
Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 12

Abgabe in der Vorlesung am 9. Juli 2015

Aufgabe 45 (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

Bestimmen Sie Lage und Typ der Singularitäten folgender Funktionen:

- a) $\sin(z^{-2})$.
- b) $\frac{7z^2+1}{z^2-4}$.
- c) $\frac{1}{\exp(z)-1}$.
- d) $\frac{(z-1)^2(z+3)}{1-\sin(\frac{\pi}{2}z)}$.

Aufgabe 46 (5 + 5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Identitäten:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$.
- b) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sei $a := e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi}$ und $f(z) := \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2\pi z}}$. Zeigen sie zuerst die Identität $f(z) - f(z+a) = e^{-z^2}$ und integrieren Sie dann längs eines Parallelogramms mit den Ecken $-R, -R+a, R+a, R$.

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Benutzen Sie den Residuensatz um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Formel $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f) - P(f)$, wobei $N(f)$ die Anzahl der Nullstellen und $P(f)$ die Anzahl der Polstellen von f im Innern der einfach geschlossenen Kurve γ bezeichne.