Mathematisches Institut
Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Clemens Kienzler
Sommersemester 2015

Einführung in die Komplexe Analysis

Übungsblatt 6 — Abgabe in der Vorlesung am 21. Mai 2015

Aufgabe 21 (3 + 3 + 4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z^n}{(z-1)^n}\, dz.$

b) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\, dz.$

c) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+i}\, dz.$

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Sei $R > 0$, sowie $\gamma_1 : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) := t$, $\gamma_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_2(t) := R\, e^{it}$ und $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$. Zeigen Sie, dass $\int\limits_{\gamma} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \pi$ gilt.

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Verwenden Sie komplexe Analysis, um das reelle Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$ zu berechnen.

Hinweis: Herangehensweise wie in Aufgabe 22.

Aufgabe 24: Schwarzsches Spiegelungsprinzip (10 Punkte)

Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, d.h. es gilt $z \in G \Longleftrightarrow \overline{z} \in G$. Weiter sei

$$G_+ := \{z \in G \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad G_- := \{z \in G \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}, \quad G_0 := G \cap \mathbb{R}.$$

Sei außerdem $f : G_+ \cup G_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f|_{G_+}$ holomorph und $f(G_0) \subset \mathbb{R}$. Definiere $\tilde{f} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in G_+ \cup G_0, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in G_-. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ holomorph ist.

Hinweis: Satz von Morera.