Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 7 — Abgabe in den Übungen am 5. Juni 2015

Aufgabe 25 (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

Bestimmen und begründen Sie, welche der folgenden Funktionen f eine hebbare Singularität in $z = 0$ haben.

a) $f(z) := \frac{\exp(z)}{z^{17}}$.

b) $f(z) := \frac{(\exp(z)-1)^2}{z^2}$.

c) $f(z) := \frac{z}{\exp(z)-1}$.

d) $f(z) := \frac{\cos(z-1)}{z^2}$.

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Definiere

$$M := \left\{ z \in G \mid \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} \right\}.$$

Zeigen Sie: Wenn M nicht diskret ist, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f = c\,g$.

Aufgabe 27 (5 + 5 Punkte)

Sei $D_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

b) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : D_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit unendlich vielen Nullstellen.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Es sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Zeigen Sie: f hat den Konvergenzradius $R = 1$ und kann auf kein Gebiet $G \supsetneq D_1(0)$ analytisch fortgesetzt werden.

Hinweis: Beachten Sie, dass nicht gefordert wird, dass der Abschluss der Einheitskreises im Gebiet liegen soll. Betrachten Sie das Verhalten von f bei Annäherung an Randpunkte der Form $e^{2\pi i q}$, $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass man die Gamma-Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ analytisch fortsetzen kann.

Hinweis: Spalten Sie das Integral auf und entwickeln Sie e^{-t} im Integral von 0 bis 1 in die Potenzreihe.