Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

universitätbonn

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 11 — Abgabe in der Vorlesung am 2. Juli 2015

Aufgabe 41 (3 + 4 + 4 + 3 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzgebiete folgender Laurent-Reihen und begründen Sie Ihre Antworten:

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|} z^n$.

b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}$.

c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{1+n^2}$.

d) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} 2^n (z+2)^n$.

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass konvergente Laurent-Reihen gliedweise differenzierbar sind.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Diskutieren Sie, ob die folgende „Identität“ dem Satz über die Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung widerspricht:

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n.$$

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Sei $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ ein Kreisring. Entwicklen Sie die durch

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

definierte Funktion in den Kreisringen $K_{0,1}(0)$, $K_{1,2}(0)$ und $K_{2,\infty}(0)$ jeweils in eine Laurent-Reihe.