)^{2k} k^{\frac{3}{2}k} = 120^k k^{-\frac{k}{2}} \to 0$$

mit $k \to \infty$. Damit konvergiert die Potenzreihe mit allen Ableitungen gleichmässig auf kompakten Teilmengen. Daraus folgt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, und $\partial_t u - \Delta u = 0$. $\square$

4.4 Regularität, Mittelwertformel

Analog zu Überlegungen bei den harmonischen Funktionen definieren wir den Begriff der schwachen Lösung.

Definition 4.13. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen. $u \in L^1_{loc}(\omega)$ heißt schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung falls*

$$\int u(\partial_t + \Delta)\phi d\mathcal{L}^n dt = 0$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\omega)$.

Jede Lösung $u \in C_1^2(\omega)$ ist auch eine schwache Lösung, was man mittels partieller Integration sieht.

Satz 4.14. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen, $u \in L^1_{loc}(\omega)$ eine schwache Lösung. Dann gibt es in der Äquivalenzklasse von u eine beliebig oft differenzierbare Funktion (die wir mit u identifizieren), die der Wärmeleitungsgleichung genügt.*

Bemerkung. Die gleiche Aussage, mit fast dem gleichen Beweis, gilt für $\omega = \Omega_T$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $u \in C^\infty(B_{r/2}(0))$ (in dem Sinn der Existenz einer derartigen Funktion in der Äquivalenzklasse aus) für $B_{2r}(0) \subset \omega$ folgt. Dann folgt auch

$$0 = -\int_\omega u(\partial_t\phi + \Delta\phi)d\mathcal{L}^{n+1} = \int_\omega (\partial_t u - \Delta u)\phi d\mathcal{L}^{n+1}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ und damit $u_t - \Delta u = 0$.

Im ersten Schritt betrachten wir eine Funktion $u \in C^3(\omega)$, die dann mit dem gleichen Argument $u_t - \Delta u = 0$ genügt.

Sei $B_r(0) \subset \omega$. Sei $\theta \in C_c^\infty(B_{2r}(0))$ eine Funktion mit $\theta = 1$ auf $B_r(0)$. Wir definieren $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $v = \theta u$ auf $B(0, 2r)$, $v = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B(0, 2r)$. Damit folgt $v \in C^3(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$\partial_t v = \partial_t(u\theta) = \theta \partial_t u + u \partial_t \theta \tag{4.78}$$

und

$$\Delta v = \Delta(u\theta) = \theta \Delta u + u \Delta \theta + 2Du \cdot D\theta \,. \tag{4.79}$$

Sei $f = u(\partial_t \theta + \Delta \theta) - 2 \sum_{j=1}^n \partial_j(u \partial_j \theta)$. Dann gilt

$$(\partial_t - \Delta) v = \theta(\partial_t - \Delta) u + f = f \,. \tag{4.80}$$

Insbesondere $\operatorname{supp} f \subset B_{2r}(0) \setminus B_r(0)$.

Es gilt $v(\cdot, T) = 0$ für $T < -2r$. Ferner ist v beschränkt. Da $f \in C_1^2$, folgt aus Satz 4.6 und Lemma 4.11, dass

$$v(t,x) = \int_T^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \,. \tag{4.81}$$

Da $\Phi(t-s, x-y) = 0$ für $t \leq s$, kann man das Integrationsgebiet mit $\mathbb{R}^{n+1}$ ersetzen. Die Funktion f ist aber außerhalb $B_{2r}(0) \setminus B_r(0)$ gleich Null. Wir haben deshalb bewiesen, dass für alle $w \in C^3(\omega)$ mit $\partial_t w - \Delta w = 0$

$$\begin{aligned} w(t,x) = \int_{B_{2r}(0) \setminus B_r(0)} & w(\Phi(t-s, x-y)(\theta_t + \Delta \theta) \\ & - w \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} \theta \partial_{x_j} \Phi(t-s, x-y)) d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in B_r(0)$ gilt.

17.06.2016

Wir wenden diese Formel auf die Funktion $w_\rho = u * \eta_\rho$ an. Da $u \in C_1^2$ ist, konvergiert w_ρ in L^1 gegen u. Da Φ integrierbar ist, folgt mit dominierter Konvergenz

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{B_{2r}(0) \setminus B_r(0)} & \Phi(t-s, x-y) \\ & \cdot (u \partial_t \theta + u \Delta \theta) - 2u D\theta D\phi(t-s, x-y) d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in B_r(0)$. Für $(t, x) \in B_{r/2}(0)$ und $(s, y) \in B_{2r}(0) \setminus B_r(0)$ ist $\Phi(t-s, x-y)$ beliebig oft differenzierbar, deshalb $u \in C^\infty(B_{r/2}(0))$. □

Definition 4.15. *Für $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $r > 0$ setzt man*

$$E(t,x,r) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Phi(t-s, x-y) > \frac{1}{r^n} \right\} \cup (t,x) \,.$$

Die Menge $E(t, x, r)$ wird Wärmeleitungskugel genannt.

Bemerkung. $E(t,x,r) \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, t)$, $(t,x) \in \partial E(t,x,r)$, E ist beschränkt, $\partial E \setminus \{(t,x)\}$ regulär.

Satz 4.16. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $u \in C^2_1(\omega)$, $\partial_t - \Delta u = 0$, $\overline{E}(t,x,r) \subset \omega$. Dann gilt:*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(t,x,r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \,.$$

Beweis. Es reicht, den Fall $x = 0$, $t = 0$ zu betrachten. Wir schreiben $E(r) = E(0,0,r)$ und definieren

$$\varphi(r) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) = \frac{1}{4} \int_{E(1)} u(ry, r^2 s) \frac{y^2}{s^2} d\mathcal{L}^{n+1}(s,y)$$

(mit dem Variabelwechsel $y = ry'$, $s = r^2 s'$). Es ist leicht zu sehen, dass

$$\lim_{r \to 0} \varphi(r) = u(0,0) \int_{E(1)} \frac{y^2}{4s^2} d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \,.$$

Wir berechnen jetzt das letzte Integral. Mit $y = z\sqrt{|s|}$ und $A = \{(s,z) : s < 0, e^{-|z^2|/4} > (4\pi|s|)^{n/2}\} = \{(s,z) : -(e^{-|z|^2/4})^{2/n}/4\pi < s < 0\}$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{E(1)} \frac{|y|^2}{4s^2} d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_A \frac{|z|^2}{4s} |s|^{n/2} d\mathcal{L}^{n+1}(z,s) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z^2}{4} \int_0^{\exp(-(|z|^2/4)(2/n))/4\pi} s^{n/2-1} ds dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z|^2}{4} \exp(-|z|^2/4) \frac{2}{n(4\pi)^{n/2}} dz \,.
\end{aligned}$$

Ferner,

$$\int |z|^2 \exp(-\frac{|z|^2}{4}) dz = n \int z_1^2 e^{-\frac{|z|^2}{4}} = n(4\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-4x^2} dx = 2n(4\pi)^{\frac{n}{2}}$$

und mit partieller Integration

$$\int 1 e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = \int \frac{x^2}{2} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx.$$

Es bleibt zu zeigen, dass φ konstant ist. Aus $u \in C^1$ folgt $\varphi \in C^1$ und

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{4} \int_{E(1)} (\sum_{j=1}^m y_j \partial_j u + 2rs\partial_t u)(r^2 s, ry) \frac{y^2}{s^2} d\mathcal{L}^{n+1}(y,s) \\
&= \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(r)} (\sum_{j=1}^m y_j \partial_j u + 2s\partial_t u)(y,s) \frac{y^2}{s^2} d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \,.
\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $s < 0$ definieren wir

$$\psi(s,y) = \ln(r^n \Phi(-s,y)) = n \ln r + \frac{|y|^2}{4s} - \frac{n}{2} \ln(-4\pi s)\,.$$

Aus der Definition von E folgt, dass $\psi = 0$ auf $\partial E(r) \setminus \{0\}$. Wir rechnen, mit mehreren partiellen Integrationen,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{E(r)} n\psi(\partial_t u - \Delta u) d\mathcal{L}^{n+1} \\
&= \int_{E(r)} \operatorname{div}(y)\psi\partial_t u - n\psi \operatorname{div} Du\, d\mathcal{L}^{n+1} \\
&= \int_{E(r)} -\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \psi \partial_t u - \psi \sum_{j=1}^m y_j \partial_j \partial_t u + n \sum_{j=1}^m \partial_j \psi \partial_j u\, d\mathcal{L}^{n+1} \\
&= \int_{E(r)} -\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \psi \partial_t u + y\partial_t \psi Du + n \sum_{j=1}^m y_j \partial_j \psi \partial_j u\, d\mathcal{L}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Mit Fubini haben wir einmal bzgl. t partiell integriert ($x = 0$ ist eine Nullmenge) , und für festes t Gauß in x angewandt. Mit $D\psi = y/2s$ und $\partial_t \psi = -y^2/4s^2 - n/(2s)$ folgt

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{E(r)} -\frac{y^2}{2s}\partial_t u - \frac{y^2}{4s^2}\sum_{j=1}^m y_j \partial_j u - \frac{n}{2s}\sum_{j=1}^m y_j \partial_j u + n\frac{1}{2s}\sum_{j=1}^m y_j \partial_j u d\mathcal{L}^{n+1} \\
= &- r^{n+1}\varphi'(r)\,.
\end{aligned}$$

□

4.5 Existenz für das Anfangs-Randwertproblem

Wir suchen eine Lösung für das Anfangsrandwertproblem. Wie bei harmonischen Funktionen ist die Lösung des Randwertproblems für die homogene Gleichung der wichtigste Schritt - nach der Behandlung des Anfangswertproblems in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.17. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^2 $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es $c = c(M)$ so dass*

$$|D_{\nu_y}\Phi(t, x-y)| \le \frac{c}{t^{3/4}|x-y|^{n-3/2}} \text{ für alle } x, y \in M, t > 0\,, \tag{4.82}$$

und

$$\sup_{x \in M} \int_M |D_{\nu_y}\Phi(t, x-y)| d\mathcal{H}^{n-1}(y) < \frac{c}{t^{3/4}} \text{ für alle } t > 0 \tag{4.83}$$

wobei ν_y die Normale in y ist.

Beweis. Man rechnet

$$|\partial_\nu \Phi(t, x-y)| \le \frac{c}{t^{1+n/2}} |(x-y)\cdot \nu| e^{-|x-y|^2/(4t)} .$$

Da M C^2 ist, gilt $|(x-y)\cdot \nu_y| \le c|x-y|^2$.

Für $\beta > 0$ sei $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ durch $\psi(s) = s^\beta e^{-s}$ definiert. Dann $\psi(s) \le \psi(\beta)$ für alle $s \ge 0$.

Mit $\beta = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}$ und $s = |x-y|^2/4t$ erhalten wir

$$|\partial_\nu \Phi(t, x-y)| \le \frac{c}{t^{1+n/2}} |x-y|^2 e^{-|x-y|^2/(4t)} \le \frac{c\psi(\beta)}{|x-y|^{n-\frac{3}{2}} t^{3/4}} .$$

Damit ist (4.82) bewiesen.

Um (4.83) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass

$$\sup_{x \in M} \int_M \frac{1}{|x-y|^{n-3/2}} d\mathcal{H}^{n-1}(y) < \infty . \tag{4.84}$$

Da M eine C^1-Mannigfaltigkeit ist, gibt es endlich viele Punkte $X_i \in M$ und $r > 0$, so dass $M \cap B_{3r}(X_i)$ ein Graph ist, und $M \subset \cup_i B_r(X_i)$ (hier wird benutzt, dass M kompakt ist). Sei $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $f \in C^1(\omega)$, $M \cap B_{3r}(X) = \{(x', f(x')) : x' \in \omega\}$. Sei K kompakt, $K \subset \omega$, so dass $M \cap B_{2r}(X) \subset K \times \mathbb{R}$. Dann für alle $y \in M \cap B_r(X)$ gilt

$$\int_M \frac{1}{|x-y|^{n-3/2}} d\mathcal{H}^{n-1}(y) < \frac{\mathcal{H}^{n-1}(M)}{r^{n-3/2}} + \int_K \frac{\sqrt{1+|Df|^2(y')}}{|(y', f(y')) - x|^{n-3/2}} d\mathcal{L}^{n-1}(y') .$$

Dann, mit $x = (x', x_n)$,

$$\int_K \frac{\sqrt{1+|Df|^2(x')}}{|(y', f(y')) - x|^{n-3/2}} d\mathcal{L}^{n-1}(y') \le (1 + \|Df\|_{L^\infty(K)}) \int_K \frac{1}{|x'-y'|^{n-3/2}} dy'$$

Sei R so dass $K \subset B_R(0)$, $M \subset B_R(0)$. Dann

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{|x'-y'|^{n-3/2}} d\mathcal{L}^{n-1}(y') \le & \int_{B_{2R}(x')} \frac{1}{|x'-y'|^{n-3/2}} d\mathcal{L}^{n-1}(y') \\ \le & \frac{1}{(2R)^{-1/2}} \int_{B_1(0)} \frac{1}{|z'|^{n-3/2}} d\mathcal{L}^{n-1}(z')' . \end{aligned}$$

Da die Schranke nicht von x abhängt, ist die Aussage bewiesen. □

21.06.16

Lemma 4.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega$ eine C^2 Mannigfaltigkeit, ν die äußere Normale, $T > 0$. Sei $\gamma \in C_b([0,T] \times \partial\Omega)$. Sei $v : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ durch*

$$v(t,x) = -\int_0^t \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y) \gamma(s,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds \tag{4.85}$$

definiert. Dann ist $v \in C^\infty([0,T] \times \Omega)$*,* $\partial_t - \Delta v = 0$*,* $v(0,x) = 0$ *für alle* $x \in \Omega$*, und*

$$\lim_{x\to x_*, t\to t_*} v(t,x) = \frac{1}{2}\gamma(t_*, x_*) - \int_0^{t_*}\int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t_* - s, x_* - y)\gamma(s,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds \tag{4.86}$$

für alle $x_* \in \partial\Omega$*,* $t_* \in (0,T]$*.*

Beweis. Für $x \in \Omega$ ist $\Phi(t-s, x-y)$ auf $\partial\Omega$ regulär. Die Regularität und die Gleichung $\partial_t v - \Delta v = 0$ folgen dann aus den Eigenschaften von Φ.

Die Existenz des Integrals in (4.86) folgt aus

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu \Phi(t-s, x-y)||\gamma(s,y)| d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds \\
&\qquad \le \|\gamma\|_{sup} \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu \Phi(t-s, x-y)| d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds \\
&\qquad \le \|\gamma\|_{sup} \int_0^t \frac{c}{s^{3/4}} ds = \|\gamma\|_{sup} 4ct^{1/4} \,,
\end{aligned}$$

wobei wir (4.83) benutzt haben. Im Beweis von (4.86) beschränken wir auf $t = t_*$ bzw $\lim_{x\to x_*} v(t,x)$ um die Notation zu vereinfachen. Der Grenzwert in t verursacht keine zusätzlichen Schwierigkeiten. Um (4.86) zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{x\to x_*} -\int_0^\delta \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(s, x-y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds = \frac{1}{2}\,. \tag{4.87}$$

gilt. Dafür rechnen wir mit dem Satz von Gauss, für $x \in \Omega$ und $s > 0$,

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(s, x-y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) &= -\int_\Omega \Delta\Phi(s, x-y) dy \\
&= -\,\partial_s \int_\Omega \Phi(s, x-y) dy
\end{aligned}$$

Dann gilt für $t' \in (0,\delta)$

$$\int_{t'}^\delta -\partial_s \int_\Omega \Phi(s, x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \int_\Omega \left[\Phi(t', x-y) - \Phi(\delta, x-y)\right] d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Da $x \in \Omega$, $\lim\limits_{t'\to 0}\displaystyle\int_\Omega \Phi(t', x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \lim\limits_{t'\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t', x-y) d\mathcal{L}^n(y) = 1$, deshalb

$$\int_0^\delta -\partial_s \int_\Omega \Phi(s, x-y) d\mathcal{L}^n(y) = 1 - \int_\Omega \Phi(\delta, x-y) d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Aber $\lim_{x\to x_*} \int_\Omega \Phi(\delta, x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \int_\Omega \Phi(\delta, x_*-y) d\mathcal{L}^n(y)$. Sei

$$\Omega_\delta = \{y : x_* + \delta y \in \Omega\}.$$

Dann folgt

$$\chi_{\Omega_\delta}(y) \to \chi_{\langle \nu, y\rangle < 0}$$

fast überall. Damit erhalten wir (4.87) mit

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \Phi(\delta, x_* - y)d\mathcal{L}(y) =& \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta^{-1/2}\Omega} \Phi(1,(x_*-y))d\mathcal{L}^n \\
=& \int_{y_n>0} \Phi(1,y)d\mathcal{L}^n(y) \\
=& \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_*}\int_{\partial\Omega\times(0,t-\delta)} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)\gamma(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds \\
&\quad = \int_{\partial\Omega\times(0,t-\delta)} \partial_\nu \Phi(t-s, x_*-y)\gamma(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds
\end{aligned}$$

und, mit dominierter Konvergenz und (4.83),

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int_{(0,t-\delta)\times\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x_*-y)\gamma(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds \\
&\quad = \int_{(0,t)\times\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x_*-y)\gamma(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\,.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{x\to x_*}\int_{\partial\Omega\times(t-\delta,t)} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)\gamma(y,s)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds = \frac{1}{2}\gamma(t,x_*)\,.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
&\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)\gamma(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds \\
=&\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)\gamma(s,x_*)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds \\
&+\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)(\gamma(s,y)-\gamma(s,x_*))d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\,.
\end{aligned}$$

Der erste Term wird mit (4.87) behandelt. Es bleibt zu zeigen, dass der zweite klein ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\rho > 0$ so, dass

$$|\gamma(t_*, x_*) - \gamma(s,y)| < \varepsilon \text{ für alle } (s,y) \in A_\rho := (t_* - \rho, t_*) \times B_\rho(x_*).$$

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_*}\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega}|\partial_\nu\Phi(t-s,x-y)||\gamma(y,s)-\gamma(s,x_*)|d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\\
&\le \lim_{x\to x_*}\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega\setminus A_\rho}|\partial_\nu\Phi(t-s,x-y)||\gamma(s,y)-\gamma(s,x_*)|d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\\
&\quad+\lim_{x\to x_*}\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega\cap A_\rho}|\partial_\nu\Phi(t-s,x-y)||\gamma(s,y)-\gamma(s,x_*)|d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\\
&=I_1+I_2
\end{aligned}
$$

Wie vorher folgt

$$
I_1\le 2\|\gamma\|_{sup}\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega\setminus A_\rho}|\partial_\nu\Phi(t-s,x-y)|d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\to 0
$$

mit $\delta\to 0$ und

$$
\begin{aligned}
I_2\le&\varepsilon\lim_{x\to x_*}\int_{(t-\delta,t)\times\partial\Omega\cap A_\rho}\partial_\nu\Phi(t-s,x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\\
\le&C\varepsilon\left(\int_{[0,T]\times\partial\Omega}\partial_\nu\Phi(T-s,x-y)d\mathcal{H}^{n-1}\,ds+C\right)
\end{aligned}
$$

da $\partial_\nu\Psi(t-s,x-y)$ für x in der Nähe von x_* und y in einer festen Umgebung von x_* in $\partial\Omega$ nichtnegativ ist. Die Klammer ist dann beschränkt und der $\limsup_{\delta\to 0}\lim_{x\to x_*}$ .. durch $C\varepsilon$ beschränkt, und damit verschwindet der Limes. □

Lemma 4.19. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ eine C^2-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es $T>0$ so dass für alle $g\in C^0(\partial\Omega\times[0,T])$ mit $g=0$ auf $\partial\Omega\times\{0\}$ eine Lösung $u\in C^2_1(\Omega_T)\cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ des Problems*

$$
\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0 & \textit{in } \Omega_T\\ u=g & \textit{in } \partial\Omega\times[0,T]\\ u=0 & \textit{in } \Omega\times\{0\}\end{cases}\tag{4.88}
$$

existiert.

Beweis. Sei

$$
X=C_b([0,T]\times\partial\Omega)\cap\{\gamma:\gamma(0,x)=0\quad\text{für } x\in\partial\Omega\}.
$$

Für $\gamma\in X$ definieren wir

$$
T\gamma(t,x)=-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\partial_\nu\Phi(t-s,x-y)\gamma(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)ds\tag{4.89}
$$

für $(t,x) \in \overline{\Omega}_T$. Wir suchen γ so dass

$$T\gamma(t,x) = g(t,x)$$

für $x \in \partial\Omega$.

Mit Lemma 4.18 bleibt nur zu zeigen, dass ein γ existiert so dass $u \in C(\overline{\Omega}_T)$.

Wir wollen deshalb

$$g = \frac{1}{2}\gamma + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)\gamma(s,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)\, ds$$

für gegebenes g lösen. Dafür definieren wir $L : X \to X$ durch

$$(L\gamma)(t,x) = 2g(t,x) - 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Phi(t-s, x-y)\gamma(y,s) d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds\,. \tag{4.90}$$

Die Existenz des Integrals folgt aus Lemma 4.17, ebenso die Stetigkeit der Funktion $L\gamma$.

Wenn γ ein Fixpunkt von L ist, dann wird der Beweis durch Lemma 4.18 beendet. Um Existenz eines Fixpunktes zu zeigen werden wir T so wählen, dass L eine Kontraktion ist. Seien $\gamma, \hat{\gamma} \in C^0(\partial\Omega \times [0,T])$. Dann folgt

$$\|L\gamma - L\hat{\gamma}\|_{sup} \leq 2 \sup_{x\in\partial\Omega} \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu \Phi(s, x-y, s)| \|\gamma - \hat{\gamma}\|_{sup} d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds \tag{4.91}$$

$$\leq 2\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{sup} \sup_{x\in\partial\Omega} \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\partial_\nu \Phi(s, x-y)| d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds \tag{4.92}$$

$$\leq 2\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{sup} \sup_{x\in\partial\Omega} \int_0^t \frac{c}{t^{1/4}} ds \leq 8c\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{sup} T^{1/4}\,. \tag{4.93}$$

Es reicht, T so zu wählen, dass $8T^{1/4}c < 1$. ☐

24.06.2016

4.5.1 Einschub: Fortsetzungssätze

Satz 4.20 (Satz von Tietze-Urysohn für metrische Räume)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $f \in C(A)$. Dann existiert $F \in C(X)$ mit $F|A = f$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst $f \in C_b(A)$ und definieren

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ \inf_{y\in A} f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,A)} - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nur die Stetigkeit ist zu überprüfen. Sei $x \in X \backslash A$. Dann existiert $y \in A$

$$F(x) \leq f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,A)} - 1 \leq F(x) + \varepsilon$$

und

$$F(x') \leq f(y) + \frac{d(x,y) + d(x',x)}{d(x,A) - d(x,x')} - 1$$

und für $\varepsilon > 0$ existiert $0 < \delta < d(x,A)/2$ so dass

$$F(x') \leq F(x'') + \varepsilon$$

für alle $x', x'' \in B_\delta(x)$. Daraus folgt die Stetigkeit in $X \backslash A$. Sei jetzt $x \in \partial A$. Ist $x' \in X \backslash A$ so existiert $y \in A$ mit

$$d(x',A) \leq d(x',y) \leq d(x',A) + \varepsilon.$$

und $d(y,x) \leq 2d(x',x)$. Damit folgt

$$F(x') \leq f(y) + \varepsilon$$

und

$$\limsup_{x' \to x} F(x') \leq F(x).$$

Sei nun $R > 0$. Dann gilt (für $d(x,x') \leq 1$)

$$F(x') \geq \min\{\inf_A f + \frac{R-1}{d(x',x)} - 1, \inf_{B_R(x)} f(y)\}$$

wobei der erste Term kleiner als das Infimum über $X \backslash B_R(x) \cap A$ ist, und der zweite kleiner gleich dem Infimum auf dem Komplement. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir zuerst R so klein dass der zweite Term $> f(x) - \varepsilon$ und dann δ so dass

$$\frac{R-1}{\delta} > 2\|f\|_{sup}.$$

Dann folgt

$$F(x') < f(x) + \varepsilon \qquad \text{für } d(x,x') < \delta.$$

Offensichtlich gilt

$$\sup_X F = \sup_A f, \quad \inf_X F = \inf_A f.$$

Mit

$$\tilde{F}(x) = F(x) - \min\{d(x,A), 1/4\}(2F(x) - (\sup f + \inf f))$$

erhalten wir eine Fortsetzung mit

$$f(x) < C \quad \text{in A} \implies \tilde{F}(x) < C \quad \text{in } X$$

$$f(x) > C \quad \text{in A} \implies \tilde{F}(x) > C \quad \text{in } X.$$

Ist f unbeschränkt so wenden wir den ersten Teil auf $\tilde{f} = \tanh(f)$ an und definieren F durch $\tanh(F) = \tilde{F}$. □

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ der Halbraum $x_n \geq 0$. Wir schreiben $x = (x', x_n)$.

Lemma 4.21. *Sei $k \geq 0$. Dann existiert eine lineare Abbildung $T_k : C(H) \to C(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften:*

(i) $T_k f|_H = f$

(ii) Für $l \leq k$ gilt
$$\|T_k f\|_{C_b^l(\mathbb{R}^n)} \leq c(k)\|f\|_{C_b^l(H)}.$$

Beweis. Wir betrachten den Fall $n = 1$, da $n > 1$ mit den gleichen Argumenten folgt. Wir definieren

$$T_k f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \geq 0 \\ \sum\limits_{j=0}^{k} a_j f(-jx) & \text{sonst} \end{cases}$$

für noch zu bestimmende Konstanten a_j. Diese müssen den Gleichungen

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j (-j)^l = 1$$

für $0 \leq l \leq k$ genügen damit die l te Ableitung stetig ist. Da die Determinante der Vandermondeschen Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (-1)^k & \cdots & (-k)^k \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (i - j) = \prod_{j=1}^{k} (-j)^{k+1-j} \neq 0$$

nicht verschwindet hat dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. □

Satz 4.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\partial\Omega$ eine C^k Untermannigfaltigkeit. Dann exististiert ein Fortsetzungoperator $T : C(\bar{\Omega}) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, auf den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und $c > 1$, mit den Eigenschaften*

- $Tf|_{\bar{\Omega}} = f$
- $\|Tf\|_{C_b^l(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{C_b^l(\bar{\Omega})}$

Beweis. Mit der Definition einer C^k Mannigfaltigkeit existiert für jedes $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung U in $\mathbb{R}^n$ und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeormorphismus $\phi : U \to V$, der $U \cap \Omega$ auf $V \cap \{x_n > 0\}$, $U \cap \partial\Omega$ auf $V \cap \{x_n = 0\}$ und $U \cap \mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega}$ auf $V \cap \{x_n < 0\}$ abbildet. Ohne Einschränkung können wir $U = B_{3r}(x)$ wählen. Da $\partial\Omega$ kompakt ist existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{r_j}(x_j).$$

Dazu existiert eine glatte Zerlegung der 1, $(\eta_j)_{1\le j\le N}$ mit $\operatorname{supp}\eta_j \subset B_{2r_j}(x_j)$ und

$$\sum_{j=1}^{N} \eta_j(x) = 1$$

für $d(x, \partial\Omega) < \min r_j$. Wir definieren

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \eta_0 = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin \Omega \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{N} \eta_j(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{N} \eta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Sei nun $f \in C(\overline{\Omega})$ und $f_j = (f\eta_j) \circ \phi_j^{-1}$ für $1 \le j \le N$. Wir wenden Lemma 4.21 auf f_j an und erhalten eine Funktion $F_j \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$F = \Lambda(\eta_0 f + \sum_{j=1}^{N} F_j \circ \phi_j).$$

□

Die Bedingungen können abgeschwächt werden. Ein Satz von Whitney sagt, dass ein Fortsetzungsoperator existiert wenn $\partial\Omega$ eine C^1 Mannigfaltigkeit ist. Unser Beweis erfordert stärkere Annahmen.

Satz 4.23. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ eine C^2-Mannigfaltigkeit, $T > 0$ oder $T = \infty$. Sei $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $f \in \overline{\Omega_T}$ und $g \in C([0,T] \times \Gamma)$ $(C([0,\infty) \times \Gamma$ falls $T = \infty$. Es gelte $u_0(x) = g(0,x)$ für $x \in \partial\Omega$. Dann hat das Problem*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \textit{in } \Omega_T \\ u = g & \textit{auf } \Gamma_T \end{cases} \tag{4.94}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$.

Beweis. Wir lösen das Problem erst in $[0, T_0] \times \Omega$ mit T_0 wie oben, und dann mit dem Anfangswert $u(T_0/2)$ zu Zeit $T_0/2$ in $[T_0/2, \frac{3}{2}T_0] \times \Omega$. Aufgrund der Eindeutigkeit stimmen die Lösungen auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Wir erhalten die Aussage mittels Induktion.

Um das Problem für $[0, T_0] \times \Omega$ zu lösen setzen wir u_0 und f auf $\mathbb{R}^n$ bzw $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ mit kompakten Träger fort (benötigt den Beweis) und konstruieren eine Lösung mit Satz 4.6. Nun müssen wir noch die Randwerte korrigieren, was wir mit Satz 4.19 tun. □

Bemerkung: Wie bei den harmonischen Funktionen können wir eine Green'sche Funktion definieren. Im Halbraum können wir sie explizit angeben: Mit $G(t, x, y) = \Phi(t, x, y) - \Phi(t, x, (y', -y_n))$ gilt

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_H G(t,x,y)u_0(y)d\mathcal{L}^n(y) + \int_0^t \int_H G(t-s,x,y)f(s,y)d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \\ &+ \int_0^t \int_{\partial H} \partial_{y_n} G(t-s,x,y)g(s,y)d\mathcal{H}^{n-1}ds, \end{aligned}$$

Eine Funktion $G(t, x, y)$ mit der wir die Lösung in dieser Form als Integral darstellen können, nennen wir Green'sche Funktion.

27.06.2016

Satz 4.24 (Die Harnacksche Ungleichung). *Es existiert $\kappa > 0$ so dass gilt: Sei $u \in C_1^2((T - R^2, T] \times B_R(x_0))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, $u \geq 0$. Dann gilt*

$$u(T, x_0) \geq \kappa \sup\{u(s, y) : T - R^2/2 < s < T - R^2/4, |x - y| < R/2\}$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$, $T = 0$ und $R = 1$.Es genügt zu zeigen: Es existiert $\bar{\kappa} > 0$ und $\delta > 0$ so dass

$$u(0, 0) \geq \bar{\kappa} \sup\{u(s, y) : -2\delta < s < -\delta, 2\delta \leq |y| < 6\delta\}$$

gilt für nichtnegative Lösungen in $[-\frac{1}{2}, 0] \times B_{1/2}(0)$. Die volle Aussage erfolgt dann mittels Iteration:

$$u(0, 0) \geq \kappa u(-\delta, \delta y) \geq \kappa^2 u(-2\delta, 2\delta y) \ldots$$

für $|y| \leq 4$. Mit der Mittelwerteigenschaft gilt

$$u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(r)} \frac{|x|^2}{s^2} d\mathcal{L}^n u(s, x) dx ds$$

wobei

$$E(r) = \{(x, s) : s < 0, (-4\pi s)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4s}} < r^n\}$$

und der Rand ∂E ist

$$\partial E(r) = \{(s, x) : s < 0, |x|^2 = 2ns(2\ln(r) + \ln(-s) + \ln(4\pi)\} \cup \{0, 0\}.$$

Wenn wir r klein genug wählen ist $E(r) \in [-1/2, 0] \times B_{1/2}(0)$ enthalten. Das Paraboloid

$$-s = \frac{|x|^2}{4n(-\ln(r)) - \ln(4\pi)}$$

liegt in einer Umgebung von 0 in $\overline{E(r)}$ und insbesondere existiert $\delta > 0$ so dass

$$u(0,0) \geq \frac{1}{64r^n} \int_{(-3\delta,-\delta)\times(B_{8\delta}(0)\setminus B_\delta(0))} u(s,z) d\mathcal{L}^{n+1}.$$

Im Beweis von Satz 4.14 hatten wir gesehen dass für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung für alle $(t,x) \in B_r(0)$ gilt:

$$\begin{aligned} w(t,x) = \int_{B_{2r'}(0)\setminus B_{r'}(0)} & w(s,y)(\Phi(t-s,x-y)(\theta_t(s,y) + \Delta\theta(s,y)) \\ & - w(s,y) \sum_{j=1}^n \partial_{y_j}\theta(s,y)\partial_{x_j}\Phi(t-s,x-y)) d\mathcal{L}^{n+1}(s,y) \end{aligned}$$

Wir verwenden diese Formel für $w = u(t-t_0, x-x_0)$ im Punkt $t = 0$, $x = 0$ und $r' = \delta/2$. Damit folgt

$$w(t_0, x_0) \leq C w(0,0).$$

□

4.6 Energiemethoden, Langzeitverhalten

Satz 4.25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ regulär im Sinne von Def. 3.39, $g \in C(\partial\Omega)$. Für jede Lösung $u \in C_1^2((0,\infty)\times\Omega) \cap C([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ von*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \textit{in } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = g(x) & \textit{für } (t,x) \in [0,\infty)\times\partial\Omega) \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(t,\cdot) = v \tag{4.95}$$

gleichmäßig in Ω, wobei $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \textit{in } \Omega \\ v = g & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

ist.

Notation: (4.95) bedeutet, dass

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(t,x) - v(x)| = 0\,. \tag{4.96}$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$, sei $w_\varepsilon : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch

$$w_\varepsilon(t,x) = \cos(\varepsilon x_1) e^{-\varepsilon^2 t}$$

definiert. Dann gilt $(\partial_t - \Delta) w_\varepsilon = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$, $w_\varepsilon(x, 0) > 0$ für alle $x \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]^n$ und $w_\varepsilon(\cdot, t) \to 0$ für $t \to \infty$ gleichmäßig.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{\Omega} \subset [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]^n$ und definieren

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{|u(0,x) - v|}{|w_\varepsilon(0,x)|}$$

Aus

$$(\partial_t - \Delta)(u - v - M w_\varepsilon) = 0$$

und $u - v - M w_\varepsilon \leq 0$ auf Γ_∞ folgt mit dem Maximumprinzip (Satz 4.8), dass

$$u \leq v + M w_\varepsilon \text{ auf } \Omega_\infty = (0, \infty) \times \Omega\,.$$

Analog folgt aus $u - v + M w_\varepsilon \geq 0$ auf Γ_∞, dass

$$u \geq v - M w_\varepsilon \text{ auf } \Omega_\infty = (0, \infty) \times \Omega\,.$$

Deshalb $|u - v| \leq M w_\varepsilon$ und die Aussage ist bewiesen. □

Satz 4.26 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Polyeder, $T > 0$, $u, v \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$ zwei Lösungen von*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega \times (0, T) \\ u(t, x) = g(x) & \textit{für } x \in \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.97}$$

Falls ein $t_* \in [0, T]$ existiert, so dass

$$u(t, x_*) = v(t, x_*) \textit{ für alle } x \in \Omega \tag{4.98}$$

dann $u = v$ überall.

Beweis. Wir definieren $w = u - v$ und

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega w^2(t, x) dx\,. \tag{4.99}$$

Dann $w \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$ und $w = 0$ auf $\partial\Omega \times [0, T]$, deshalb

$$\frac{d}{dt} e(t) = \int_\Omega w \partial_t w(t, x) dx = \int_\Omega w \Delta w(t, x) dx = -\int_\Omega |Dw|^2(t, x) dx \leq 0\,. \tag{4.100}$$

Aus $e(t_*) = 0$ folgt, dass $e(t) = 0$ für alle $t \geq t_*$.

Um die Zeiten $t < t_*$ zu behandeln, leiten wir noch einmal ab:

$$\frac{d^2}{dt^2} e(t) = -2 \int_\Omega Dw \cdot \partial_t Dw(t, x) dx \tag{4.101}$$

$$= 2 \int_\Omega \Delta w \cdot \partial_t w(t, x) dx \tag{4.102}$$

$$= 2 \int_\Omega (\Delta w)^2 (t, x) dx\,. \tag{4.103}$$

Mit partieller Integration und Hölder folgt

$$\int_\Omega |Dw|^2(t,x)dx = -\int_\Omega w\Delta w(t,x)dx \tag{4.104}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\int_\Omega w^2\right)^{1/2}\left(2\int_\Omega (\Delta w)^2\right)^{1/2}. \tag{4.105}$$

Deshalb

$$(e'(t))^2 \leq e(t)e''(t)\,. \tag{4.106}$$

Falls $e = 0$ überall ist, dann ist der Beweis beendet. Sonst folgt aus der Monotonie von e, dass ein $t_{\max} > 0$ existiert, so dass $e > 0$ auf $[0, t_{\max})$ und $e = 0$ auf $[t_{\max}, T]$ (möglicherweise $t_{\max} = t_*$). Dann gilt $\lim_{t\to t_{\max}} e(t) = 0$. Wir definieren $f : [0, t_{\max}) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) = \ln e(t)$. Dann

$$\lim_{t\to t_{\max}} f(t) = -\infty \tag{4.107}$$

und

$$f'' = (e'/e)' = \frac{e''}{e} - \frac{(e')^2}{e^2} \geq 0\,. \tag{4.108}$$

Deshalb

$$f(t) \geq f(0) + f'(0)t \tag{4.109}$$

für alle t, gegen (4.107). Deshalb gibt es kein solches $t_{\max}$. □

01.07.2016

5 Die Wellengleichung

Anfangswertproblem: Gegeben $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$, wollen wir $u \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n) \cap C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ finden, so dass

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,, \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1 Eine Raumdimension

Für $n = 1$ kann der Differentialoperator $\partial_t^2 - \Delta$ faktorisiert werden:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u\,. \tag{5.2}$$

Lemma 5.1. *Sei $u \in C^2(\{|x| + |t| < 1\})$ eine Lösung der Wellengleichung (5.2) . Dann existieren Funktionen $f \in C^2((-1,1))$ und $g \in C^2((-1,1))$ mit*

$$u(t,x) = f(x+t) + g(x-t).$$

Umgekehrt genügt jedes u dieser Form der Wellengleichung.

Beweis. Für eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definieren wir $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ durch

$$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{1}{2}(\xi+\eta), \frac{1}{2}(\xi-\eta)\right).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$4\partial_\xi \partial_\eta v = -(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0\,.$$

und damit ist $\partial_\eta v$ eine Funktion von η. Wir definieren $g(\eta)$ als Stammfunktion von $\partial_\eta v$. Dann ist

$$\partial_\eta(v(\xi,\eta) - g(\eta)) = 0$$

und $f(\xi) = v(\xi,\eta) - g(\eta)$ ist eine Funktion von ξ. Es folgt

$$u(t,x) = f(x+t) + g(x-t).$$

Umgekehrt rechnet man leicht nach, dass jede derartige Funktion eine Lösung der Wellengleichung ist. □

Satz 5.2. *Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$,*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\,. \tag{5.3}$$

Dann gilt:

(i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$,

(ii) $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ *auf* $(0,\infty) \times \mathbb{R}$,

(iii) $u(0,x) = g(x)$, $\partial_t u(0,x) = h(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Es existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Die Regularität rechnet man leicht nach. Lemma 5.1 impliziert (ii). (iii) folgt mit einer einfachen Rechnung. Zur Eindeutigkeit stellen wir fest, dass nach Lemma 5.1 für eine Lösung u, G und H existieren mit

$$u(t,x) = G(x+t) + H(x-t).$$

Dann folgt

$$g(x) = G(x) + H(x), h(x) = G'(x) - H'(x)$$

also $G' = g' + h$, $H' = g' - h$ und

$$u_x(t,x) = g'(x+t) + h(x+t) + g'(x-t) - h(x-t)$$

woraus die Formel folgt: Beide Seiten sind Stammfunktionen der jeweiligen Seiten. □

Beispiel. $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $h(x) = 0$. Dann $u(t,x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t))$.

Bemerkung. Die Lösung u ist, für allgemeine g, h, nur zweimal stetig differenzierbar.

Lemma 5.3. *Sei $g \in C^2([0,\infty))$, $h \in C^1([0,\infty))$, $g(0) = g''(0) = h(0) = 0$. Dann ist*

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) d\mathcal{L}^n(y) & \text{falls } 0 \le t \le x \\ \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y) d\mathcal{L}^n(y) & \text{falls } 0 \le x \le t \end{cases} \tag{5.4}$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,\infty)^2 \\ u(0,x) = g(x) & \text{für alle } x > 0\,, \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & \text{für alle } x > 0\,, \\ u(t,0) = 0 & \text{für alle } t \ge 0\,. \end{cases} \tag{5.5}$$

Beweis. Wir definieren $\tilde{g}, \tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \ge 0 \\ -g(-x) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } x \ge 0 \\ -h(-x) & \text{falls } x < 0\,, \end{cases}$$

und wenden die Formel aus Satz 5.2 an. Man überprüft leicht, dass $\tilde{g} \in C^2$, $\tilde{h} \in C^1$, und $u(0,t) = 0$. $\square$

5.2 Höhere Dimension, insbesondere 3D und 2D

Lemma 5.4. *Sei $u \in C^m([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, $m \ge 2$, eine Lösung von*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,, \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $U : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$U(t,r) = \begin{cases} \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{falls } r > 0 \\ u(t,x) & \text{falls } r = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

definiert. Dann $U \in C^m([0,\infty)^2)$ und

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r}\partial_r U = 0 & \textit{in } (0,\infty)^2 \\ U(0,r) = G(r) & \textit{für alle } r > 0\,, \\ \partial_t U(0,r) = H(r) & \textit{für alle } r > 0\,, \end{cases} \tag{5.8}$$

wobei

$$G(r) = \fint_{\partial B_r(x)} g\, d\mathcal{H}^{n-1} \textit{ und } H(r) = \fint_{\partial B_r(x)} h\, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{5.9}$$

Beweis. Aus

$$U(t,r) = \fint_{\partial B_1(0)} u(t, x + rz) d\mathcal{H}^{n-1}(z)$$

und $u \in C^m$ folgt, für alle $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b \le m$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{a+b}}{\partial^a r \partial^b t} U(t,r) \\ &= \fint_{\partial B_1(0)} \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^{n} \frac{\partial^{a+b}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_a} \partial^b t} u(t, x+rz) z_{i_1} \dots z_{i_a}\, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \end{aligned}$$

und deshalb $U \in C^m$. Die Aussagen $U(0,r) = G(r)$ und $\partial_t U(0,r) = H(r)$ folgen direkt.

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \partial_r U &= \fint_{\partial B_1(0)} z \cdot Du(t, x+rz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \partial_\nu u(t,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(t,y) d\mathcal{L}^n(y)\,. \end{aligned}$$

Deshalb

$$\begin{aligned} \partial_r^2 U &= \frac{1-n}{r} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(t,y) d\mathcal{L}^n(y) + \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(t,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \frac{1-n}{r} \partial_r U + \fint_{\partial B_r(x)} \Delta u(t,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt. □

Lemma 5.5. *Sei $n = 3$, u wie oben, $\tilde{U} = rU$. Dann folgt*

$$\partial_t^2 \tilde{U} - \partial_r^2 \tilde{U} = 0\,, \tag{5.10}$$

und $\tilde{U}(t,0) = 0$ für alle t.

Beweis. Ausrechnen. □

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung (5.6), U, G, H wie oben definiert. Für ein festes $x \in \mathbb{R}^3$ seien $\tilde{U}$, $\tilde{G} = rG$, $\tilde{H} = rH$. Dann $\tilde{G}'' = (rG)'' = 2G' + rG''$, und aus der Def. kann man nachprüfen, dass $G'(0) = 0$ und $G''(0)$ existiert. Aus Lemma 5.3 folgt, dass für alle $0 \le r \le t$

$$\tilde{U}(t,r) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)\,d\mathcal{L}^n(y) \tag{5.11}$$

gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \lim_{r\to 0} U(t,r) \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(t+r)G(t+r) - (t-r)G(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} yH(y)dy \\
&= G(t) + tG'(t) + tH(t) \\
&= \fint_{\partial B(t,x)} [g(y) + Dg(y)(y-x) + th(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,.
\end{aligned}$$

Satz 5.6 (Kirchhoffsche Formel)**.** *Sei* $n = 3$, $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann erfüllt* $u : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$,

$$u(t,x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } t = 0 \\ \fint_{\partial B(x,t)} [g(y) + Dg(y)(y-x) + th(y)]\, d\mathcal{H}^2(y) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.12}$$

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$, $u(0,x) = g(x)$ *und* $\partial_t u(0,x) = h(x)$.

05.07.16

Beweis. Teil 1: Wir betrachten den Fall $g = 0$.

Wir definieren für alle $t \ge 0$,

$$u(t,x) = \fint_{\partial B_1(0)} th(x+tz)\, d\mathcal{H}^2(z)\,. \tag{5.13}$$

Mit $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ folgt, dass $u \in C^2([0,\infty,\mathbb{R}^3)$; insbesondere

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_*)} u(t,x) = 0\,.$$

Man rechnet auch leicht

$$\Delta u(t,x) = \fint_{\partial B_1(0)} t\Delta h(x+tz)\, d\mathcal{H}^2(z) = t\fint_{\partial B_t(x)} \Delta h\, d\mathcal{H}^2\,.$$

Wir berechnen jetzt die Zeitableitungen. Für $t \ge 0$ gilt

$$\partial_t u(t,x) = \fint_{\partial B_1(0)} [h(x+tz) + tDh(x+tz)z]\, d\mathcal{H}^2(z)\,.$$

Insbesondere folgt

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_*)} \partial_t u(t,x) = \partial_t u(0,x_*) = h(x_*)\,.$$

Damit ist gezeigt, dass u die Anfangbedingungen erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass $\partial_t^2 u = \Delta u$ in $(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$. Um $\partial_t^2 u$ zu berechnen schreiben wir

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} h(x+tz)\,d\mathcal{H}^2(z) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} \partial_\nu h\,d\mathcal{H}^2 \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} h(x+tz)\,d\mathcal{H}^2(z) + \frac{1}{4\pi t}\int_{B_t(x)} \Delta h\,d\mathcal{L}^3\,,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(t,x) =& \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} zDh(x+tz)\,d\mathcal{H}^2(z) - \frac{1}{4\pi t^2}\int_{B_t(x)} \Delta h\,d\mathcal{L}^3 \\ &+ \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} \Delta h\,d\mathcal{H}^2 = \Delta u(t,x)\,.\end{aligned}$$

Teil 2: Wir betrachten den Fall $h=0$. Sei $v:\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ durch

$$v(t,x) = \fint_{\partial B_1(0)} tg(x+tz)\,d\mathcal{H}^2(z)$$

definiert, analog zu (5.13). Dann folgt wie in Teil 1 aus $g\in C^3(\mathbb{R}^3)$ dass $v\in C^3(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$. Aus Teil 1 folgt auch $\partial_t^2 v = \Delta v$ und

$$\partial_t v(t,x) = \fint_{\partial B(x,t)} \left[g(y) + (y-x)Dg(y)\right]\,d\mathcal{H}^2(y) = u(t,x)$$

für $t>0$. Für $t=0$ folgt aus der Definition dass

$$v(0,x) = 0 \qquad\text{und}\qquad \partial_t v(0,x) = g(x)\,.$$

Da v die Wellengleichung erfüllt, folgt

$$\partial_t^2 v(0,x) = \Delta v(0,x)\,.$$

Aus $v(0,x)=0$ für alle x folgt $\Delta v(0,x)=0$ für alle x und deshalb $\partial_t u(0,x) = 0$. □

Bemerkung. Um eine Lösung $u\in C^2$ zu erhalten, braucht man Anfangsdaten $g\in C^3$. Dieser Regularitätsverlust ist unvermeidbar.

Bemerkung. $u(t,x)$ hängt nur von den Anfangsdaten (g,Dg,h) auf $\partial B_t(x)$ ab. Diese Eigenschaft wird das *starke Huygenssche Prinzip* genannt.

Bemerkung. Für n ungerade gibt es eine analoge Formel mit $g \in C^{(n+3)/2}$, $h \in C^{(n+1)/2}$ (Evans, Seite 77):

$$\begin{aligned} u(t,x) =& \frac{1}{\gamma_n}\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}(t^{n-2}\fint_{\partial B_t(x)} g d\mathcal{H}^{n-1}) \\ &+ \frac{1}{\gamma_n}(t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}(t^{n-2}\fint_{\partial B_t(x)} h), \end{aligned} \tag{5.14}$$

mit $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-2)$.

Satz 5.7. *Sei $n = 2$, $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^2$,*

$$u(t,x) = \begin{cases} g(x) & \textit{falls } t = 0 \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\fint_{B_t(x)} \frac{tg(y) + tDg(y)(y-x) + t^2 h(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} d\mathcal{L}^2(y) & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{5.15}$$

Dann gilt $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$, $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$, $u(0,\cdot) = g$ und $\partial_t u(0,\cdot) = h$.

Beweis. Wir definieren $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ durch

$$\tilde{g}(x) = g(x_1, x_2) \qquad \tilde{h}(x) = h(x_1, x_2)\,,$$

und $\tilde{u}$ wie oben. Dann folgt $\partial_3 \tilde{u} = 0$. Deshalb erfüllt $u(x_1, x_2, t) = \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t)$ die Wellengleichung.

Um u direkt durch g und h zu schreiben, rechnen wir

$$\begin{aligned} &\fint_{\partial B_t^{(3)}(x)} g(y_1,y_2) + \langle y - x, \nabla g\rangle \, d\mathcal{H}^2(y) \\ &\qquad = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t^{(3)}(x)} g(y_1,y_2) + \langle y - x, \nabla g\rangle \, d\mathcal{H}^2(y) \\ &\qquad = \frac{2}{4\pi t^2}\int_{B_t^{(2)}(x)} (g(y) + \langle y - x, \nabla g\rangle)\sqrt{1 + |D\varphi|^2(y)}\, d\mathcal{L}^2(y) \\ &\qquad = \frac{t}{2}\fint_{B_t^{(2)}(x)} \frac{g(y) + \langle y - x, \nabla g\rangle}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}}\, d\mathcal{L}^2(y)\,. \end{aligned}$$

wobei $\varphi(y_1, y_2) = \sqrt{t^2 - |y-x|^2}$ die Parametrisierung von $\partial B_t^{(3)}(x) \cap \{x_3 > 0\}$ über $B_t^{(2)}(x)$ ist. Der Rechnung für den dritten Summanden erfolgt genauso. □

Bemerkung. Die Lösung hängt von den Anfangsdaten *in der ganzen Kugel* $B_t(x)$. Diese Eigenschaft wird Huygensches Prinzip genannt.

Bemerkung. Für n gerade gibt es eine analoge Formel mit $g \in C^{(n+4)/2}$, $h \in C^{(n+2)/2}$ (Evans, Seite 80).

5.3 Energiemethoden, Eindeutigkeit

Satz 5.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Polyheder, $T > 0$, $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, t \in [0,T]\,. \end{cases}$$

Sei

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[(\partial_t u)^2 + |Du|^2 \right] (x,t)\, dx\,.$$

Dann ist $t \to e(t)$ konstant.

Bemerkung. Die Aussage gilt, mit wenigen notationellen Änderungen und dem gleichen Beweis, auch für $T = \infty$.

Beweis. Man rechnet

$$\frac{d}{dt} e(t) = \int_\Omega \left[\partial_t u \partial_t^2 u + Du \cdot \partial_t Du \right] = \int_\Omega \left[\partial_t u \Delta u + Du \cdot \partial_t Du \right] = 0\,.$$

da

$$\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} u \partial_{x_j t}^2 u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (\partial_{x_j} \partial_t u) - \Delta u \partial_t u$$

mit Anwendung des Satzes von Gauß. □

Satz 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Polyheder, $T > 0$, $g \in C^2(\Gamma)$, $h \in C^1(\Omega)$, $f \in C^0(\Omega_T)$ und $l \in C([0,T] \times \partial\Omega$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ von*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{in } (0,T) \times \Omega \\ u = l & \text{in } (0,T) \times \Gamma \\ u(0,x) = g(x) & \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & \text{in } \Omega \times \{0\}\,. \end{cases} \tag{5.16}$$

Beweis. Seien u, v zwei Lösungen. Man wendet Satz 5.8 an $u - v$ an. □

Satz 5.10. *Sei $C(t_*, x_*) = \{(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n : |x - x_*| < t_* - t\}$. Falls $u \in C^2(\overline{C(t_*, x_*)})$, $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $C(t_*, x_*)$, und $u(0,y) = \partial_t u(0,y) = 0$ für alle $y \in B(x_*, t_*) \subset \mathbb{R}^n$, dann folgt $u = 0$ auf $C(t_*, x_*)$.*

Beweis. Sei $e : [0, t_*) \to \mathbb{R}$ durch

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(t_* - t, x_*)} \left[(\partial_t u)^2 + |Du|^2 \right] (t,y)\, d\mathcal{L}^n(y) \tag{5.17}$$

definiert. Dann

$$\frac{d}{dt}e(t) = \int_{B_{t_*-t}(x_*)} \left[\partial_t u \partial_t^2 u + Du \cdot \partial_t Du\right] \, dy \tag{5.18}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_*-t}(x_*)} \left[(\partial_t u)^2 + |Du|^2\right] \, dy \, . \tag{5.19}$$

Mit $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ folgt nach partieller Integration

$$\int_{B_{t_*-t}(x_*)} \partial_t u \partial_t^2 u = \int_{B_{t_*-t}(x_*)} \partial_t u \Delta u \tag{5.20}$$

$$= \int_{\partial B_{t_*-t}(x_*)} \partial_t u \partial_\nu u - \int_{B_{t_*-t}(x_*)} \partial_t Du \cdot Du \, . \tag{5.21}$$

Deshalb

$$\frac{d}{dt}e(t) = \int_{\partial B_{t_*-t}(x_*)} \left[\partial_t u \partial_\nu u - \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}|Du|^2\right] \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \, . \tag{5.22}$$

Aus

$$|\partial_t u \partial_\nu u| \leq |\partial_t u| \, |Du| \leq \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|Du|^2 \tag{5.23}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}e(t) \leq 0 \, . \tag{5.24}$$

Aus der Anfangswerte folgt, dass $e(0) = 0$, und deshalb $e(t) = 0$ für alle t. Daraus folgt $u = 0$ auf C, und aus der Stetigkeit $u = 0$ auf $\overline{C}$. □

Satz 5.11. *Seien $g, h \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ von*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = g \\ \partial_t u(0,\cdot) = h \, . \end{cases} \tag{5.25}$$

Beweis. Seien v, w zwei Lösungen. Aus Satz 5.10 folgt, dass $v - w = 0$ auf $C(t_*, x_*)$ für alle x_*, t_*. Deshalb $v = w$. □

Satz 5.12. *Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ und sei $e : [0,\infty) \to [0,\infty]$ durch*

$$e(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\partial_t u|^2(x,t) + |Du|^2\right](x,t) d\mathcal{L}^n(x) \tag{5.26}$$

definiert. Dann gilt

$$e(t) = e(0) \tag{5.27}$$

für alle $t > 0$.

Beweis. Sei $T > 0$ und $f_T : (0, T) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_T(t) = \int_{B_{T-t}(0)} \left[|\partial_t u|^2 + |Du|^2 \right] (x,t) \, d\mathcal{L}^n \tag{5.28}$$

definiert. Wie im Beweis von Satz 5.10 folgt, dass

$$f_T(t) \leq f_T(0) \leq e(0) \tag{5.29}$$

für alle t und T gilt. Insbesondere

$$\int_{B_R(0)} |\partial_t u|^2(t,x) + |Du|^2(t,x) d\mathcal{L}^n = f_{R+t}(t) \leq e(0) \tag{5.30}$$

für alle $R > 0$, und mit monotoner Konvergenz folgt $e(t) \leq e(0)$. Um die andere Ungleichung zu beweisen genügt es zu beobachten, dass $v(t,x) = u(T-t,x)$ auch eine Lösung der Wellengleichung ist. □

08.07.2016

5.4 Fourier- und Eigenwertmethoden

Definition 5.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f \in C^2(\Omega)$ ist ein* Eigenvektor *des Laplace-Operator zum* Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ *falls $f \neq 0$ und*

$$-\Delta f = \lambda f \text{ in } \Omega\,. \tag{5.31}$$

Bemerkung. Alle harmonische Funktionen sind Eigenvektoren zum Eigenwert 0.

Lemma 5.14. *Falls Ω ein beschränktes C^1-Polyheder ist, $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ wie in Def. 5.13 sind und $f = 0$ auf $\partial\Omega$, dann $\lambda > 0$.*

Beweis.

$$\lambda \int_\Omega f^2 dx = - \int_\Omega f \Delta f dx = \int_\Omega |Df|^2 dx > 0\,. \tag{5.32}$$

□

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ kennen wir alle Eigenfunktionen and Eigenwerte. Sei $\Omega = (0,1)$. Die Eigenfunktionen sind $\sin \pi j x$ und die Eigenwerte $\pi^2 j^2$. Alle Eigenwerte sind in diesem Fall einfach.

Im Fall eines Rechtecks $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ sind für $k \in \mathbb{N}^n$

$$\lambda = \pi^2 \sum_{j=1}^n k_j^2 / (b_j - a_j)^2$$

die Eigenwerte mit den Eigenfunktionen

$$\prod_{j=1}^n \sin(\pi \frac{x_j - a_j}{b_j - a_j}).$$

Satz 5.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Polyheder, und seien $f_j \in C^2(\overline{\Omega})$, $\lambda_j > 0$ Eigenvektoren und Eigenwerte des Laplace-Operators mit $f_j(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$. Seien $g, h \in C^0(\Omega)$, so dass*

$$g = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j f_j \,, \qquad h = \sum_{j \in \mathbb{N}} d_j f_j \tag{5.33}$$

für zwei Folgen $c, d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Falls

$$u(t,x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left[c_j \cos(\sqrt{\lambda_j} t) f_j(x) + \frac{d_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) f_j(x) \right] \tag{5.34}$$

in $C^2([0,T] \times \overline{\Omega})$ konvergiert, dann ist u die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u(x,0) = g(x) & \text{in } \Omega \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & \text{in } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{5.35}$$

Bemerkung. Eine Folge zweimal differenzierbarer Funktionen $f_j \in C^2(\omega)$ konvergiert in $C^2(\omega)$ wenn f, Df und $D^2 f$ gleichmäßig konvergieren.

Beweis. Aus der Konvergenz der Reihe folgt, dass $u \in C^2$. Aus

$$(\partial_t^2 - \Delta) \cos(\sqrt{\lambda_j} t) f_j(x) = -\lambda_j \cos(\sqrt{\lambda_j} t) f_j(x) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \Delta f_j(x) = 0 \tag{5.36}$$

folgt, dass $(\partial_t^2 - \Delta u) = 0$. Die Anfang- und Randwerte werden leicht nachgeprüft. $\square$

Bemerkung. Die analoge Konstruktion funktioniert für die Wärmeleitungsgleichung.

Beispiel. Seien $g \in C^3([0,\pi])$, $g(0) = g(\pi) = 0$ Dann hat

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & \text{in } \mathbb{R} \\ \partial_t u(0,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{für } t > 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$. Die Lösung ist

$$u(x,t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \sin(jx) \cos(jt) \tag{5.38}$$

wobei

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(jx) g(x) dx. \tag{5.39}$$

Die c_k stehen in enger Beziehung zu Fourierkoeffizienten der antisymmetrischen Fortstzung

$$g(-x) = -g(x)$$

für $x < 0$ auf $(-\pi, \pi)$. Die Fourierkoeffizienten sind

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-ikx} g(x) dx$$

Mittels Substitution und $g(x) = -g(x)$ sehen wir für $k > 0$

$$a_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{ikx} g(x) dx = -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sin(x) g(x) dx = -\frac{i}{2} c_k = -\bar{a}_k$$

Aufgrund der Eigenschaften der Fourierreihen gilt

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx} = \sum_{j=1}^\infty c_j \sin(jx).$$

man kann zeigen, dass in diesem Fall die Reihe in C^2 konvergiert.

6 Quasilineare PDG erster Ordnung

6.1 Charakteristiken

6.1.1 Einführung

Eine generische (skalare) PDG erster Ordnung hat die Form

$$F(Du(x), u(x), x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega\,, \tag{6.1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega)$ ist, mit passenden Randdaten. Die unbekannte Funktion ist dann $u \in C^1(\Omega)$.

Die Gleichung ist *quasilinear* falls F im ersten Argument linear ist, d.h., die Gleichung kann als

$$b(u(x), x) \cdot Du(x) = c(u(x), x) \quad \text{für } x \in \Omega \tag{6.2}$$

geschrieben werden, mit $b \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ und $c \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$.

6.1.2 Die Richtung b ist konstant

Wir nehmen zuerst an, dass $b \in \mathbb{R}^n$ fest ist. Nach Variabelwechsel können wir oBdA annehmen, dass $b = e_1$.

Wir fangen mit dem Fall $c = 0$ an. Dann ist die Gleichung

$$e_1 \cdot Du = 0 \tag{6.3}$$

zu

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x) = 0 \tag{6.4}$$

äquivalent. Die Lösungen (in $\mathbb{R}^n$) sind genau die Funktionen, die

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(0, x_2, \dots, x_n) \tag{6.5}$$

erfüllen.

Satz 6.1. *Seien $b, \nu \in \mathbb{R}^n$, $b \cdot \nu \neq 0$. Sei $\Gamma_\nu = \nu^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \nu = 0\}$, $g \in C^1(\Gamma)$. Dann hat*

$$\begin{cases} b \cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{auf } \Gamma \end{cases} \tag{6.6}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung. Die Bedingung $b \cdot \nu \neq 0$ ist wichtig. Beispiel: $b = e_1$, $\nu = e_2$, $n = 2$. Dann gibt es für g konstant unendlich viele Lösungen, für g nicht konstant keine.

Beweis. Die Lösung ist

$$u(x) = g\left(x - \frac{x \cdot \nu}{b \cdot \nu} b\right) . \tag{6.7}$$

□

6.1.3 Die Burgersgleichung

Hier ist $n = 2$, und $y = (t, x) \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x \dfrac{u^2}{2} = 0 & (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) & x \in \mathbb{R} . \end{cases} \tag{6.8}$$

unter der Annahme $g \in C_b^1(\mathbb{R})$.

Lemma 6.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex und $u \in C^1(\Omega)$ genüge*

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Dann ist u konstant auf Geradenstücken der Form

$$\{(t_0 + s, x_0 + su(t_0, x_0)) : s \in \mathbb{R}, \} \cap \Omega$$

für $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Beweis. Sei u wie im Lemma. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung mit (t_0, x_0) in Ω,

$$\dot{x} = u(t, x) \qquad x(t_0) = x_0.$$

Es existiert eine eindeutige (maximale) Lösung in Ω. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} u(t, x(t)) =& \partial_t u(t, x(t)) + \partial_x u(t, x(t))\dot{x}(t) \\ =& \partial_t u(t, x(t)) + u(t, x(t))\partial_x u(t, x(t)) \\ =& 0.\end{aligned}$$

Also ist u konstant entlang von $x(t)$. Daraus folgt $x(t) = x_0 + (t - t_0)u(t_0, x_0)$ und damit ist u konstant auf diesen Geraden. □

Lemma 6.3. *Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ und*

$$T = (\max\{0, \sup(-g')\})^{-1}.$$

Dann existiert eine Lösung von (6.8) bis zum Zeitpunkt T.

Beweis. Nach Lemma 6.2 gilt für jede Lösung, $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t < T$

$$u(t, x) = g(x - tu(t, x)).$$

Gegeben (t, x) suchen wir eine Lösung der impliziten Gleichung

$$F(t, x, u) = u - g(x - tu) = 0.$$

Ist $0 \leq t < T$ so ist die Abbildung

$$u \to F(t, x, u)$$

monoton wachsend mit Ableitung ≥ 1 falls $g' \geq 0$ und Ableitung $\geq (-\inf g')(T - t)$ sonst. Damit ist diese Abbildung bijektiv. Mit dem Satz über implizite Funktionen ist die Nullstelle u eine stetig differenzierbare Funktion von t und x. □

Beispiel 6.4. *Wir betrachten*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \le 0 \\ 1-x & \text{falls } x \in (0,1) \\ 0 & \text{falls } x \ge 1\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

Dann liefert die Methode

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \le t, t \in [0,1) \\ \dfrac{1-x}{1-t} & \text{falls } 0 \le t \le x < 1 \\ 0 & \text{falls } x \ge 1, t \in [0,1)\,. \end{cases} \tag{6.10}$$

Für $t \ge 1$ liefert die Methode keine Lösung, weil die Charakteristiken (das sind hier die Geradenstücke in Lemma 6.2) sich schneiden.

Auch für $t < 1$ ist die Lösung nicht in C^1. Das ist nicht überraschend, weil die Anfangsdaten nicht in C^1 sind. Die Lösung u ist aber als eindeutige Nullstelle von

$$F(t,x,u) = 0$$

gegeben.

12.07.2016

Falls $c \neq 0$, dann muss man die ODE

$$\partial_1 u(x) = c(x, u(x)) \tag{6.11}$$

lösen. Um $u \in C^1$ zu erhalten ist es wichtig, dass die Lösung in den *Parametern* $x_2, \dots, x_n$ differenzierbar ist.

Um Existenz einer Lösung zu beweisen, braucht man die Aussagen über gewöhnlichen Differentialgleichungen in Satz 2.12, die wir hier in der folgenden Form formulieren.

Satz 6.5. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, $s_* \in I$, $z_* \in \mathbb{R}^m$, $g \in C^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\omega \subset I \times \mathbb{R}^m$ von (s_*, z_*) und $\varphi \in C^1(\omega; \mathbb{R}^n)$ so dass*

$$\begin{cases} \partial_s \varphi(s,z) = f(s, \varphi(s,z), z) \\ \varphi(s_*, z) = g(z)\,. \end{cases} \tag{6.12}$$

Ferner, sind die Ableitungen

$$\zeta_i(s,z) = \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi(s,z) \tag{6.13}$$

in Richtung s differenzierbar und erfüllen

$$\begin{cases} \partial_s \zeta_i(s,z) = D_y f(s, \varphi(s,z), z) \zeta_i(s,z) + D_z f(s, \varphi(s,z), z) e_i \\ \zeta_i(s_*, z) = \dfrac{\partial}{\partial z_i} g(z)\,. \end{cases} \tag{6.14}$$

Notation: wir schreiben $f(s, y, z)$, und bezeichnen mit $\partial_s f$, $D_y f$, $D_z f$ das Differential von f in den drei Argument.

Satz 6.6. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $b, \nu \in \mathbb{R}^n$, $b \cdot \nu \neq 0$, $c \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R})$. Sei $\Gamma_\nu = \nu^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \nu = 0\}$, $g \in C^1(\Gamma)$. Für jedes $x_* \in \Gamma \cap \Omega$ gibt es eine offene Menge $\omega \subset \Omega$ so dass $x_* \in \omega$ und*

$$\begin{cases} b \cdot Du(x) = c(u(x), x) & \textit{in } \omega \\ u = g & \textit{auf } \Gamma \end{cases} \tag{6.15}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\omega)$ hat.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 6.5. □

6.1.4 Die Richtung b hängt von x ab

Sei jetzt $b \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Wir suchen u, so dass

$$b(x) \cdot Du(x) = c(u(x), x)\,. \tag{6.16}$$

Sei $\gamma \in C^1(I; \Omega)$, mit $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, eine Kurve. Dann

$$\frac{d}{dt} u(\gamma(t)) = \gamma'(t) Du(\gamma(t))\,. \tag{6.17}$$

Falls

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = b(\gamma(t))\,, \tag{6.18}$$

dann reduziert sich die PDG zur ODE

$$\frac{d}{dt} u(\gamma(t)) = c(u(\gamma(t)), \gamma(t))\,. \tag{6.19}$$

Damit haben wir die partielle Differentialgleichung (6.16) in die zwei gewöhnliche Differentialgleichungen (6.18) und (6.19) umgewandelt.

Satz 6.7. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit, $b \in C^1(\Omega)$, $g \in C^1(\Gamma)$, $c \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R})$. Sei $x_* \in \Omega \cap \Gamma$ so, dass $b(x_*) \cdot \nu(x_*) \neq 0$, wobei ν die Normale zu Γ ist. Dann gibt es eine offene Menge $\omega \subset \Omega$ so dass $x_* \in \omega$ und*

$$\begin{cases} b(x) \cdot Du(x) = c(u(x), x) & \textit{in } \omega \\ u = g & \textit{auf } \Gamma \cap \omega \end{cases} \tag{6.20}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\omega)$ hat.

Beweis. Da Γ eine Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine Umgebung U von x_* und einen Diffeomorphismus dieser Umgebung von x_*, die x_* auf 0, diese Umgebung auf eine Umgebung V von 0 und $\Gamma \cap U$ auf $\{x \in V : x_1 = 0\}$ abbildet. Mit der Kettenregel transformiert sich (6.20) auf eine Gleichung der gleichen Form mit $b_1(0) \neq 0$. Die Lösungen der beiden Gleichungen stehen in einer eineindeutigen Beziehung, und es genügt, den Satz für diese Geometrie zu beweisen.

Wir gehen genauso wie oben vor. Ist u eine Lösung der ersten Gleichung von (6.20), so steht u mit dem System von gewöhnlichen Differentialgleichung wie oben in Zusammenhang. Nach Satz 6.5 existiert $\varepsilon > 0$ so dass die Differentialgleichung (6.18) mit dem Anfangswert $\gamma(0) = (0, z)$ mit $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $|z| < \varepsilon$ genau eine Lösung auf dem Interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hat, die stetig nach t und x differenzierbar ist. Die Ableitung der Abbildung $\Phi : (t, z) \to \gamma(t)$ ist die invertierbare lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz von der inversen Funktion ist Φ ein Diffeomorphismus auf das Bild, zumindest wenn wir notfalls ε verkleinern. Ist $x = \Phi(t, z)$ so ist $u(x)$ die Lösung der Gleichung (6.19) wobei γ die Kurve mit Anfangswert $(0, z)$ ist. Jede Lösung hat diese Form, und umgekehrt erhalten wir so immer eine Lösung. □

Beispiel. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$, $b(x) = (-x_2, x_1)$. Für jedes $r > 0$ ist $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ eine Lösung von (6.18). Deshalb ist

$$\frac{d}{dt} u(\gamma(t)) = c(u(\gamma(t)), \gamma(t)) . \tag{6.21}$$

Falls $c = 0$, ist das zu

$$u(x) = \phi(|x|) \tag{6.22}$$

äquivalent. Für $c(z, x) = 1$ oder $c(z, x) = z$ ist es leicht zu sehen, dass keine Lösung in $\mathbb{R}^2$ existiert. Für alle $x_* \neq 0$ existiert aber eine Lösung in einer Umgebung von x_*.

6.1.5 Die Richtung b hängt von x und $u(x)$ ab

Betrachten wir jetzt

$$b(u(x), x) \cdot Du(x) = c(u(x), x) . \tag{6.23}$$

Um $\dot{\gamma}(t)$ wie in (6.18) zu bewerten, benötigen wir nicht nur $\gamma(s)$, sondern auch $u(\gamma(t))$. Deshalb wird die Kurve erweitert. Wir suchen $G \in C^1(I;\mathbb{R}^{n+1})$, so dass

$$G(t) = (u(\gamma(t)), \gamma(t))\,. \tag{6.24}$$

Wir werden die erste Komponente mit G_0 bezeichnen, die restlichen mit $G_i = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$, d.h., $G = (G_0, \gamma)$. Dann muss G die ODE

$$\frac{d}{dt}G(t) = \begin{pmatrix} c(G(t)) \\ b(G(t)) \end{pmatrix} \tag{6.25}$$

erfüllen. Falls $u(x_*) = u_*$ dann liefert $G(0) = (x_*, u_*)$ die Anfangbedingung für die ODE.

Lemma 6.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $b \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R}^n)$, $c \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$, $x_* \in \Omega$, $u_* \in \mathbb{R}$. Sei $G \in C^1((-\delta, \delta); \mathbb{R} \times \Omega)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}G(t) = \begin{pmatrix} c(G(t)) \\ b(G(t)) \end{pmatrix} \\ G(0) = (x_*, u_*)\,. \end{cases} \tag{6.26}$$

und $u \in C^1(\Omega)$ eine Lösung von (6.23), mit $u(x_*) = u_*$. Dann gilt

$$u(\gamma(t)) = G_0(t) \tag{6.27}$$

für alle $t \in (-\delta, \delta)$.

Beweis. Sei mit der obigen Notation $U(t) = u(\gamma(t))$. Dann gilt (mittels (6.23) für $x = \gamma(t)$)

$$\frac{d}{dt}U = b(G_0(t), \gamma(t))Du(\gamma(t)) = (b(G_0(t), \gamma(t)) - b(U(t), \gamma(t)))Du(\gamma(t)) + c(U(t), \gamma(t))$$

Wir schreiben diese Gleichung als

$$\frac{d}{dt}U = F(t, U)$$

mit dem Anfangswert $U(0) = u_*$ und

$$F(t, U) = (b(G_0, \gamma(t)) - b(U(t), \gamma(t)))Du(\gamma(t)) + c(U(t), \gamma(t)).$$

Dann ist $U(t) = G_0(t)$ die eindeutige Lösung mit Anfangswert u_* und damit ist $U(t) = G_0(t)$. Daraus folgt die Aussage des Lemmas. ☐

Satz 6.9. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ offen, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine $n-1$-dimensionale C^1 Mannigfaltigkeit, $b \in C^1(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$, $c \in C^1(J \times \Omega)$, $g \in C^1(\Gamma)$, $x_* \in \Omega \cap \Gamma$*

mit $g(x_*) \in J$ *und* $b(g(x_*), x_*) \cdot \nu(x_*) \neq 0$, *wobei* ν *die Normale auf* Γ *ist. Dann gibt es eine Umgebung* ω *von* x_*, *so dass das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} b(u(x), x) \cdot Du(x) = c(u(x), x) & \text{in } \omega \\ u(x) = g(x) & \text{für } x \in \omega \cap \Gamma \end{cases} \tag{6.28}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\omega)$ *besitzt.*

Beweis. Der Beweis erfolgt fast genauso wie der Beweis von Satz 6.7: Nach einem Diffeomorphismus dürfen wir annehmen, dass $\Gamma \subset \{(0, z) : z \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ und $x_* = 0$.

Wir betrachten die charakteristische Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} G(t) = \begin{pmatrix} c(G(t)) \\ b(G(t)) \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangswert

$$G(0) = (u(z), 0, z)$$

wobei z wieder ein Parameter ist. Wieder existiert $\varepsilon > 0$ so dass die gewöhnliche Differentialgleichgleichung eine eindeutige Funktion von s und z für $|s| < \varepsilon$ und $|z| < \varepsilon$ besitzt. Die Abbildung

$$(s, z) \to G(s)$$

ist wieder ein Diffeomorphismus in einer Umgebung der Null. Nach Lemma 6.8 ist jede Lösung durch die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichung bestimmt. Umgekehrt definieren die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichung die eindeutige Lösung der partiellen Differentialgleichung. □

15.07.16

6.1.6 Voll nichtlineare Gleichungen erster Ordnung

Wir betrachten Gleichungen der Art

$$F(Du, u, x) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u = g \qquad \text{für } x \in \Gamma$$

wobei Γ eine C^2 Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist und F und g gegeben sind.

Mittels einer Koordinatentransformation können wir Γ 'geradebiegen' zu $\Gamma = \{x \in \Omega : x_1 = 0\}$. Wir bennen die Variablen um und schreiben t für x_1, ersetzen n durch $n-1$ und schreiben das Problem in der Form

$$F(u_t, D_x u, u, t, x) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$$u(0, x) = g(x) \qquad \text{auf } \Omega \cap \{t = 0\}.$$

Für $t = 0$ fassen wir die Gleichung als eine Gleichung für u_t auf. Wir fordern für $(0, x_=) \in \Omega$

(i) F ist zweimal stetig differenzierbar.

(ii) Die Gleichung $F(v, D_x g(x_*), g(x_*), 0, x_*) = 0$ hat genau eine Lösung.

(iii) Die Ableitung $\partial_v F(v, D_x g(x_*), g(x_*), +, x_*) = 0$ ist nicht Null, wobei v die eindeutige Lösung ist.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt so nennen wir Γ nicht charakteristisch. Wir betrachten $g \in C^2$. Ist Γ in x_* nicht chakteristisch so können wir in einer Umgebung nach v auflösen und wir können die Gleichung in der Form

$$u_t + H(D_x u, u, t, x) = 0$$

schreiben. Wir suchen nun eine ähnliche Verbindung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wie bei den quasilinearen Gleichungen. Wir betrachten $H = H(p, z, t, x)$ und schrieben $G(t) = (p(t), z(t), x(t))$. Sei $u \in C^2$ eine Lösung. Wir suchen

$$z(t) = u(t, x(t)), \quad p(t) = Du(t, x(t)).$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i x_j} u(t, x(t)) \dot{x}_j(t) + \partial^2_{t x_j} u(t, x(t)).$$

Alternativ können wir die Gleichung nach x_j differenzieren. Dann folgt

$$\partial^2_{t x_j} u + \partial_{p_i} H \partial^2_{x_i x_j} u + \partial_{x_j} H = 0.$$

Mit

$$\dot{x}_j = \partial_{p_j} H(p, z, t, x) \tag{6.29}$$

heben sich die Terme mit zweiten Ableitungen weg und

$$\dot{p}_j = -\partial_{x_j} F(p, z, t, x), \tag{6.30}$$

$$\dot{z} = -H + \sum_{j=1}^n p_j \partial_{p_j} H. \tag{6.31}$$

Die Gleichungen (6.29)-(6.31) heißen charakteristische Gleichungen und die Lösungen sind Charateristiken.

Unsere Rechnung zeigt: Ist $u \in C^2$ eine Lösung und $u(0, x_*) = g_*$, $\partial_{x_j} u(0, x_*) = p_{j,*}$ und ist $(p(t), z(t), x(t))$ eine Lösung der charakteristischen Gleichungen mit diesem Anfangswert, so folgt

$$u(x(t)) = z(z), \quad p_j(t) = \partial_{x_j} u(t, x(t)).$$

Umgekehr kann man wie im quasilinearen Fall Lösungen der nichtlinearen Gleichung mit Hilfe der Charakteristiken konstruieren.

6.2 Hamilton-Jacobi Gleichungen

Der Fall $H = H(p,x)$ heißt Hamilton-Jacobi Gleichung. In diesem Fall heißen die ersten zwei charakteristische Gleichungen

$$\dot{x}_j = \partial_{x_j} H \qquad \dot{p}_j = -\partial_{p_j} H$$

Hamiltonsche Gleichungen und H ist die Hamiltonfunktion. Die dritte Gleichung

$$\dot{z} = \sum_{j=1}^{n} p_j \partial_{p_j} H - H$$

ist von untergeordneter Bedeutung.

6.2.1 Die Legendretransformation

Definition 6.10. *Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und es gelte*

$$\lim_{|q|\to\infty} \frac{L(q)}{|q|} = \infty.$$

Die Legendretransformation ist

$$L^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \langle p, q\rangle - L(q).$$

Da

$$\lim_{|q|\to\infty} \langle p, q\rangle - L(q) = \lim_{|q|\to\infty} |q|(\langle p, q/|q|\rangle - L(q)/|q|) = -\infty$$

wird das Supremum in einem Punkt q^* angenommen. Ist L zusätzlich differenzierbar so folgt in jedem kritischen Punkt und insbesondere in q^*

$$p = DL(q^*).$$

Wir nennen nun $L^*(p) =: H(p)$.

Satz 6.11. *Sei L konvex und $\lim_{|q|\to\infty} L(q)/|q| = \infty$. Dann ist H konvex und $\lim_{|p|\to\infty} H(p)/|p| = \infty$. Außerdem gilt $H^* = L$.*

Beweis. 1) Für festes q ist $p \to \langle p, q\rangle - L(q)$ linear (genauer affin) und damit konvex. Das Supremmum konvexer Funktionen ist wieder konvex. In diesem Fall sieht man das mit Hilfe einer Rechnung: Sei $p, \tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ und $0 < \lambda < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
H(\lambda p + (1-\lambda)\tilde{p}) =& \sup_q \lambda\langle p, q\rangle + (1-\lambda)\langle \tilde{p}, q\rangle - L(q) \\
\leq& \lambda \sup_q\{\langle p, q - L(q)\} + (1-\lambda)\sup_q\{\langle \tilde{p}, q - L(q)\} \\
=& \lambda H(p) + (1-\lambda)H(\tilde{p})
\end{aligned}$$

woraus folgt dass H konvex ist.

2. Sei $\lambda > 0$ und $p \neq 0$. Es gilt

$$H(p) = \sup_q \langle p, q\rangle - L(q) \geq \lambda|p| - L(\lambda p/|p|) \geq \lambda|p| - \max_{B_\lambda(0)} L$$

und daher

$$\liminf_{|p|\to\infty} H(p)/|p| \geq \lambda.$$

Da λ beliebig ist folgt $\lim_{|p|\to\infty} H(p)/|p| = \infty$.

3. Für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$H(p) + L(q) \geq \langle p, q\rangle$$

und damit

$$L(q) \geq H^*(q).$$

4. Wir wollen nun die umgekehrte Ungeleichung zeigen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} H^*(q) &= \sup_p (\langle p, q\rangle - \sup_r \langle p, r\rangle - L(r) \\ &= \sup_p \inf_r \langle p, q-r\rangle + L(r) \end{aligned}$$

Da L konvex ist (und wir nehmen wieder an: $L \in C^1$) folgt mit $s = \nabla L(q)$

$$H^*(q) \geq \inf_r \langle s, q-r\rangle + L(r) = L(q)$$

□

19.07.2016

Eine Lagrangefunktion $L \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ist eine Funktion, die in der ersten Variablen konvex ist, und für die

$$\lim_{|q|\to\infty} \frac{L(q,x)}{|q|} = \infty$$

gleichmäßig in x. Die Legendretransformation bezüglich der ersten Variablen nennen wir $H(p, x)$.

Definition 6.12 (Hopf-Laxformel)**.** *Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig definieren wir*

$$u(t,x) = \inf\{g(w(0)) + \int_0^t L(\dot{w}, w) ds : w \in C^1([0,t]; \mathbb{R}^n), w(t) = x\}$$

Lemma 6.13. *Ist $L \in C^2$ und ist $x \in C^2$ ein Minimierer so gilt*

$$-\frac{d}{dt}\Big[\partial_{q_i} L(\dot{x}, x)\Big] + \partial_{x_i} L(\dot{x}, x) = 0$$

und mit $p_i = \partial_{q_i} L$

$$\dot{x}_i = \partial_{p_i} H, \qquad \dot{p}_i = -\partial_{x_i} H.$$

Hier ist jeweils $1 \leq i \leq n$.

Lemma 6.14. *Sei* $0 \leq s < t$. *Dann gilt*

$$u(t,x) = \inf \left\{ u(s,y) + \int_s^t L(\dot{w},w)d\tau : w \in C^1([s,t]), w(t) = x \right\}$$

Beweis. Sei

$$v(t,x) = \inf \left\{ u(s,y) + \int_s^t L(\dot{w},w)d\tau : w \in C^1([s,t]), w(t) = x \right\}.$$

Zu zeigen ist $v(t,x) = u(t,x)$. Sei $\varepsilon > 0$ und $w \in C^1([0,t])$ mit

$$g(w(0)) + \int_0^t L(\dot{w},w)ds < u(t,x) + \varepsilon$$

Dann ist

$$u(s,w(s)) \leq g(w(0)) + \int_0^s L(\dot{w},w)d\tau$$

und

$$v(t,x) \leq u(s,w(s)) + \int_s^t L(\dot{w},w)d\tau \leq g(w(0)) + \int_0^t L(\dot{w},w)d\tau \leq u(t,x) + \varepsilon.$$

Sei nun $w \in C^1([s,t])$ ein Weg mit

$$v(t,x) \leq u(s,w(s)) + \int_s^t L(\dot{w},w)d\tau + \varepsilon/2$$

und $\tilde{w} \in C^1([0,s])$ mit $\tilde{w}(s) = w(s)$ und

$$g(w(0)) + \int_0^s L(\dot{\tilde{w}},\tilde{w})dt\tau < u(s,w(s)) + \varepsilon/2$$

Wir setzen die beide Teile zu einem $\bar{w}$ zusammen: Wir wählen $s < \sigma < t$ und definieren

$$\bar{w}(\tau) = \begin{cases} \tilde{w}(\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq s \\ w(\tau) & \text{für } \sigma \leq \tau \leq t \end{cases}$$

und zwischen s und σ wählen wir eine C^1 Polynominterpolation. Dann folgt

$$\begin{aligned} u(t,x) \leq & g(\bar{w}(0)) + \int_0^t L(\dot{\bar{w}},\bar{w})dx \\ \leq & u(s,w(s)) + \int_s^t L(\dot{\bar{w}},\bar{w})dx + \varepsilon/2 \\ \leq & v(x) + \varepsilon + O(\sigma - s) \end{aligned}$$

da wir den Weg nur zwischen s und σ abändern. Mit $\varepsilon \to 0$ und $\sigma \to s$ erhalten wir $v(t,x) = u(t,x)$. $\square$

Von nun an betrachten wir immer Lagrangefunktionen, die nicht von x abhängen: $L = L(q)$. Mit der Jensenschen Ungleichung gilt für $w \in C^1([s,t])$

$$\int_s^t L(\dot{w})d\tau \geq \int_s^t L((t-s)^{-1}\int_s^t \dot{w}d\tau) = (t-s)L(\frac{w(t)-w(s)}{t-s})$$

und die Hopf-Laxformel vereinfacht sich zu

$$u(t,x) = \inf_y g(y) + tL(\frac{x-y}{t}) \tag{6.32}$$

Lemma 6.15. *Die Funktion u ist Lipschitz stetig auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Es gilt $u(0,x) = g(x)$.*

Beweis. Sei $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u(t,x) = g(y) + tL(\frac{x-y}{t})$$

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} u(t,x) - u(t,\tilde{x}) \leq & g(y) + L(\frac{x-y}{t}) - g(\tilde{x} - (y-x)) - L(\frac{x-y}{t}) \\ \leq & Lip(g)|x - \tilde{x}| \end{aligned}$$

wobei $Lip(g)$ die Lipschitzkonstante von g ist, d.h. die beste Konstante für die

$$|g(x) - g(\tilde{x})| \leq Lip(g)|x - \tilde{x}|.$$

Es gilt für $s < t$ nach Lemma 6.14

$$u(t,x) \leq u(s,x) + (t-s)L(0)$$

und

$$\begin{aligned} u(t,x) = & \min_{y \in \mathbb{R}^n} u(s,y) + (t-s)L(\frac{x-y}{t}) \\ \geq & u(s,x) - \max_y [Lip(g)|x-y| - (t-s)L(\frac{x-y}{t})] \\ = & u(s,x) - (t-s)\max_z \max_{w \in B_{Lip(g)}} \langle w, z\rangle - L(z) \\ \geq & u(s,x) - (t-s) \max_{w \in B_{Lip(g)}(0)} H(w) \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir die Lipschitzstetigkeit in t und $u(0,x) = g(x)$. □

Satz 6.16. *Ist u differenzierbar im Punkt (t,x) so gilt*

$$\partial_t u(t,x) + H(D_x u(t,x)) = 0.$$

Beweis. Sei (t,x) ein Punkt in dem u differenzierbar ist. Sei $h > 0$ und $q \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt mit Lemma 6.14

$$\begin{aligned} u(t+h, x+hq) =& \min_y u(t, x+hq-y) + hL(\frac{x+hq-y}{h}) \\ \geq& u(t,x) + hL(q) \end{aligned}$$

und damit

$$\partial_t u(t,x) + q\nabla u(t,x) \geq L(q)$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + H(Du(t,x)) =& \partial_t u(t,x) + \min_{\tilde{q}} \langle \tilde{q}, Du\rangle - L(\tilde{q}) \\ \geq& \partial_t u(t,x) + q\nabla u - L(q) \\ \geq& 0 \end{aligned}$$

Für die umgekehrte Ungleichung sei $y \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$u(t,x) = g(y) + tL(\frac{x-y}{t}).$$

Sei $s \in (0,t)$ und $z = y + s\frac{x-y}{t}$. Dann ist

$$L(\frac{x-y}{t}) = L(\frac{z-y}{s}) = L(\frac{x-z}{t-s})$$

und

$$u(t,x) - u(s,z) \leq g(y) + tL(\frac{x-y}{t}) - (g(y) + sL(\frac{x-y}{t})) = (t-s)L(\frac{x-y}{t}).$$

Wir wählen $s = t-h$ und erhalten mit $q = \frac{x-y}{t}$

$$\partial_t u + q\nabla u - L(q) \leq 0$$

und

$$\partial_t u + H(Du) \leq \partial_t u + q\nabla u - L(q) \leq 0$$

und damit folgt die Gleichung. $\square$

Interpretation: Die Hopf-Laxformel definiert eine verallgemeinerte Lösung der Hamilton-Jacobigleichung.