Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 10 — Abgabe in der Vorlesung am 25. Juni 2015

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ gibt mit $h(z_0) = 0$ und $f(z) = f(z_0)\, e^{h(z)}$.

Hinweis: Betrachten Sie für einen beliebigen Punkt $a \in G$ die Funktion $\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$, wobei γ_z die Stecke ist, die a und z verbindet.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Sei $D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ und f eine Funktion, die in einer Umgebung von D_r holomorph ist mit $f(0) \neq 0$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Die mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen von f auf D_r seien $z_1, \ldots, z_n$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|f(re^{i\theta})|)\, d\theta = \log(|f(0)|) + \sum_{j=1}^{n} \log(r|z_j|^{-1}).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Formel zuerst unter der Annahme, dass f auf D_r nullstellenfrei ist. Führen Sie den Beweis dann für Funktionen der Form $f(z) = z - z_0$, $z_0 \in D_r \setminus \{0\}$, indem Sie Funktionen der Form $g(z) = \frac{r(z-z_0)}{r^2 - z\,\overline{z_0}}$ verwenden.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung α, das heißt es existiere $\alpha > 0$ mit

$$f(z) = O\left(\exp(|z|^{\alpha})\right).$$

Für $r \in (0, \infty)$ sei

$$N_f(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0 \text{ und } |z| \leq r\} \text{ und } \mathcal{N}_f(r) := \sum_{N_f(r)} m(z),$$

wobei $m(z)$ die Vielfachheit der Nullstelle z bezeichne. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 38, dass $\mathcal{N}_f(r) = O(r^{\alpha})$ für $r \to \infty$.

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung α und $N_f := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 39, dass

$$\sum_{z \in N_f \setminus \{0\}} m(z)\, |z|^{-\beta}$$

für jedes $\beta > \alpha$ konvergiert.