Aufgabe 1(3+4+3)

Seine M und N metrische Räume und sei $f : M \to N$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie die folgenden drei Aussagen:

(a) Ist U eine offene Teilmenge von N, so ist $f^{-1}(U) := \{m \in M : f(m) \in U\}$ offen in M.

(b) Ist Z eine zusammenhängende Teilmenge von M, so ist $f(Z) := \{f(z) : z \in Z\}$ zusammenhängend in N.

(c) Ist Z eine wegzusammenhängende Teilmenge von M, so ist $f(Z)$ wegzusammenhängend in N.

Aufgabe 2(2+2+6)

(a) Definieren Sie Folgenkompaktheit einer Menge K in einem metrischen Raum.

(b) Definieren Sie Überdeckungskompaktheit einer Menge K in einem metrischen Raum.

(c) Zeigen Sie: Überdeckungskompaktheit impliziert Folgenkompaktheit.

Aufgabe 3(2+3+5)

(a) Formulieren Sie das Parallelogrammgesetz in einem Hilbertraum.

(b) Beweisen Sie: Ist A eine konvexe Menge in einem Hilbertraum H und $x \in H$, so existiert höchstens ein $y \in A$ mit $\|y - x\| = \inf_{z \in A} \|y - z\|$.

(b) Beweisen Sie: Ist A eine abgeschlossene konvexe Menge in einem Hilbertraum H und $x \in H$, so existiert mindestens ein $y \in A$ mit $\|y - x\| = \inf_{z \in A} \|y - z\|$.

Aufgabe 4(3+4+3)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + 2y^2}$$

falls $(x, y) \neq 0$ und $f(0, 0) = 0$

(a) Ist f partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$?

(b) Für welche Richtungen $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung von f im Punkte $(0, 0)$ in Richtung (v, w) ? Berechnen Sie diese Richtungsableitungen, wann immer sie existieren.

(d) Ist f total differenzierbar im Punkt $(0, 0)$?

Begründen Sie Ihre Aussagen in allen Aufgabenteilen.

Aufgabe 5(5,5)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale, Sie dürfen Ihnen bekannte Sätze anwenden.

(a)

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 xy\sin(xy^2)dx \right] dy$$

(b)

$$\int_A e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

wobei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x^2 + y^2 < b$

Aufgabe 6(3+4+3)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = x^2 e^x + y e^{-\frac{y^2}{2}}$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(b) Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen lokale Extrema vorliegen, und entscheiden Sie ggf. ob es sich dabei um Minima oder Maxima handelt.

(c) Besitzt die Funktion globale Extrema? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 7(3+3+4)

Welche der folgenden Vektorfelder sind Gradienten einer Funktion auf den angegebenen Definitionsbereichen? Geben Sie ggf. eine solche Funktion an oder begründen Sie, dass eine solche nicht existiert.

(a) $F(x, y) = (2x + y, x + 4y)$, definiert auf $\mathbb{R}^2$

(b) $F(x, y) = (e^{-x^2} + 2y, 3x + e^{-y^2})$, definiert auf $\mathbb{R}^2$

(c) $F(x, y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$, definiert auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Aufgabe 8 (4+3+3)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion gegeben durch

$$f(x, y) = (e^x + y, 2x + \sin(x + y))$$

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit $g(0, 0) = (0, 0)$ und $g(1, 1) = (0, 0)$ und totaler Ableitung an den Stellen $(0, 0)$ und $(1, 1)$ gegeben durch

$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die totale Ableitung der Funktion $f \circ g$ an der Stelle $(0, 0)$

(b) In welchen der Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ ergibt der Satz über inverse Funktionen, dass die Funktion $f \circ g$ eingeschränkt auf einen hinreichend kleine Kreisscheibe um den entsprechenden Punkt invertierbar ist? Begründen Sie Ihre Behauptung in beiden Fällen.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der inversen Funktion $(f \circ g)^{-1}$ im Punkte $(1, 0)$, die Sie im Punkt (b) gefunden haben.

Aufgabe 9 (3+3+4)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz

(b) Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage im Banachschen Fixpunktsatz

(c) Beweisen Sie die Existenzaussage im Banachschen Fixpunktsatz

Aufgabe 10(5,5)
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) := e^{2\pi x}$$

(a) Berechnen Sie die Fouriersche Reihe von f.

(b) Benutzen Sie das Ergebnis, um die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

zu berechnen.