Untersuchungen zu den parabolischen Kazhdan-Lusztig-Polynomen für affine Weyl-Gruppen

Wissenschaftliche Arbeit für das Lehramt an Gymnasien

 $\begin{array}{c} {\rm vorgelegt\ von} \\ {\bf Catharina\ Stroppel} \end{array}$

aus Tuttlingen

Fakultät für Mathematik der Universität Freiburg i. Br. Juli 1997

Inhaltsverzeichnis

Ei	inleitung	3
1	Allgemeine Vorbemerkungen und Definitionen 1.1 Hecke-Algebra und Dualität	5 5 6 8 10
2	Im Innern der dominanten Weylkammer 2.1 Allgemeine Formel 2.2 Periodische Patterns 2.3 Veranschaulichung der Patterns in Bildern 2.3.1 Bilder der \mathcal{P} -Patterns 2.3.2 Bilder der \mathcal{N} -Patterns	11 11 12 13 13
3	Am Rand der dominanten Weylkammer 3.1 Periodizität im Fall A_2	35 35 35 36 39 45
4	Stabilitätsaussagen am Rand	64
Li	iste der Notationen	68
Li	iteraturverzeichnis	70

Einleitung

Bei der Untersuchung von Moduln über Kac-Moody-Algebren interessiert man sich besonders für Moduln mit höchstem Gewicht. Die "Prototypen" dieser Moduln sind die sogenannten Vermamoduln, da jeder andere Modul mit höchstem Gewicht ein homomorphes Bild eines Vermamoduls ist. (Näheres dazu findet man z.B. in [Di, Kapitel 7], [Kc, Kapitel 9]). Zu gegebenem Gewicht λ existiert bis auf Isomorphie genau ein solcher Vermamodul $M(\lambda)$. Dieser hat genau einen einfachen Quotienten $L(\lambda)$, der ebenfalls Modul zum höchsten Gewicht λ ist. Ist \mathfrak{g} eine Kac-Moody-Algebra vom endlichen Typ (also eine endlich-dimensionale halbeinfache zerfallende Liealgebra), so besitzt jeder \mathfrak{g} -Modul zum höchsten Gewicht λ (sogar jeder Modul aus der Kategorie \mathcal{O}) eine endliche Jordan-Hölder-Reihe, deren einfache Faktoren zu bestimmten $L(\mu)$ isomorph sind, wobei μ in der Bahn von λ unter der dot-Operation der Weylgruppe auf den Gewichten liegt (siehe [Ve]). Ist nun \mathfrak{g} eine Kac-Moody-Algebra vom affinen Typ, gilt diese Aussage nur noch abgeschwächt. In diesem Fall besitzt nicht jedes Objekt der Kategorie \mathcal{O} eine Jordan-Hölder-Reihe. Allerdings ist die Anzahl, mit der ein einfacher Modul $L(\mu)$ als Kompositionsfaktor in einer endlichen Filtrierung vorkommt, nach oben beschränkt. (Näheres dazu in [Kc, Satz 9.6], [MP, Prop. 8, S.148]).

Von Interesse sind nun die Multiplizitäten $[M(\lambda):L(\mu)]$, das heißt das Supremum der Anzahlen, mit der ein einfacher Faktor $L(\mu)$ tatsächlich in einer Filtrierung von $M(\lambda)$ vorkommt. Gewisse Multiplizitäten oder Schranken wurden auf vielfache Weisen bestimmt (siehe bspw. [Ja1],[Ja2],[Di],[BGG]). Für den endlichen Fall sind inzwischen alle bekannt.

Durch die (in [BB], [BK] bewiesene) Kazhdan-Lusztig-Vermutung ([KL, Conjecture 1.5]) verschiebt sich das Problem der Multiplizitätenbestimmung auf das Gebiet der Kombinatorik. Die Aussage dieses Satzes ist, daß die Multiplizität $[M(\lambda):L(\mu)]$ im endlich-dimensionalen Fall genau der Wert eines bestimmten kombinatorisch definierten Laurentpolynoms an der Stelle 1 ist. Liegt μ nicht in derselben Bahn unter der dot-Operation wie λ , gilt -wie bereits erwähnt- stets $[M(\lambda):L(\mu)]=0$. Die Vermutung wurde auf symmetrisierbare Kac-Moody-Algebren verallgemeinert ([DGK]) und 1989 bewiesen ([Ka]). Für den symmetrisierbaren parabolischen Fall gilt die entsprechende Aussage (siehe [So2, Prop 7.5]): Sei W_f die parabolische Weylgruppe und W^f die Menge der kürzesten Repräsentanten der Rechtsnebenklassen von W_f in W. Die Multiplizität von $L(\mu)$ in dem parabolischen Vermamodul $M^f(\lambda)$ ist wiederum Null, falls λ und μ nicht in derselben Bahn unter der dot-Operation von W^f liegen. Ist hingegen λ ein Gewicht, das an jeder dualen einfachen Wurzel einen positiven ganzzahligen Wert annimmt, dann gilt für $x, y \in W^f$ die Gleichung $[M^f(x \cdot \lambda): L(y \cdot \lambda)] = n_{x,y}(1)$. Hierbei bezeichnet $n_{x,y}$ eines der parabolischen Kazhdan-Lusztig-Polynome. Ihre Definition findet man im einführenden Kapitel dieser Arbeit (Definition 1.7). Das Problem ist allerdings, daß diese Polynome rekursiv definiert und deshalb explizit schwer zu bestimmen sind.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Polynome $n_{x,y}$ für den parabolischen affinen Fall. Ist nun W^f das Erzeugnis aller einfachen Spiegelungen, die den Nullvektor festlassen, dann ist W_f gerade die endliche Weylgruppe. Auf natürliche Weise findet man dann eine Bijektion zwischen W^f und der Menge der Alkoven der dominanten Weylkammer. Damit erhält man eine "Alkovenschreibweise" für die Polynome. Liegt nun der Alkoven A der dominanten Weylkammer genügend

4 Einleitung

weit von allen Wänden der endlichen Weylgruppe entfernt, gilt für jeden Alkoven B der dominanten Weylkammer $n_{A,B} = n_{t+A,t+B}$, wobei t+A den um ein ganzes dominantes Gewicht t verschobenen Alkoven A bezeichnet. Insbesondere sind die entsprechenden Multiplizitäten gleich. Diejenigen Polynome, die die obige Forderung an den Alkoven A erfüllen, können für jedes beliebige Wurzelsystem durch eine endliche Rekursionsformel ausgedrückt werden. Diese bereits bekannten Ergebnisse werden in Kapitel 2 nochmals angeführt. Für Wurzelsysteme vom Rang zwei werden die berechneten Polynome aufgelistet.

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Vermutung, daß die oben angesprochene Translationsinvarianz auch für die Polynome $n_{A,B}$ gilt, wobei der Alkoven A nahe bei einer Wand F der endlichen Weylgruppe, die das fundamentale Gewicht t enthält, liegen darf, aber von allen anderen Wänden der endlichen Weylgruppe genügend weit entfernt ist. Bereits im zweidimensionalen Fall zeigt sich jedoch, daß dies so allgemein nicht richtig ist. Im Kapitel 3 werden deshalb die Polynome für die einzelnen Wurzelsysteme vom Rang zwei auf diese beschriebene Periodizität untersucht. Auch wenn sich die Polynome nicht gemäß der Vermutung verhalten, kann man dennoch eine gewisse Systematik erkennen, die es erlaubt, (im zweidimensionalen Fall) mit der Kenntnis relativ weniger Polynome alle weiteren anzugeben (dieses Resultat findet man in den Sätzen 3.5 und 3.6). In diesem Fall ist auch sofort eine obere Schranke für die Multiplizitäten erkennbar. Wegen der erkennbaren Systematik im Verhalten der Polynome unter Translationen um ganze dominante Gewichte erhält man zusätzlich eine obere Schranke für die Exponenten, die auftreten können. Der zweidimensionale Fall wird in den Kapiteln 2 und 3 vollständig behandelt, und alle Polynome werden konkret angegeben.

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß sich die Polynome auch für höhere Dimensionen –wenn nicht periodisch– zumindest systematisch verhalten. Es ist jedoch unklar, wie man diese Aussage verifizieren könnte, ohne tatsächlich einige Polynome auszurechnen. Eventuell könnte dies dadurch gelingen, daß man die starke Aussage benutzt, daß die Koeffizienten tatsächlich natürliche Zahlen sind.

Eine Abschwächung der ursprünglichen Vermutung, die zentrale Aussage dieser Arbeit, findet man in Kapitel 4 (Satz 4.2). Sie besagt, daß (bei beliebiger Dimension) für ein ganzes dominantes Gewicht t stets $n_{A,B} = n_{t+A,t+B}$ gilt, wenn A genügend weit von allen Wänden (der endlichen Weylgruppe) ausgenommen einer Wand F, in der t liegt, entfernt ist und B sich nahe bei A befindet.

Notationen: Die in dieser Arbeit verwendeten Notationen werden, sofern sie nicht allgemein üblich sind, eigens eingeführt und im Anhang nochmals tabellarisch aufgelistet. Es sollte noch darauf hingewiesen werden, daß $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$ bezeichnet.

Kapitel 1

Allgemeine Vorbemerkungen und Definitionen

1.1 Hecke-Algebra und Dualität

Dieses Unterkapitel soll dazu dienen, grundlegende Begriffe zu klären. Den Abschluß bildet die Einführung der "gewöhnlichen" KAZHDAN-LUSZTIG-Polynome. Dabei (wie auch im folgenden Kapitel) halte ich mich eng an die Ausführungen von Soergel ([So1]).

Definition 1.1 Sei W eine Gruppe. $S \subset W$ eine erzeugende Teilmenge. Dann ist (W,S) ein Coxetersystem, falls alle Elemente aus S Involutionen sind und zwei Erzeuger $s,t \in S$ mit $s \neq t$ nur Relationen der Form

$$(st)^{m(s,t)} = 1$$

genügen. Dabei soll $m(s,t) = m(t,s) \in \{2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$ gelten, wobei $m(s,t) = \infty$ gesetzt wird, falls es keine Relationen zwischen s und t gibt.

Für ein Coxetersystem (W, S) sei die zugehörige Längenfunktion $l: W \to \mathbb{N}$, $w \mapsto l(w)$ wie üblich definiert: für $w \in W - \{1\}$ sei l(w) die kleinste natürliche Zahl, so daß w ein Produkt von k Elementen aus S ist; l(1) sei 0. Eine solche minimale Produktzerlegung für w heißt reduzierte Darstellung.

Definition 1.2 Sei $w \in \mathcal{W}$ mit reduzierter Darstellung $w = s_1 s_2 ... s_{l(w)}$. Für $v \in \mathcal{W}$ setze man $w \geq v$ genau dann, wenn $v = s_{i_1} s_{i_2} ... s_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq l(w)$. Mit Hilfe des starken Austauschsatzes von Verma (siehe [Bo, IV, §1.5]) sieht man, daß dies unabhängig von der Wahl der reduzierten Darstellung ist. Auf diese Weise wird eine partielle Ordnung auf \mathcal{W} definiert, die sogenannte *Bruhat-Ordnung*.

Im folgenden sei W mit dieser Ordnung versehen.

Definition 1.3 Bezeichne $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ den Ring der Laurentpolynome über \mathbb{Z} in einer Variablen v. Der \mathcal{L} -Modul über \mathcal{W} mit Basis $\{H_x \mid x \in \mathcal{W}\}$ zusammen mit den Relationen

$$H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_s$$

 $H_x H_y = H_{xy}$, falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ $(x, y \in \mathcal{W})$

definiert eine assoziative \mathcal{L} -Algebra: die Hecke-Algebra \mathcal{H} von $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$.

 H_x ist Einheit in \mathcal{H} für alle $x \in \mathcal{W}$; es gilt $H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$ und $H_x^{-1} = (H_{s_1}...H_{s_{l(x)}})^{-1} = H_{s_l(x)}^{-1}...H_{s_1}^{-1}$, wobei $x = s_1...s_{l(x)}$ eine reduzierte Zerlegung für x ist. Deshalb ist folgende Abbildung

 $d: \mathcal{H} \to \mathcal{H}, H \mapsto \overline{H}$ durch $\overline{v} = v^{-1}$ und $\overline{H_x} = (H_{x^{-1}})^{-1}$ wohldefiniert. Sie ist sogar ein Ringhomomorphismus, denn es gilt

$$\overline{H_s^2} = \overline{1 + (v^{-1} - v)H_s} = 1 + (v - v^{-1})H_s + (v - v^{-1})^2$$

$$= 1 + (v^{-1} - v)H_s + 2(v - v^{-1})H_s + (v - v^{-1})^2 = \overline{H}_s\overline{H}_s.$$

Ebenso folgt mit Hilfe der oben angegebenen Formel für das Inverse, daß $\overline{H_{xy}} = \overline{H_x H_y} = \overline{H_x H_y}$, falls l(x) + l(y) = l(xy). Ansonsten zerlege man $xy = x_1 x_2 \cdots x_n$, so daß stets $l(x_i x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+1})$. für $1 \le i < (n-1)$ gilt. Mit den obigen Formeln erhält man dann das Gewünschte. Die unter dieser Abbildung fixen Elemente heißen selbstdual.

Bezüglich dieser selbstdualen Elemente bewiesen Kazhdan und Lusztig([KL]) folgenden Satz, der hier in der Formulierung von Soergel wiedergegeben wird:

Satz 1.4 Für alle $x \in W$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y < x} v \mathbb{Z}[v] H_y.$$

Speziell ist $\underline{H}_s = H_s + v$. Dieses Element wird auch mit C_s bezeichnet. Man definiere die "gewöhnlichen" KAZHDAN-LUSZTIG-Polynome $h_{x,y} \in \mathcal{L}$ durch $\underline{H}_x = \sum_y h_{y,x} H_y$. Man beachte, daß diese Polynome mit den von Kazhdan und Lusztig([KL]) verwendeten Bezeichnungen folgendermaßen in Beziehung stehen: C_s entspricht ihrem C_s' ; $v^{-2} = q$ und $h_{y,x} = v^{l(x)-l(y)} P_{y,x}$.

1.2 Der parabolische Fall

Dieses Unterkapitel soll in den sogenannten parabolischen Fall einführen, das heißt, es wird nur eine Teilmenge unserer Erzeugendenmenge S genommen und bezüglich dieser eine Hecke-Algebra definiert. Auf diese Weise gelangt man wiederum zu Kazhdan-Lusztig-Polynomen (vgl. hierzu bspw. [Hu2]).

Sei $(W; \mathcal{S})$ ein Coxetersystem, $\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}$ eine Teilmenge und $\mathcal{W}_f = \langle \mathcal{S}_f \rangle$ die davon erzeugte Untergruppe in \mathcal{W} . Bezeichne $\mathcal{W}^f \subset \mathcal{W}$ die Menge der Repräsentanten minimaler Länge für die Linksnebenklassen $\mathcal{W}_f \backslash \mathcal{W}$. Wir benennen mit \mathcal{H}_f die Hecke-Algebra von $(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f)$. Für festes $u \in \{-v, v^{-1}\}$ definiert die Vorschrift $H_s \mapsto u \quad \forall s \in \mathcal{S}_f$ eine Surjektion von \mathcal{L} -Algebra

$$\phi_u: \mathcal{H}_f \to \mathcal{L}$$
.

Dadurch wird \mathcal{L} (abhängig von u) zu einem \mathcal{H}_f -Bimodul $\mathcal{L}(u)$. Durch den Induktionsfunktor ind := ind $_{\mathcal{H}_f}^{\mathcal{H}}$: Mod- $\mathcal{H}_f \longrightarrow \text{Mod-}\mathcal{H}$ kann man die folgenden \mathcal{H} -Rechtsmodule definieren:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^f = \operatorname{ind}(\mathcal{L}(v^{-1})) = \mathcal{L}(v^{-1}) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}$$
$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^f = \operatorname{ind}(\mathcal{L}(-v)) = \mathcal{L}(-v) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}.$$

Mögliche Basen sind $\{M_x := 1 \otimes H_x \mid x \in \mathcal{W}^f\}$ bzw. $\{N_x := 1 \otimes H_x \mid x \in \mathcal{W}^f\}$.

Lemma 1.5 ([So1]) Die Rechtsmultiplikation mit C_s ergibt explizit folgende Formeln:

$$M_xC_s = \begin{cases} M_{xs} + vM_x, & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f, xs > x \\ M_{xs} + v^{-1}M_x, & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f, xs < x \\ (v + v^{-1})M_x, & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$
 (ii)

$$N_x C_s = \begin{cases} N_{xs} + v N_x, & falls \ xs \in \mathcal{W}^f, xs > x \\ N_{xs} + v^{-1} N_x, & falls \ xs \in \mathcal{W}^f, xs < x \\ 0, & falls \ xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$
 (ii)

Beweis: Allgemein gilt: $M_xC_s = (1 \otimes H_x)C_s = 1 \otimes H_xC_s$, bzw. $N_xC_s = (1 \otimes H_x)C_s = 1 \otimes H_xC_s$. Sei $x = s_1...s_l(x)$ eine reduzierte Zerlegung für x.

zu (i): Aus $H_xC_s = H_{s_1...s_{l(x)}}(H_s + v) = H_{s_1...s_{l(x)}s} + vH_x = H_{xs} + vH_x$ folgt direkt die Behauptung. zu (ii): Es gilt $H_xC_s = H_{s_1...s_{l(x)}}(H_s + v) = H_{s_1...s_{l(x)-1}}(H_s)^2 + vH_x = H_{xs} + v^{-1}H_x$. Damit gilt also die gewünschte Formel.

zu(iii): Sei nun $x \in W^f$, $xs \notin W^f$, also xs = rx mit $r \in \mathcal{S}_f$ und somit xs > x. Das bedeutet aber, daß $(1 \otimes H_x)C_s = (1 \otimes H_{rx}) + (1 \otimes vH_x)$ gilt, und es folgt direkt $M_xC_s = (v^{-1} + v)M_x$ bzw. $N_xC_s = (-v)N_x + vN_x = 0$. Das ist gerade die Behauptung.

Klarerweise gilt für alle $s \in \mathcal{S}_f$:

$$\phi_u(C_s) = \begin{cases} (v+v^{-1}), & \text{falls } u = v^{-1} \\ 0, & \text{falls } u = -v, \end{cases}$$

insbesondere ist es also selbstdual. \mathcal{H}_f wird als \mathcal{L} -Algebra von diesen C_s erzeugt, deshalb vertauscht ϕ_u mit der Dualität, das heißt $\phi_u(\overline{H}) = \overline{\phi_u(H)}$ für alle $H \in \mathcal{H}_f$. Durch die Vorschrift $a \otimes H \mapsto \overline{a} \otimes \overline{H}$ kann man die Dualität von \mathcal{H} zu einem Gruppenhomomorphismus auf \mathcal{M} bzw. \mathcal{N} ($M \mapsto \overline{M}$ bzw. $N \mapsto \overline{N}$) fortsetzen. Die unter dieser Abbildung fixen Elemente heißen ebenfalls selbstdual. Analog zu Satz 1.4 gilt der

Satz 1.6 ([De] in der Formulierung von [So1]) Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{N}_x \in \mathcal{N}$ mit

$$\underline{N}_x \in N_x + \sum_{y < x} v \mathbb{Z}[v] N_y.$$

(entsprechend für \mathcal{M}).

Definition 1.7 Die Koeffizienten dieser selbstdualen Elemente bezüglich der Standardbasen sind die bereits erwähnten (parabolischen) KAZHDAN-LUSZTIG-*Polynome*. Man definiere:

$$\underline{H}_{x} = \sum_{y} h_{y,x} H_{y}$$

$$\underline{M}_{x} = \sum_{y} m_{y,x} M_{y}$$

$$\underline{N}_{x} = \sum_{y} n_{y,x} N_{y}$$
(1.1)

Bezeichne $p_{y,x}$ eines dieser Polynome. Klarerweise gilt $p_{x,x} = 1$ für alle x. Ebenso folgt aus $p_{y,x} \neq 0$ bereits y < x.

Der Beweis des Satzes liefert eine induktive Beschreibung der selbstdualen Elemente: $\underline{N}_e = N_e$ erfüllt sicherlich die geforderten Bedingungen. Sei $x \in \mathcal{W}$ und \underline{N}_y bereits definiert für alle y < x. Sei $s \in \mathcal{S}$ mit xs < x. Nach Voraussetzung kann man $\underline{N}_{xs}C_s = N_x + \sum_{y < x} n_y N_y$ bilden und erhält durch Subtraktion der Anteile mit konstanten Koeffizienten eine Formel für \underline{N}_x , nämlich

$$\underline{N}_x = \underline{N}_{xs}C_s - \sum_{y < x} n_y(0)\underline{N}_y. \tag{1.2}$$

Für \mathcal{H} und \mathcal{M} gelten die Aussagen wieder völlig analog. Diese Formel erlaubt es, die Polynome explizit auszurechnen.

1.2.1 Affine Spiegelungsgruppen

Die bisher angeführte Theorie läßt sich speziell auf affine Spiegelungsgruppen anwenden. Zuerst werden nun grundlegende Definitionen und Aussagen zusammengestellt. (Näheres dazu in [Bo], [Hu1], [Kn] und vor allem für Kac-Moody-Algebren in [MP]).

Definition 1.8 Sei V ein (endllichdimensionaler) reeller Vektorraum. Eine Teilmenge R von V nennt man ein reduziertes Wurzelsystem, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

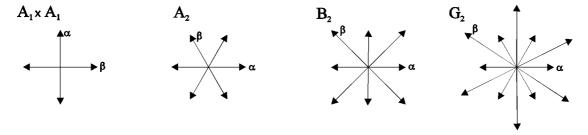
- a.) R ist endlich und erzeugt V
- b.) $\forall \alpha \in R \exists \alpha^{\vee} \in V^* : \langle \alpha, \alpha^{\vee} \rangle = 2$ und die Abbildung $s_{\alpha} : V \longrightarrow V, x \longmapsto x \langle x, \alpha^{\vee} \rangle \alpha$ bildet R auf sich ab.
- c.) $\forall \alpha \in R : \alpha^{\vee}(R) \subset \mathbb{Z}$
- d.) $\alpha \in R \Rightarrow \mathbb{R}\alpha \cap R = \{\pm \alpha\}$

Man nennt α^{\vee} die zu α duale Wurzel. Die Abbildung s_{α} läßt den Kern der dualen Wurzel zu α fest und führt α in $-\alpha$ über, ist also eine Spiegelung an einer (durch α eindeutig bestimmten Hyperebene). Die Dimension von V nennt man den Rang des Wurzelsystems.

Definition 1.9 Eine Teilmenge Δ von R heißt Basis des Wurzelsystems R, wenn folgende Bedingungen gelten:

- a.) Δ ist Basis von V
- b.) Jede Wurzel β kann entweder als nichtnegative oder nichtpositive ganzzahlige Linearkombination von Elementen aus Δ beschrieben werden, also $\beta = \sum k_{\alpha}\alpha$ (wobei $\alpha \in \Delta$, und für alle α gilt $k_{\alpha} \in \mathbb{Z}_{0}^{+}$ oder $k_{\alpha} \in \mathbb{Z}_{0}^{-}$).

Die Wurzeln in Δ nennt man einfache Wurzeln. Die Linearkombination ist jeweils eindeutig. Man nennt β positiv (bzw. negativ) und schreibt $\beta \succeq 0$ (bzw. $\beta \preceq 0$), wenn die Koeffizienten nichtnegativ (bzw. nichtpositiv) sind. Man bezeichnet die Menge aller positiven Wurzeln mit R^+ . Diese Relation läßt sich zu einer partiellen Ordnung auf V fortsetzen, indem man $\mu \preceq \lambda$ setzt, genau dann wenn $\lambda - \mu$ Summe positiver Wurzeln oder 0 ist. Man kann zeigen, daß jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt. Für Rang (R) = 2 gibt es vier reduzierte Wurzelsysteme (mit den jeweiligen Basisvektoren α und β):



Von diesen vier Wurzelsystemen ist nur das erste (in eine direkte Summe von Wurzelsystemen) zerlegbar. Im folgenden beschränken wir uns auf unzerlegbare. Sei

$$X = \{ \beta \in V^* \mid \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle \in \mathbb{Z}, \, \forall \alpha \in R \}$$

das Gitter der ganzen Gewichte und X^+ bzw. \tilde{X} die Menge der dominanten ganzen bzw. fundamentalen Gewichte. Die Automorphismen von R, die R stabil lassen, bilden eine endliche (Permutations-) Gruppe. Die Untergruppe, die von den Spiegelungen zu Wurzeln (also den s_{α}) erzeugt wird, heißt Weylgruppe zu R. Man bezeichne sie mit W. Nimmt man zu diesem Erzeugnis noch die Translationen um ganzzahlige Wurzeln dazu, gelangt man zur affinen Weylgruppe $W = W \ltimes \mathbb{Z}R$. Sie soll mit W bezeichnet werden. Insbesondere ist W der Stabilisator von W0 in W1, das heißt, $W = W_0$ 1.

Definition 1.10 Bezeichne \mathcal{F} die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus \mathcal{W} . Die Zusammenhangskomponenten des Komplements aller Spiegelebenen heißen Alkoven. Die Menge aller Alkoven wird mit \mathcal{A} bezeichnet. Eine Hyperebene F heißt W and V on A, wenn $F \cap \overline{A}$ schon F affin erzeugt, (das heißt der Schnitt von F mit dem topologischen Abschluß von A eine offene, nichtleere Teilmenge von F enthält).

Als Zusammenhangskomponenten einer offenen Menge sind die Alkoven offen. Jeder Punkt aus V liegt im Abschluß mindestens eines Alkovens.

Satz 1.11 Für einen festen Alkoven $A \subset V$ gilt

- a.) Die Gruppe $\mathcal{G} = \langle s \mid s \text{ ist Spiegelung an einer Wand von } A \rangle$ wirkt transitiv auf A.
- b.) Die Spiegelungen an den Wänden von A erzeugen bereits ganz W.
- c.) Die Abbildung $W \longrightarrow A, w \longmapsto wA$ ist eine Bijektion.

Beweis: Nach Definition des Wurzelsystemes bleibt die Menge der Hyperebenen unter Spiegelungen an solchen stabil. Da eine Spiegelung eine offene Abbildung ist, werden Zusammenhangskomponenten wiederum auf solche abgebildet, daher werden Alkoven unter der Weylgruppe auf Alkoven abgebildet. Somit ist eine Operation von \mathcal{W} bzw. \mathcal{G} auf \mathcal{A} definiert.

zu a.): Es ist zu zeigen, daß es für alle $B \in \mathcal{A}$ ein $g \in \mathcal{G}$ gibt mit gA = B (*). Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $B \neq A$. Sei d(A, B) die Anzahl der Hyperebenen, die A und B trennen (sie ist immer endlich). Für d(A, B) = 0, also A = B, ist die Aussage trivial. Sei (*) nun für alle Alkoven C mit d(A, C) < d(A, B) gezeigt. Sei F eine Wand von A, die A und B trennt. Sie ist die einzige Hyperebene, die A und $s_F A$ trennt. Damit gilt: $d(s_F A, B) = d(A, B) - 1 = d(A, s_F B)$. Für $s_F B$ gilt die Induktionsvoraussetzung, das heißt, $s_F B \in \mathcal{G}A$ und somit $B \in \mathcal{G}A$.

zu b.): Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Spiegelebene. Sie ist Wand eines geeigneten Alkovens B. Nach a.) gilt B = gA für geeignetes $g \in \mathcal{G}$. Allgemein gilt $ws_Fw^{-1} = s_{wF}$, für alle $w \in \mathcal{W}$ und $F \in \mathcal{F}$, also speziell $s_F = gs_{g^{-1}F}g^{-1} \in \mathcal{G}$ (da $g^{-1}F$ Wand von A ist).

zu c.): Surjektivität ist klar. Sei $w \in \mathcal{W}, w = s_1 s_2 ... s_l(w)$ eine reduzierte Zerlegung in Spiegelungen an Wänden $F_1, ..., F_{l(w)}$ von A. Klarerweise gilt $l(w) \geq d(A, wA)$, (da bei jeder Spiegelung höchstens eine Hyperebene "dazukommt"). Angenommen, l(w) > d(A, wA). Es gibt somit mindestens eine Hyperebene, die mehrere aufeinanderfolgende Glieder in der Folge $A, s_1 A, s_1 s_2 A, ..., s_1 s_2 ... s_{l(w)} A$ voneinander trennt, das heißt, es gibt i, j, (i < j) mit

```
(Hyperebene zwischen s_1s_2...s_iA und s_1s_2...s_{i+1}A) = s_1s_2...s_i(F_{i+1})
= (Hyperebene zwischen s_1s_2...s_jA und s_1s_2...s_{j+1}A) = s_1s_2...s_j(F_{j+1}).
```

Also gilt: $s_{i+1} = s_{F_{i+1}} = s_{s_{i+1}...s_j(F_{j+1})} = s_{i+1}...s_js_{j+1}s_j...s_{i+1}$. Das bedeutet aber $s_{i+2}...s_j = s_{i+1}...s_{j+1}$, was im Widerspruch zur Minimalität der Produktzerlegung steht. Folglich gilt: l(w) = d(A, wA). Das ergibt die Injektivität.

Definition 1.12 Sei V ein Vektorraum, R seine Wurzeln und Δ eine zugehörige Basis. Dann wird die offene konvexe Menge $\mathcal{C} = \{\mu \in V \mid \langle \mu, \alpha^{\vee} \rangle > 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \}$ als dominante Weylkammer (bezüglich Δ) bezeichnet. Mit A^+ bezeichne man denjenigen Alkoven, der in \mathcal{C} liegt und dessen Abschluß den Nullpunkt enthält. Sei A^+ (bzw. A^{++}) die Menge aller Alkoven, die in \mathcal{C} (bzw. der um die Halbsumme der positiven Wurzeln verschobenen Weylkammer $\rho + \mathcal{C}$) liegen.

Sei $\Pi_+ = \{ \mu \in V \mid 0 < \langle \mu, \alpha^{\vee} \rangle < 1, \ \forall \alpha \in \Delta \}$ die fundamentale Box. Für einen festen Alkoven A bezeichne $\lambda(A) \in X$ dasjenige (eindeutig bestimmte) Gewicht, so daß $A \subset \lambda(A) + \Pi_+$.

1.3 Die Kaszhdan-Lusztig-Polynome in der Alkovenschreibweise

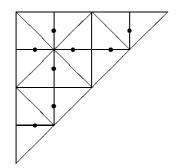
Es ist sehr hilfreich, die Weylgruppe nicht isoliert, sondern bezüglich ihrer Wirkung auf Alkoven zu betrachten. Dabei bietet es sich natürlich an, auch die KAZHDAN-LUSZTIG-Polynome in einer solchen "Alkovenschreibweise" auszudrücken. Für den Fall, daß der Rang eines Wurzelsystems zwei ist, kann man diese dann in Bildern veranschaulichen. Um das zu erreichen, muß man einige (naheliegende) Identifikationen vornehmen:

Mit der Bijektion aus Satz 1.11 bezüglich A^+ kann man eine Rechtsmultiplikation (durch Strukturtransport) von \mathcal{W} auf \mathcal{A} definieren: $(A, w) \mapsto Aw$. Anschaulich bedeutet As gerade, daß A an der zu h konjugierten Wand gespiegelt wird, wobei h diejenige Wand von A^+ ist, die unter der Spiegelung s stabil bleibt. Jede Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$ teilt das Komplement V - F in zwei Zusammenhangskomponenten F^+ und F^- , wobei F^+ diejenige sein soll, welche jedes Translat der dominanten Weylkammer trifft.

Definition 1.13 Sei $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$, und F sei die Spiegelebene, die A und As trennt. Man definiere:

$$As \succ A \quad (bzw. As \prec A) \iff As \subset F^+ \quad (bzw. As \subset F^-).$$

Die dadurch definierte partielle Ordnung auf \mathcal{A} stimmt im Innern der dominanten Weylkammer mit der Bruhat-Ordnung überein. Für B_2 beispielsweise kann man sich diese Ordnung folgendermaßen vorstellen:



Bei folgenden Spiegelungen gilt $As \leq A$ (ansonsten $As \geq A$).

- a.) Spiegelung an gepunkteten Linien: nach unten; nach links.
- b.) Spiegelung an ungepunkteten nichtdiagonalen Linien: nach unten; nach links.
- c.) Spiegelung an diagonalen Linien: nach rechts unten; nach links unten.

Auf dem freien \mathcal{L} -Modul \mathcal{P} mit Basis \mathcal{A} definiert Lusztig eine Rechtsoperation von \mathcal{H} , die in gewisser Weise mit unseren bisherigen Operationen auf \mathcal{N} und \mathcal{M} übereinstimmt:

Lemma 1.14 ([Lu], in der Formulierung von [So1]) Es gibt eine Rechtsoperation von \mathcal{H} auf \mathcal{P} derart, daß für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt:

$$AC_s = \begin{cases} As + vA, & \text{falls } As \succeq A \\ As + v^{-1}A, & \text{falls } As \preceq A \end{cases}$$

Beweis: siehe [So1].

 \mathcal{P} ist vermöge dieser Multiplikation ein \mathcal{H} -Rechtsmodul. Man kann nun die Kazhdan-Lusztig-Polynome in einer Alkovenschreibweise ausdrücken:

Sei $S_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid \text{s läßt den Nullvektor fest}\}$. Damit ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0, \mathcal{N} = \mathcal{N}^0$ und $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}$. Die Bijektion $\mathcal{W} \to \mathcal{A}, w \mapsto wA^+$ liefert (mit Hilfe der Isomorphie $\mathcal{W} \cong \mathcal{W} \times \mathcal{W}^0$ und der Definition von \mathcal{A}^+) eine Bijektion $\mathcal{W}^0 \to \mathcal{A}^+$. Diese ermöglicht eine Umformulierung im folgenden Sinn: $N_x \leftrightarrow N_A$; $n_{x,y} \leftrightarrow n_{A,B}$ etc., falls $x, y \in \mathcal{W}^0$ und $A, B \in \mathcal{A}^+$ mit $xA^+ = A$ und $yA^+ = B$.

Kapitel 2

Im Innern der dominanten Weylkammer

Nach der allgemeinen Definition der KAZHDAN-LUSZTIG-Polynome interessiert man sich natürlich dafür, ob sie (bei fest gewähltem reduziertem Wurzelsystem) konkret anzugeben sind. Es stellt sich heraus, daß sich die selbstdualen Elemente aus $\mathcal N$ systematisch oder "periodisch" verhalten, falls der entsprechende Alkoven genügend weit im Innern der dominanten Weylkammer liegt. In diesem Fall kann auch eine Formel zur Berechnung der Polynome angegeben werden, die nur eine endliche Rekursion beinhaltet. Im folgenden sollen die Ergebnisse von Kazhdan und Lusztig bezüglich der selbstdualen Elemente \underline{N}_A aus dem Modul $\mathcal N$, insbesondere für Wurzelsysteme vom Rang zwei, angeführt werden.

2.1 Allgemeine Formel

Um die Kazhdan-Lusztig-Polynome genauer angeben zu können, sollen allerdings erst einige Bezeichnungen und Begriffe bereitgestellt werden. Für alle ganzen Gewichte $\lambda \in X$ sei

$$E_{\lambda} = \sum_{z \in W} v^{l(z)} (\lambda + zA^{+}). \tag{2.1}$$

Sei \mathcal{P}^0 der von allen E_λ erzeugte \mathcal{H} -Modul. In [Lu] wird gezeigt, daß durch $\langle w \rangle E_\lambda = E_{w\lambda}$ eine \mathcal{H} -lineare Operation $\langle \; . \; \rangle$ von \mathcal{W} auf \mathcal{P}^0 definiert ist. Bezeichnet nun w_0 das längste Element der Weylgruppe und r seine Länge, so ist durch $P \mapsto v^r w_0 \langle w_0 \rangle P$ eine Dualität auf \mathcal{P}^0 bestimmt. Lusztig definiert induktiv zu jedem Alkoven A genau ein selbstduales Element \underline{P}_A aus diesem Modul. Er setzt $\underline{P}_{A^+} = E_0$. Für $A \subset \Pi_+ - A^+$ seien alle \underline{P}_B mit $B \preceq A, B \subset \Pi_+$ schon konstruiert. Man findet $s \in \mathcal{S}$ mit $As \preceq A$ und $As \subset \Pi_+$. Sei nun $\underline{P}_{As}C_s = \sum_{B \prec A} p_B B$. Man erhält als selbstduales Element

$$\underline{P}_{A} = \underline{P}_{As}C_{s} - \sum_{B \in \mathcal{A}^{+}, B \neq A} p_{B}(0) \sum_{z \in Rep(W_{\lambda(B)} \setminus W)} \langle z \rangle \underline{P}_{B}$$
(2.2)

Durch Translation um ganze Gewichte bekommt man zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein \underline{P}_A .

Für den entscheidenden Satz benötigt man noch folgende

Definition 2.1 a.) Es sei $\mathcal{P}^{sgn} = \{P \in \mathcal{P}^0 \mid \langle z \rangle P = (-1)^{l(z)} P \ \forall z \in W\}$ als \mathcal{H} -Untermodul von \mathcal{P} .

b.) Die \mathcal{L} -lineare Abbildung $res: \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ definiert durch

$$res(A) = \begin{cases} N_A & \text{falls } A \in \mathcal{A}^+ \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

induziert einen Homomorphismus von \mathcal{H} -Rechtsmodulen: $res: \mathcal{P}^{sgn} \to \mathcal{N}$.

c.) Die \mathcal{H} -lineare Abbildung alt: $\mathcal{P}^0 \to \mathcal{P}^{sgn}$ ist durch die Zuordnung

$$P \mapsto \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle P$$
.

definiert.

Bemerkung: Das Bild der Abbildung alt liegt tatsächlich in \mathcal{P}^{sgn} , denn es gilt

$$\langle z \rangle \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle E_{\lambda} = \sum_{zx \in W} (-1)^{l(x)} \langle zx \rangle E_{\lambda} = (-1)^{l(z)} \sum_{a \in W} (-1)^{l(a)} \langle a \rangle E_{\lambda}.$$

Mittels dieser Abbildungen können wir nun einen Zusammenhang der selbstdualen Elemente aus \mathcal{P} mit denen aus dem Modul \mathcal{N} formulieren. Wir erhalten den zentralen

Satz 2.2 Für alle Alkoven $A \in \mathcal{A}^{++}$ qilt:

$$\underline{N}_A = res(alt(\underline{P}_A)).$$

Beweis: siehe [So1, Theorem 5.3].

2.2 Periodische Patterns

Sei $A \in \mathcal{A}$. Das Element \underline{P}_A (bzw. \underline{M}_A) nennen wir \mathcal{P} - (bzw. \mathcal{M} -) Pattern zu A. A heißt Bezugsalkoven dieses Patterns. Analog soll für $A \in \mathcal{A}^+$ das Element $\underline{N}_A \in \mathcal{N}$ als \mathcal{N} -Pattern zum Bezugsalkoven A (oder auch einfach als Pattern zu A) bezeichnet werden. Im folgenden werden die Bezeichnungen N(A) und \underline{N}_A gleichbedeutend verwendet.

Definition 2.3 Für jedes ganze Gewicht λ definieren wir die \mathcal{L} -linearen Abbildungen $\langle \lambda \rangle_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ und $\langle \lambda \rangle_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch:

$$N_A \mapsto \begin{cases} N_{\lambda+A}, & \text{falls } \lambda + A \in \mathcal{A}^+ \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
 und $M_A \mapsto \begin{cases} M_{\lambda+A}, & \text{falls } \lambda + A \in \mathcal{A}^+ \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Da es aus dem Zusammenhang meistens klar ist, in welchem Modul die Abbildung lebt, lassen wir den Index normalerweise weg.

Definition 2.4 Sei $M \subset \Delta$ eine Teilmenge der einfachen Wurzeln. Die Facette (der dominanten Weylkammer) bezüglich M sei definiert als

$$K(M) := \{ \mu \in V \mid \langle \mu, \check{\alpha} \rangle = 0 \ \forall \alpha \in M; \langle \mu, \check{\alpha} \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta \setminus M \}.$$

Sei $A \in \mathcal{A}^+$ ein Alkoven und $\lambda \in X^+$ ein dominantes ganzes Gewicht. Der Alkoven A heißt

- längs λ periodisch, falls es eine natürliche Zahl n_{λ} gibt, so daß für $n \geq n_{\lambda}$ gilt: $N((n+1)\lambda + A) = \langle \lambda \rangle N(n\lambda + A)$.
- längs K(M) periodisch, falls er für jedes $\lambda \in K(M) \cap \tilde{X}$ längs λ periodisch ist.
- periodisch, wenn er längs aller dominanten ganzen Gewichte periodisch ist.

Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}^+$ und $\lambda \in X^+$. Die Menge \mathcal{Q} heißt

- längs λ periodisch, falls es eine natürliche Zahl \tilde{n}_{λ} gibt, so daß für alle $A \in \mathcal{Q}$ und $n \geq \tilde{n}_{\lambda}$ gilt: $N((n+1)\lambda + A) = \langle \lambda \rangle N(n\lambda + A)$. Das kleinstmögliche \tilde{n}_{λ} werde mit $n_{\lambda}(\mathcal{Q})$ bezeichnet.
- längs K(M) periodisch, falls sie für jedes $\lambda \in K(M) \cap \tilde{X}$ längs λ periodisch ist.
- periodisch, wenn sie längs aller ganzen Gewichte periodisch ist.

Ist $Q = A^+$, und die Menge Q erfüllt eine der obigen Periodizitätseigenschaften, sagen wir, die Patterns erfüllen die entsprechende Eigenschaft. Für die Moduln \mathcal{P} und \mathcal{M} machen wir analoge Definitionen. Statt $n_{\lambda}(A^+)$ schreiben wir schlichtweg n_{λ} .

2.3 Veranschaulichung der Patterns in Bildern

Zur Veranschaulichung der Patterns (bzw. der \mathcal{P} -Patterns) für ein Wurzelsystem vom Rang zwei kann man für jeden Alkoven $A \in \mathcal{A}^+$ (bzw. $A \in \mathcal{A}$) ein reelles Bild der affinen parabolischen (bzw. nichtparabolischen) Weylgruppe zeichnen, wobei die Einträge in den Alkoven gerade die entsprechenden Polynome $n_{A,B}$ (bzw. $p_{A,B}$) sind.

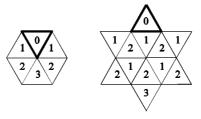
Zur Vereinfachung habe ich in den Bildern nur die Exponenten der KAZHDAN-LUSZTIG-Polynome aufgelistet (1,1,3] entspricht v^3+2v usw.) und die Alkoven ohne Eintrag meist weggelassen. Der Bezugsalkoven hat somit nach Definition immer den Eintrag 0. Er wird in den nachfolgenden Bildern stets hervorgehoben. Um Unklarheiten bezüglich dessen Lage zu vermeiden, habe ich teilweise die Begrenzungen der (dominanten) Kammer mit dickeren Linien eingezeichnet.

2.3.1 Bilder der \mathcal{P} -Patterns

Nach Definition sind die \mathcal{P} - Patterns periodisch. Es gilt sogar $\underline{P}_{\lambda+A} = \langle \lambda \rangle \underline{P}_A$ für alle Alkoven A. In diesem Fall reicht es aus, alle \mathcal{P} -Patterns zu Alkoven einer beliebigen festen Box zu kennen, um alle anderen durch Translationen zu erhalten. Die entsprechenden Bilder werden nun aufgelistet (vergleiche dazu [Lu], wobei dort noch eine Abstandsfunktion ins Spiel kommt).

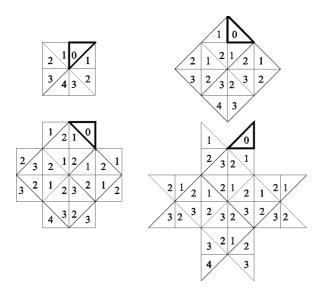
Der Fall A₂

Hier ergeben sich die zwei Bilder:



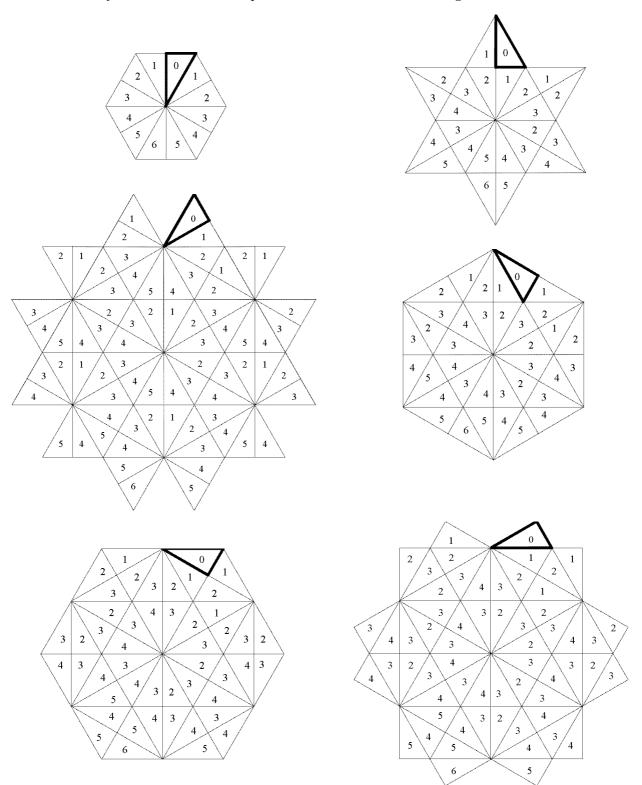
Der Fall B₂

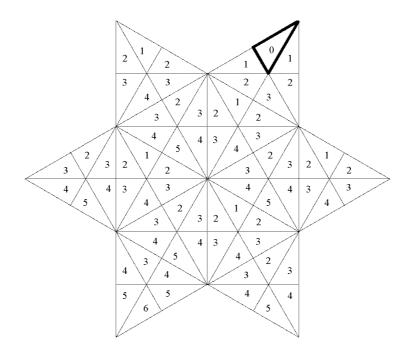
Für das Wurzelsystem B_2 enthält eine Box vier Alkoven.

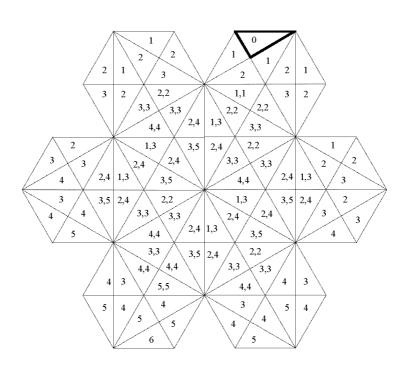


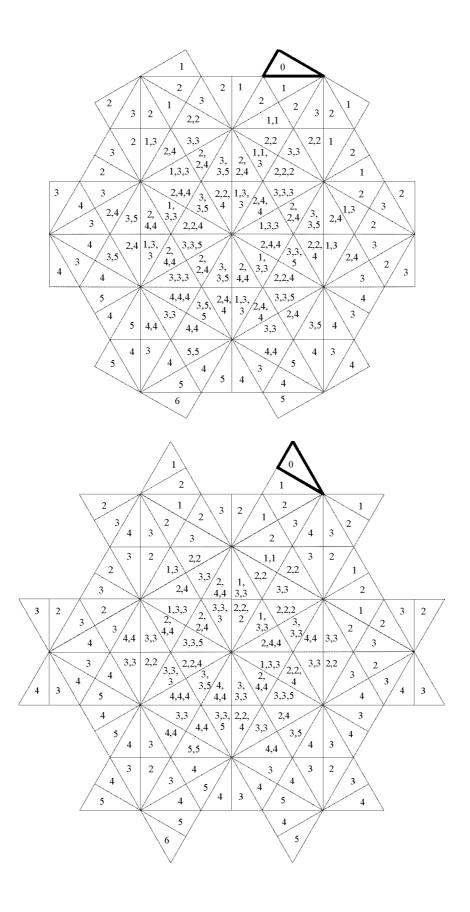
 $Der\ Fall\ G_2$

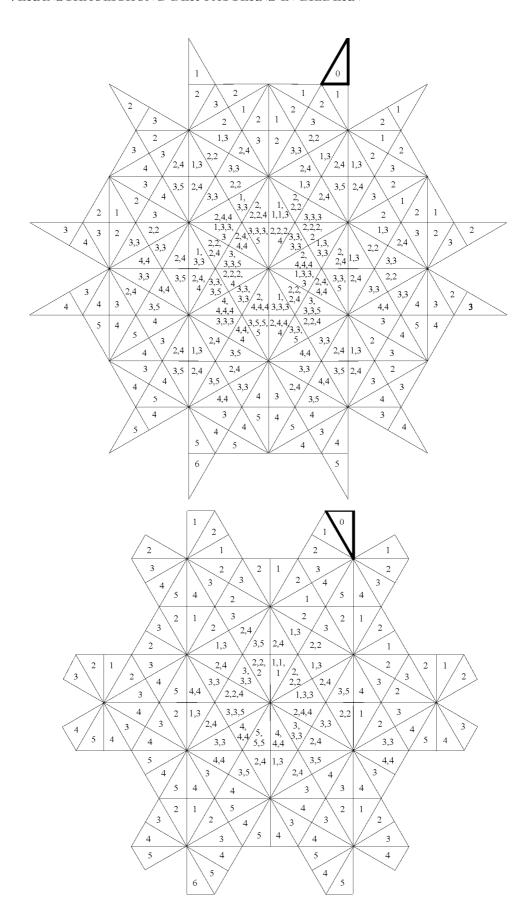
Für das Wurzelsystem G_2 kann man entsprechende zwölf \mathcal{P} -Patterns wie folgt veranschaulichen:











Vor der Behandlung der \mathcal{N} -Patterns machen wir noch eine naheliegende

Definition 2.5 Seien $N \in \mathcal{N}$ und $P \in \mathcal{P}$ mit den Darstellungen $N = \sum_{B \in \mathcal{A}^+} p_B N_B \in \mathcal{N}$ beziehungs-

weise $P = \sum_{B \in \mathcal{A}} p_B B \in \mathcal{P}$ (mit $p_B \in \mathcal{L}$) in den jeweiligen Standardbasen. Dann bezeichne

$$\operatorname{Tr}(N) = \{ B \in \mathcal{A}^+ \mid p_B \neq 0 \}$$
 beziehungsweise $\operatorname{Tr}(P) = \{ B \in \mathcal{A} \mid p_B \neq 0 \}$

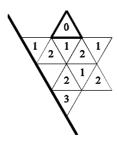
den Träger (von N bzw. von P). Für die Elemente aus \mathcal{M} ist der Träger völlig analog zur Definition des Trägers der Elemente aus \mathcal{N} festgelegt. Der ganzzahlige Träger (von N) sei definiert als

$$\mathsf{Tr}_{\mathbb{Z}}(N) = \{ B \in \mathcal{A}^+ \mid p_B \in \mathbb{Z} - \{0\} \}.$$

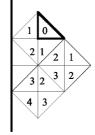
2.3.2 Bilder der \mathcal{N} -Patterns

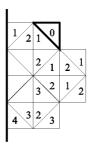
Sei $A \in \mathcal{A}^{++}$. Liegt nun A genügend weit in der dominanten Weylkammer, so daß der Träger von \underline{P}_A eine Teilmenge von \mathcal{A}^{++} ist, so ist das Pattern zu A nach Satz 2.2 gerade die Restriktion des \mathcal{P} -Patterns \underline{P}_A . Andernfalls wirkt sich die alternierende Abbildung alt dadurch aus, daß gewisse Teile der vorkommenden Polynome gekillt werden. Offensichtlich sind diese Alkoven aus der um ρ verschobenen dominanten Weylkammer längs jedem fundamentalen Gewicht periodisch. Man kann sich deshalb wiederum auf die Angabe relativ weniger Patterns beschränken, um schließlich alle mit genügend großem Bezugsalkoven zu erhalten. Im folgenden werden diese notwendigen Patterns, bei denen sich die alternierende Abbildung auswirkt, in Bildern dargestellt.

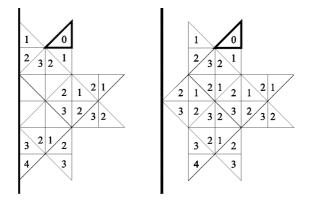
a.) Da die Weylkammer für das Wurzelsystem A_2 symmetrisch ist, reicht es, nur eine Kante zu betrachten. Es ergibt sich folgendes Bild:



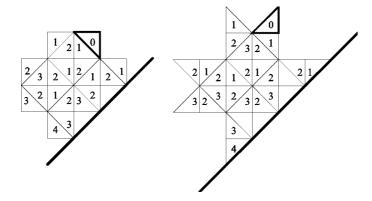
b.) Im Fall B_2 muß man beide Kanten betrachten. An der Kante, die zur kurzen Wurzel gehört, ergeben sich vier Bilder:



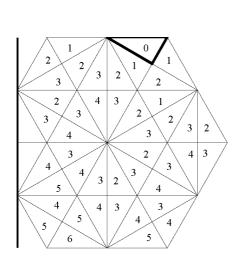


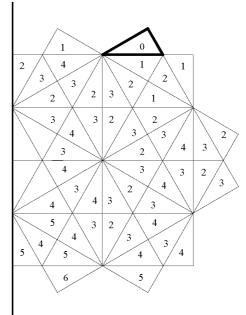


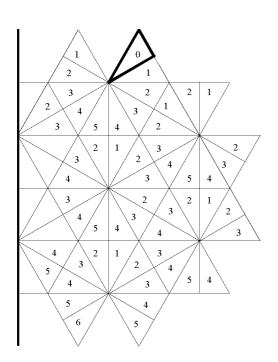
An der anderen Kante treten folgende Fälle auf:

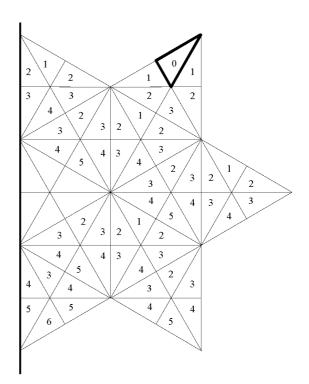


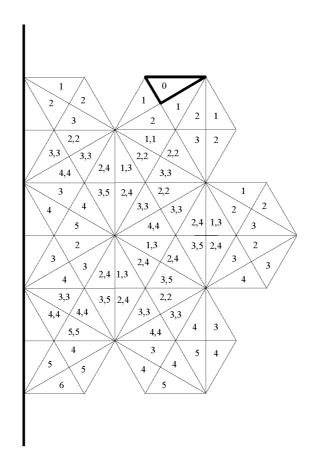
c.) Beim Wurzelsystem G_2 ist der Träger einiger \mathcal{P} -Patterns recht groß. Es ergeben sich an der zur kurzen Wurzel gehörenden Kante folgende Bilder (hier gegenüber der meist üblichen Notation gespiegelt angegeben):

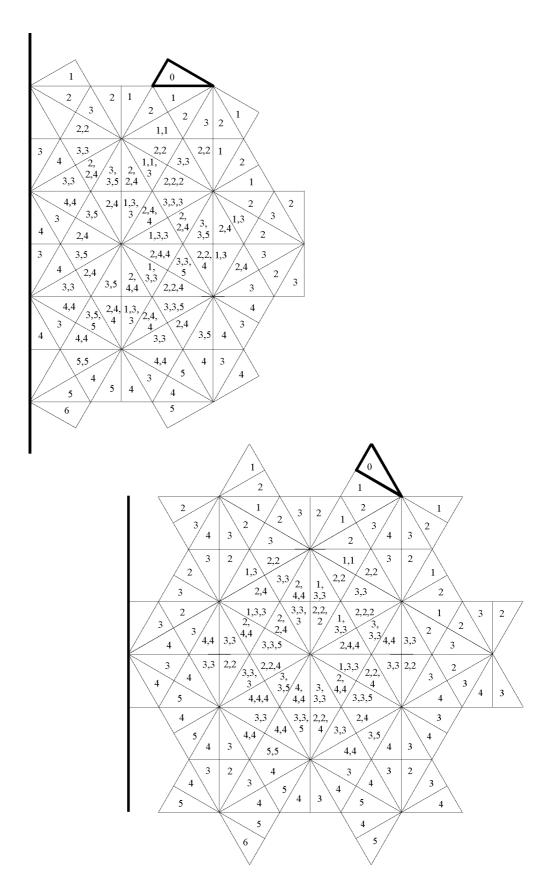


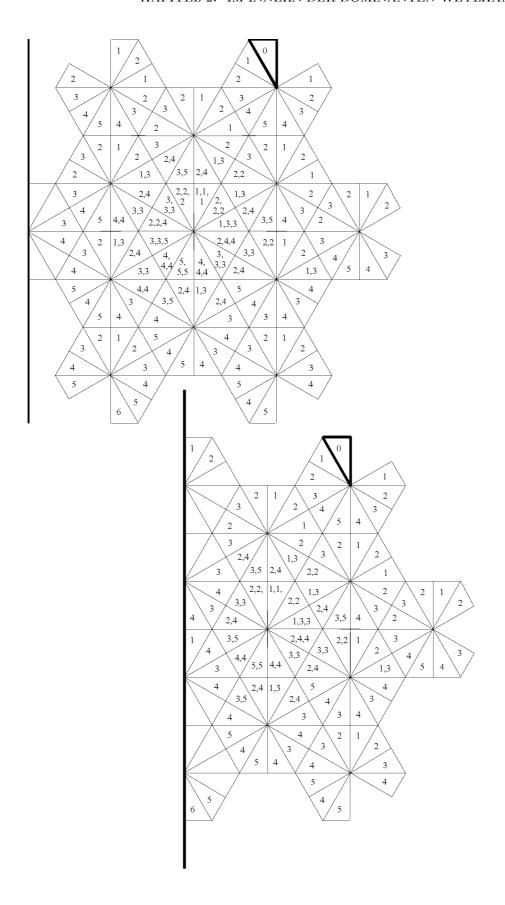


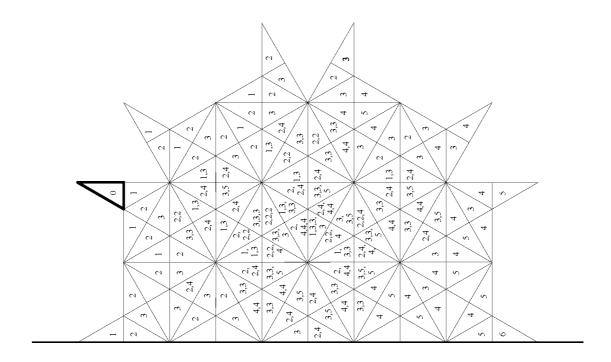


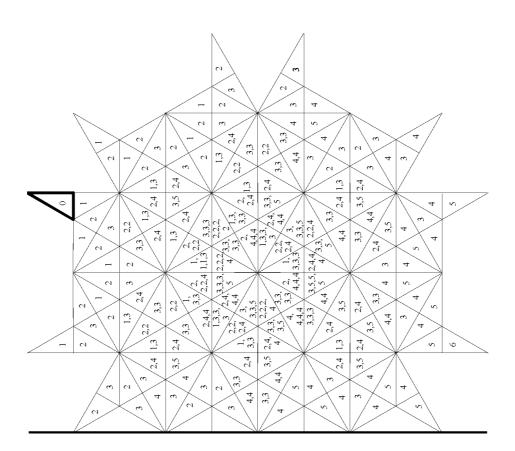


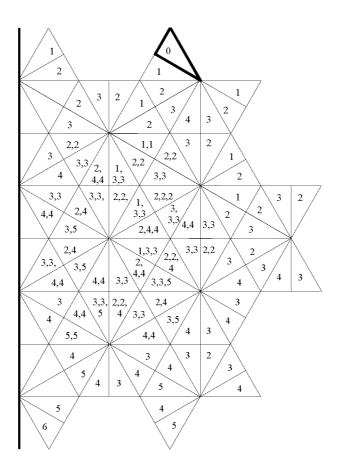




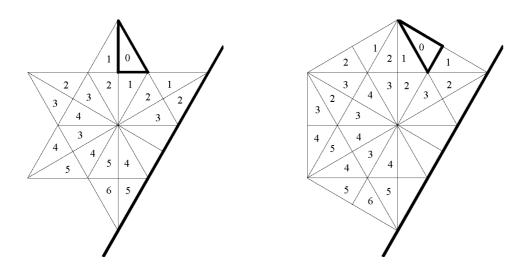


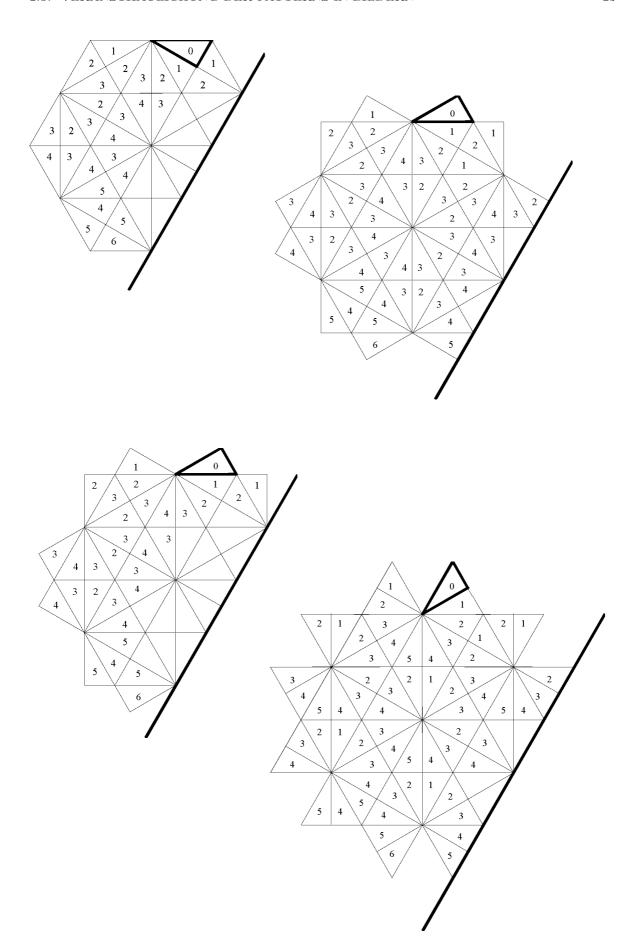


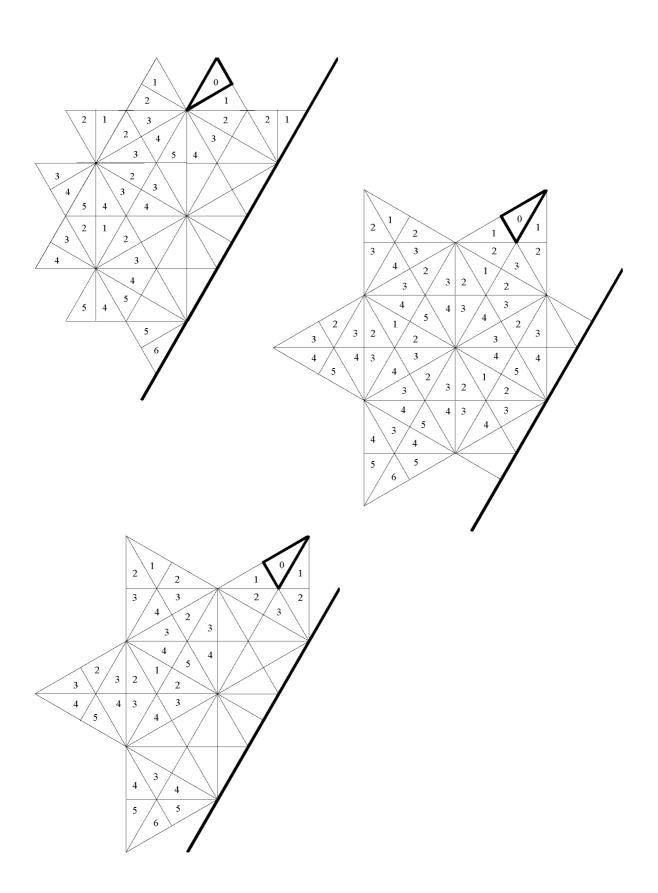


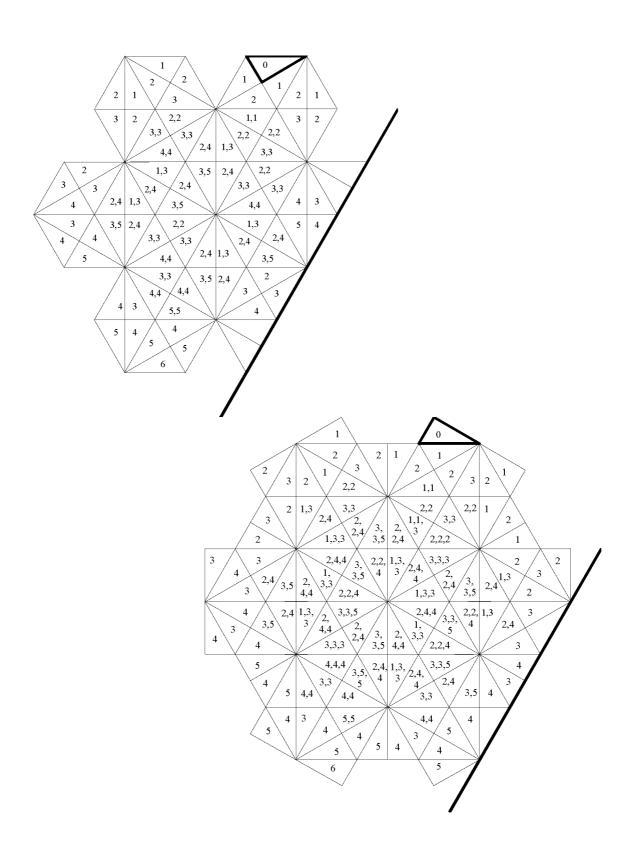


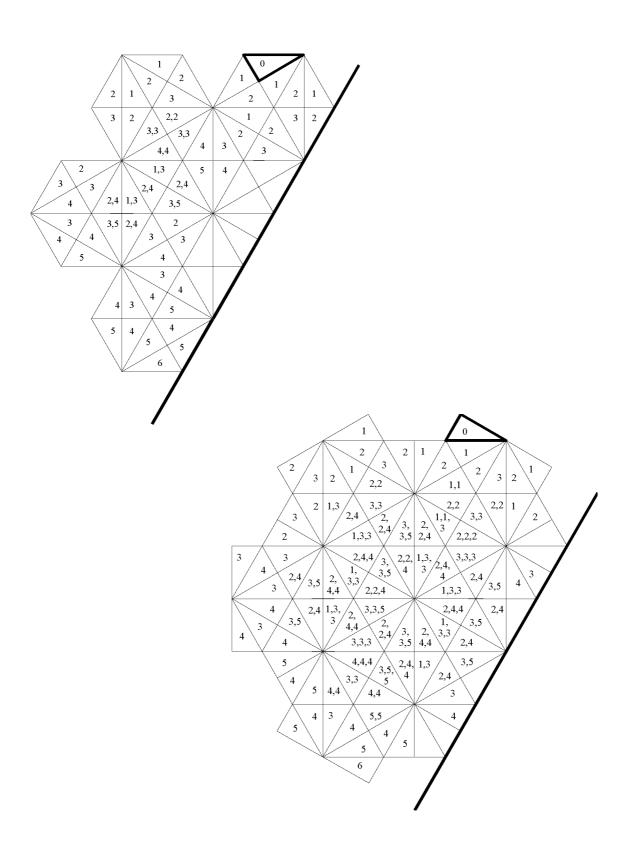
Bezüglich der anderen Kante erhält man die folgenden 24 Bilder:

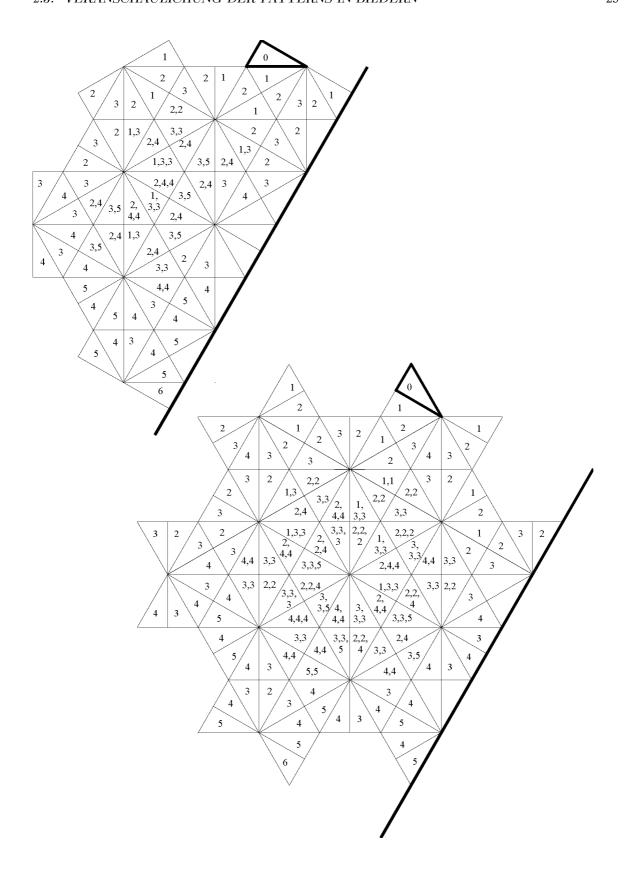


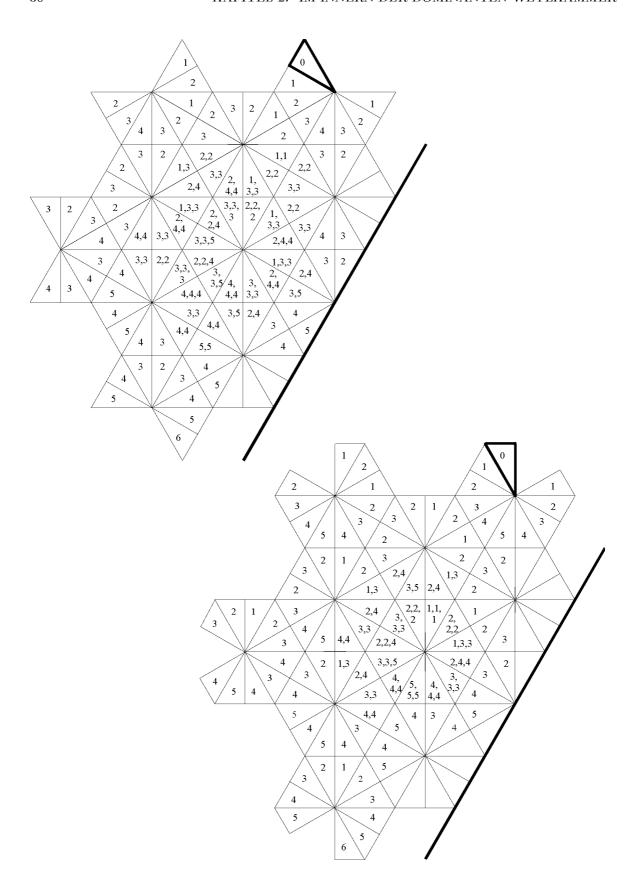


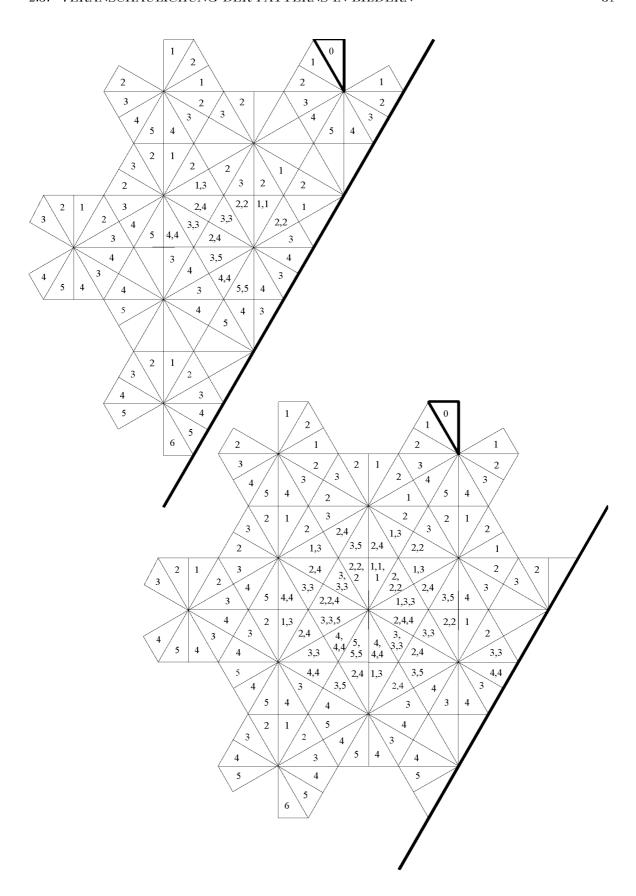


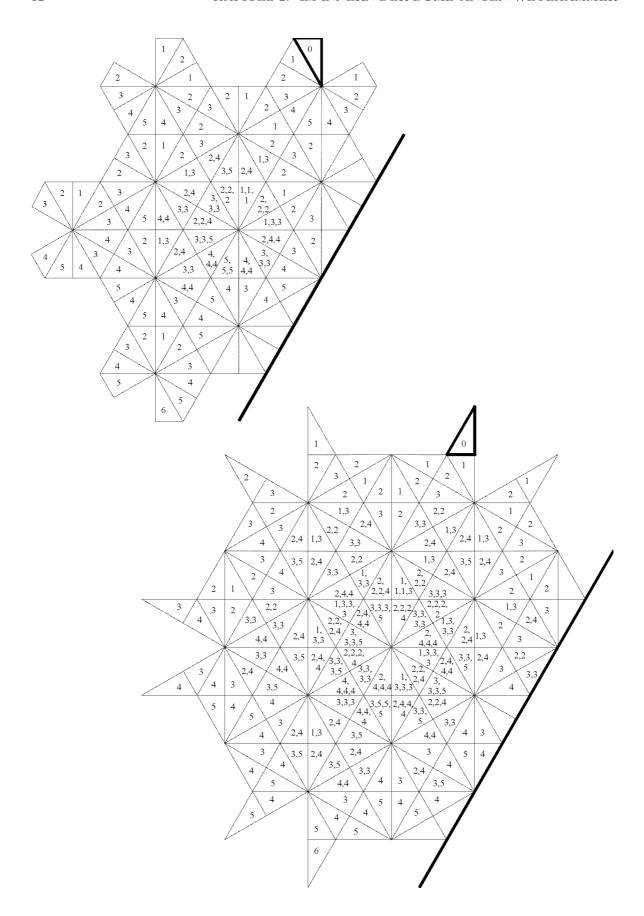


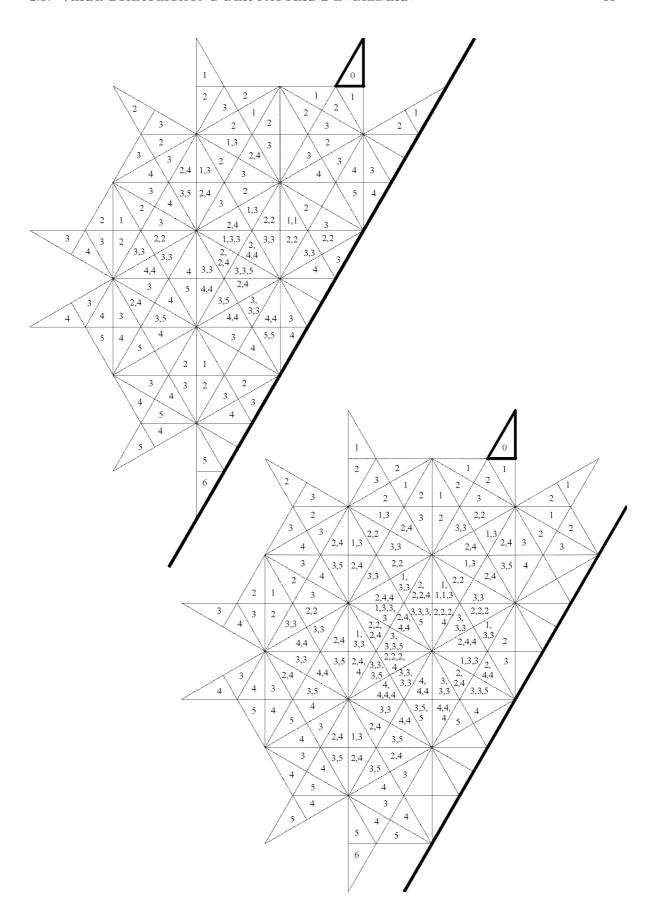


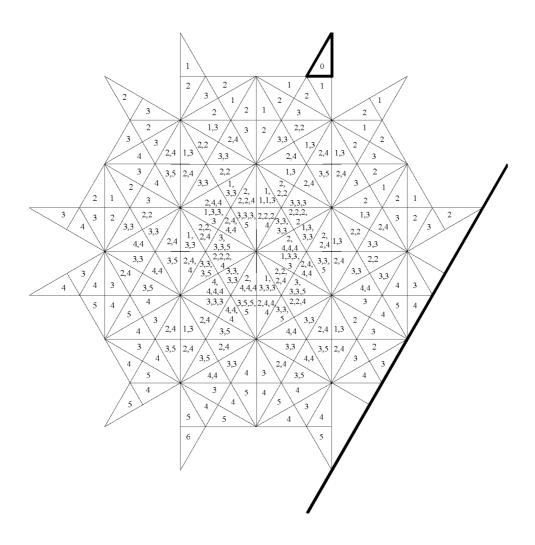












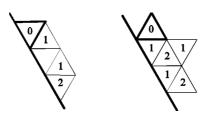
Kapitel 3

Am Rand der dominanten Weylkammer

Dieses Kapitel behandelt nun die eigentliche Aufgabe, die Patterns am Rand der dominanten Weylkammer zu untersuchen. Genauer gesagt, lag die Vermutung nahe, daß auch jedes Pattern mit Bezugsalkoven in $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^{++}$ längs einer beliebigen Facette, die im Abschluß der dominanten Weylkammer liegt, periodisch ist. Dies hat sich jedoch bereits für Wurzelsysteme vom Rang zwei als falsch erwiesen. Die genaueren Ergebnisse werden im folgenden angeführt. Ob sich die dort gewonnenen Erkenntnisse verallgemeinern lassen, bleibt vorerst ungeklärt.

3.1 Periodizität im Fall A_2

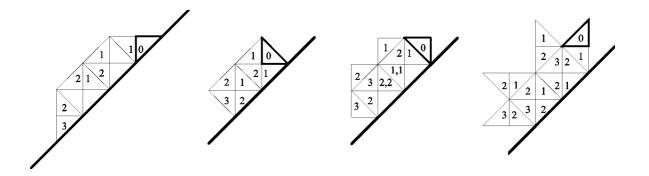
In diesem Fall sind alle Alkoven (wie vermutet) längs den Kanten periodisch. Die entsprechenden Bilder (für genügend große Alkoven) sehen wie folgt aus:



Das kann man durch einfache Rechnungen verifizieren. Da sich die Patterns von der zweiten Kante abgelöst haben, werden sie klarerweise periodisch längs der ersten Kante (vgl. hierzu Lemma 3.9).

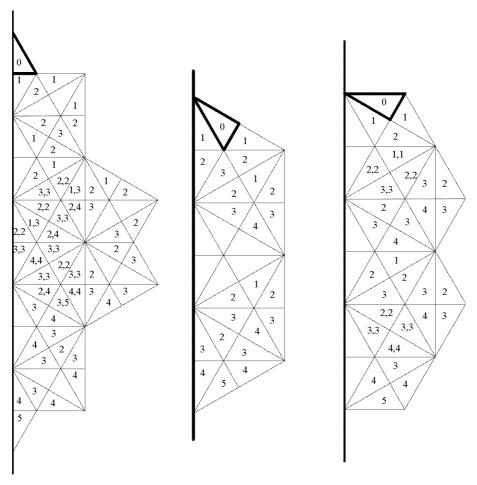
3.2 Periodizität an einer Kante im Fall B_2

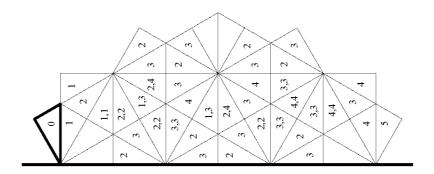
Auch für dieses Wurzelsystem bestätigt sich die Vermutung am rechten Rand, das heißt an der zur langen Wurzel gehörenden Kante. Interessanterweise ergibt sich wiederum (wie im vorherigen Fall), daß gewisse Patterns gerade durch Restriktion der entsprechenen \underline{P}_A (nämlich des "Sterns") entstehen. Das zugehörige Bild steht in der folgenden Auflistung an letzter Stelle.

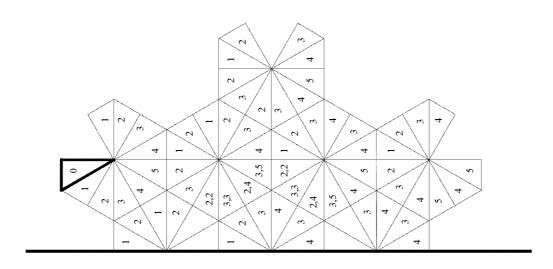


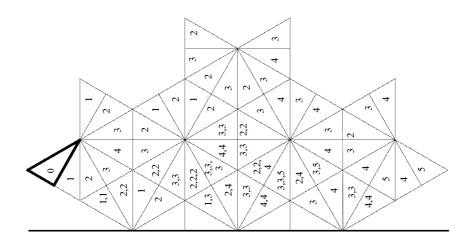
3.3 Periodizität an einer Kante im Fall G_2

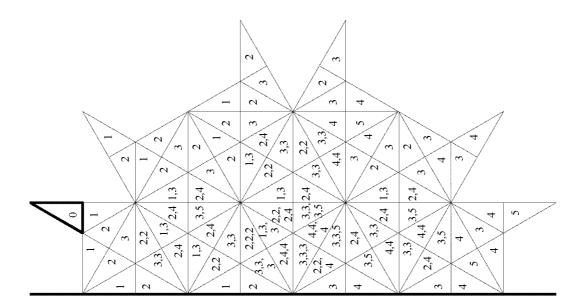
Für das Wurzelsystem G_2 ist ein analoges Verhalten wie bei B_2 zu beobachten. Längs der zur langen Wurzel gehörenden Kante sind die Alkoven ebenfalls periodisch, und gewisse Patterns entstehen wiederum durch Einschränkung der entsprechenden \mathcal{P} -Patterns. (In der folgenden Auflistung steht ein solcher Repräsentant an drittletzter Stelle). Explizit nehmen die Patterns folgende Gestalt an:

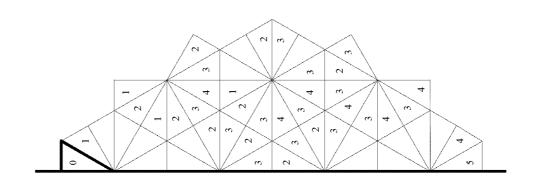


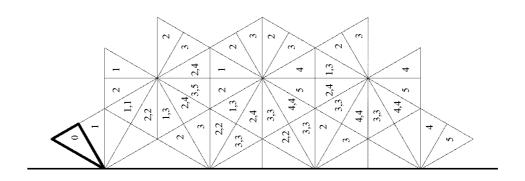


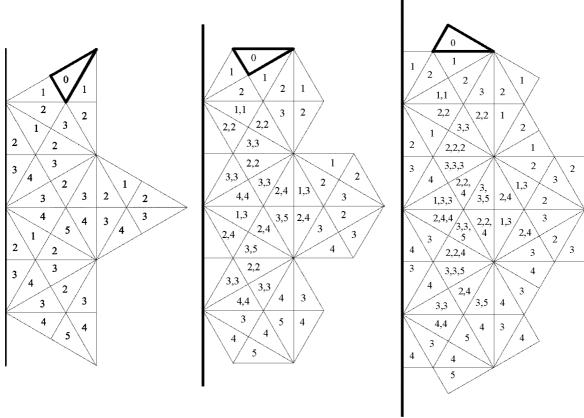












Man gelangt zur folgenden

Beobachtung 3.1 Ist das Wurzelsystem vom Rang zwei und verhalten sich die Patterns gemäß der Vermutung, das heißt, alle Alkoven sind längs einer Kante periodisch, dann gibt es unter den Patterns zu Bezugsalkoven einer genügend großen Box genau eines, das durch Restriktion eines geeigneten \underline{P}_A auf die Weylkammer entsteht. Bei den zweidimensionalen Wurzelsystemen erfüllen die Alkoven mindestens längs einer (zur langen Wurzel gehörenden) Kante die vermutete Periodizitätseigenschaft.

3.4 Unbeschränktheit im Fall B_2

In den bisher betrachteten Fällen hat sich die Vermutung immer bestätigt. Betrachtet man allerdings für den Fall B_2 die zur kurzen Wurzel gehörende Facette der dominanten Weylkammer, bemerkt man Erstaunliches: Die Alkoven sind entlang dieser Kante nicht periodisch, und somit stimmt die oben geäußerte Vermutung im allgemeinen nicht. Es zeigt sich außerdem, daß sie sich nie von der fundamentalen Box "ablösen", also unbeschränkt sind. Um dies zu präzisieren, führe ich folgende Bezeichnungen ein:

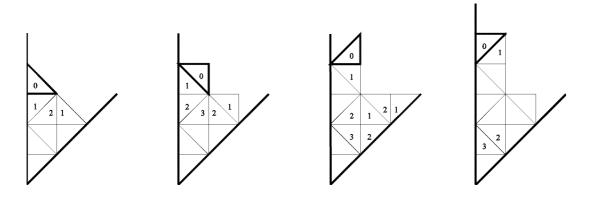
Definition 3.2 Die *Größe G* eines Patterns sei die Mächtigkeit seines Trägers. Sei γ die Wurzel, die zu derjenigen Hyperebene der Weylgruppe gehört, die nicht im Abschluß der dominanten Weylkammer liegt. Da wir uns auf irreduzible Wurzelsysteme beschränken, ist diese eindeutig. L sei die Menge aller Patterns zu einem festen Wurzelsystem. Ich nenne sie

- a.) beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, so daß G(P) < c für alle $P \in L$; andernfalls unbeschränkt.
- b.) bezüglich der Länge beschränkt, falls es eine natürliche Zahl n und für jedes $P \in L$ einen γ -Streifen $\Gamma(P)$ gibt, so daß gilt: $A \in \text{Tr}(P) \Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^n \langle i\gamma \rangle \Gamma(P)$.
- c.) bezüglich der Breite beschränkt, falls es eine natürliche Zahl n und für jedes $P \in L$ und $\omega \in \Delta$ einen ω -Streifen $\Omega(P)$ gibt, so daß gilt: $A \in \text{Tr}(P) \Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^n \langle i\omega \rangle \Omega(P)$.

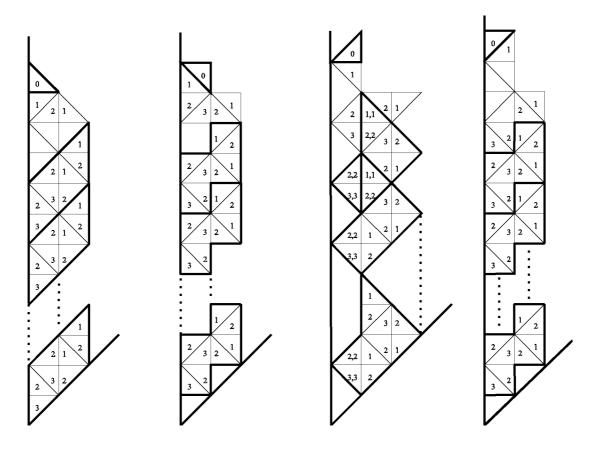
Es gilt der folgende

Satz 3.3 (Unbeschränktheit) Sei das zugrundeliegende Wurzelsystem B_2 , und λ das fundamentale Gewicht, das in der zur kurzen Wurzel gehörenden Kante liegt, dann sind nicht alle Alkoven längs λ periodisch. Die Menge der Patterns ist sogar unbeschränkt, da sie bezüglich ihrer Länge unbeschränkt ist.

Verdeutlichen kann man sich das Verhalten der Patterns in Bildern durch wiederholtes "Einschieben" gewisser fester Teile: Ausgehend von den Patterns mit kleinem Bezugsalkoven



ergeben sich längs der Kante die folgenden Bilder:



Die Aussage kann auch in einer Formulierung wiedergegeben werden, die die Berechnung der Polynome mit Hilfe eines Computerprogrammes widerspiegelt. Dazu bezeichne [x,y] den Alkoven, der sich in der x—ten "Zeile" an der Stelle y befindet. Dann lassen sich obige Patterns in den folgenden Formeln ausdrücken.

Satz 3.4 Sei das zugrundeliegende Wurzelsystem B_2 . Sei $x \in \mathbb{N}, x \geq 4$ gerade. Dann gilt für den ersten Alkoven in der x-ten Zeile

$$\begin{array}{lll} \underline{N}_{[x,1]} & = & N_{[x,1]} \\ & + & vN_{[x-1,1]} + v^2N_{[x-1,2]} + vN_{[x-1,3]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \Big(vN_{[x-2i,4]} \\ & & + v^2N_{[x-2i-1,2]} + vN_{[x-2i-1,3]} + v^2N_{[x-2i-1,4]} \\ & & + v^2N_{[x-2i-2,1]} + v^3N_{[x-2i-2,2]} + v^2N_{[x-2i-2,3]} + vN_{[x-4i-2,4]} \\ & & + v^3N_{[x-2i-3,1]} \Big) \end{array}$$

für den zweiten Alkoven

$$\begin{array}{lcl} \underline{N}_{[x,2]} & = & N_{[x,2]} + vN_{[x,1]} \\ & + & v^2N_{[x-1,1]} + v^3N_{[x-1,2]} + v^2N_{[x-1,3]} + vN_{[x-1,4]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(vN_{[x-2i,3]} + v^2N_{[x-2i,4]} \\ & + v^2N_{[x-2i-1,1]} + v^3N_{[x-2i-1,2]} + v^2N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \\ & + v^3N_{[x-2i-2,1]} + v^2N_{[x-2i-2,2]} \right) \end{array}$$

und für die darüberliegende Zeile

$$\begin{array}{lll} \underline{N}_{[x+1,2]} & = & N_{[x+1,2]} \\ & + & vN_{[x,2]} \\ & + & v^2N_{[x-1,2]} + vN_{[x-1,3]} + v^2N_{[x-1,4]} + vN_{[x-1,5]} \\ & + & v^3N_{[x-2,2]} + v^2N_{[x-2,3]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(vN_{[x+1-2i,3]} \\ & + v^2N_{[x-2i,3]} + v^3N_{[x-2i,4]} + v^2N_{[x-2i,5]} \\ & + v^2N_{[x-2i-1,2]} + vN_{[x-2i-1,3]} + v^2N_{[x-2i-1,4]} + vN_{[x-2i-1,5]} \\ & + 2v^3N_{[x-2i-2,2]} + v^2N_{[x-2i-2,3]} \right) \end{array}$$

beziehungsweise

$$\begin{array}{lll} \underline{N}_{[x+1,1]} & = & N_{[x+1,1]} + vN_{[x+1,2]} \\ & + & v^2N_{[x-1,3]} + vN_{[x-1,4]} \\ & + & v^3N_{[x-2,1]} + v^2N_{[x-2,2]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(vN_{[x-2i,3]} + v^2N_{[x-2i,4]} \\ & & + v^2N_{[x-2i-1,1]} + v^3N_{[x-2i-1,2]} + v^2N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \\ & & + v^3N_{[x-2i-2,1]} + v^2N_{[x-2i-2,2]} \right). \end{array}$$

Beweis: Durch direktes Nachrechnen kann man die vier Behauptungen für x=4 verifizieren. Nehmen wir nun an, die Formeln stimmen für alle $N_{[y,1]}, N_{[y,2]}, mit y \leq x$. Bezeichnet s die entsprechende Spiegelung (mit der Veranschaulichung von Seite 10 an den Ebenen mit Punkt), so erhalten wir leicht durch direktes Nachrechnen die Gleichung $N_{[x+1,2]} = N_{[x,2]}C_s$. Daraus folgt direkt eine der gewünschten Formeln.

Nun können wir $N_{[x+1,1]}$ bestimmen, das sich als $N_{[x+1,2]}C_s$ abzüglich der "Anteile mit konstanten Koeffizienten" schreiben läßt (s bezeichnet hierbei die Spiegelung bezüglich den langen Seiten der Alkoven). Wir erhalten

$$\begin{array}{lcl} \underline{N}_{[x+1,2]}C_s & = & N_{[x+1,1]} + vN_{[x+1,2]} + v^2N_{[x-1,3]} + vN_{[x-1,4]} \\ & + & v^3N_{[x-2,1]} + v^2N_{[x-2,2]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(vN_{[x-2i,3]} + v^2N_{[x-2i,4]} + v^2N_{[x-2i-1,1]} \right. \\ & & + & v^3N_{[x-2i-1,2]} + v^2N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \\ & & + & v^3N_{[x-2i-2,1]} + v^2N_{[x-2i-2,2]} \right) \\ & + & N_{[x,2]} + vN_{[x,1]} + v^2N_{[x-1,1]} + v^3N_{[x-1,2]} \\ & + & v^2N_{[x-1,3]} + vN_{[x-1,4]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(vN_{[x-2i,3]} + v^2N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \right. \\ & & + & v^3N_{[x-2i-2,1]} + v^2N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \\ & & + & v^3N_{[x-2i-2,1]} + v^2N_{[x-2i-2,2]} \right) \end{array} \right\} \\ & + & \sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(N_{[x+1-2i,5]} + vN_{[x+1-2i,6]} + v^2N_{[x+1-2i,3]} \right. \\ & + & vN_{[x+1-2i,4]} + v^3N_{[x-2i,3]} + v^4N_{[x-2i,4]} \right. \\ & + & v^3N_{[x-2i,5]} + v^2N_{[x-2i,6]} \right) \end{array}$$

Das ergibt die Formel für $N_{[x+1,1]}$.

Bezeichne nun s die Spiegelung an Ebenen ohne Punkt. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} \underline{N}_{[x+1,1]}C_s & = & N_{[x+2,1]} + vN_{[x+1,1]} + v^2N_{[x+1,2]} + vN_{[x+1,3]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{v}{2}-1} \left(vN_{[x-2i,4]} + v^2N_{[x-2i-1,2]} + vN_{[x-2i-1,3]} \right. \\ & & + & v^2N_{[x-2i-1,4]} + v^2N_{[x-2i-2,1]} + v^3N_{[x-2i-2,2]} \\ & & + & v^2N_{[x-2i-2,3]} + vN_{[x-4i-2,4]} + v^3N_{[x-2i-3,1]} \right) \\ & + & & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{v}{2}-2} \left(N_{[x-2i,3]} + vN_{[x-2i,2]} + vN_{[x-2i,4]} \right. \\ & & & + & v^2N_{[x-2i,1]} + v^3N_{[x-2i-1,1]} + v^4N_{[x-2i-1,2]} \\ & & + & v^3N_{[x-2i-1,3]} + v^2N_{[x-2i,4]} \right) \end{array} \right\} \\ = & \sum_{i=1}^{\frac{v}{2}-2} \underline{N}_{[x+1,2]} \\ & + & v^3N_{[x-2i-1,3]} + v^2N_{[x-2i,4]} \right)$$

Nach Abzug der "Anteile mit konstanten Koeffizienten" ist dies gerade die besagte Formel. Sei nun s die Spiegelung bezüglich der langen Seite. Wir erhalten

$$\begin{array}{lcl} \underline{N}_{[x+2,1]}C_{s} & = & N_{[x+2,2]} + vN_{[x+2,1]} \\ & + & v^{2}N_{[x+1,1]} + v^{3}N_{[x+1,2]} + v^{2}N_{[x+1,3]} + vN_{[x+1,4]} \\ & + & \displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{x}{2}-1} \left(vN_{[x-2i,3]} + v^{2}N_{[x-2i,4]} + v^{2}N_{[x-2i-1,1]} \right. \\ & + & v^{3}N_{[x-2i-1,2]} + v^{2}N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \\ & & + & v^{3}N_{[x-2i-2,1]} + v^{2}N_{[x-2i-2,2]} \right) \\ & + & \left. N_{[x+1,1]} + vN_{[x+1,2]} + v^{2}N_{[x-1,3]} \right. \\ & + & \left. vN_{[x-1,4]} + v^{3}N_{[x-2,1]} + v^{2}N_{[x-2,2]} \right. \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}-2} \left(vN_{[x-2i,3]} + v^{2}N_{[x-2i-1,2]} \right. \\ & + & v^{2}N_{[x-2i-1,1]} + v^{3}N_{[x-2i-1,4]} \\ & & + & v^{2}N_{[x-2i-1,3]} + vN_{[x-2i-1,4]} \\ & & + & v^{3}N_{[x-2i-2,1]} + v^{2}N_{[x-2i-2,2]} \right) \end{array} \right\} = \underline{N}_{[x+1,1]}$$

Somit haben wir auch die letzte unserer obigen Formeln verifiziert.

Man kann sich aber auch auf andere Weise von der Richtigkeit dieser Aussage überzeugen, die nicht auf die konkrete Gestalt des Wurzelsystemes und der "einzuschiebenden Teile" eingeht, sondern nur die Kenntnis einiger explizit berechneter Patterns voraussetzt.

Dazu bezeichne \overline{B} den topologische Abschluß des Alkoven B. Für die Menge Π aller Alkoven einer festen Box und ein ganzes Gewicht λ sei $\mathbb{Z}\lambda + \Pi = \{A \in \mathcal{A}^+ \mid \exists z \in \mathbb{Z}, \text{ so daß } z\lambda + A \in \Pi\}$. Für eine feste natürliche Zahl z führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$z_{\leq}\lambda + \Pi = \bigcup_{i=0}^{z} i\lambda + \Pi = \{A \in \mathcal{A}^{+} \mid \exists i \in \mathbb{N}, \ i \leq z, \text{ so daß } -i\lambda + A \in \Pi\}.$$

Nun gilt für ein Wurzelsystem R vom Rang zwei folgender

Satz 3.5 Sei Rang(R)=2. Sei $\Pi \subset A^+ - A^{++}$ die Menge aller Alkoven einer festen Box, $\tilde{\lambda}$ ein fundamentales Gewicht, so daß $\tilde{\lambda} + \Pi \subset A^+ - A^{++}$ und $\lambda = z\tilde{\lambda} \in \mathbb{Z}R$ für eine natürliche Zahl z. Für alle $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ gebe es $K_A, B_A, S_A \in \sum_{B \leq A} \mathbb{N}[v]N_B$, so daß

$$\underline{N}_A = K_A + B_A + S_A. \tag{3.1}$$

 \Diamond

Dabei gebe es ein $\mu \in \tilde{X} \cup \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- a.) Längs μ sind die N Patterns periodisch.
- b.) Es gibt eine natürliche Zahl $n_0 \ge 12$ mit $\left(\mathsf{Tr}(\langle (n_0 2)\lambda \rangle K_A) \cup \mathsf{Tr}(\langle (n_0 2)\rangle B_A) \right) \cap \left(\mathsf{Tr}(K_A) \cup \mathsf{Tr}(B_A) \right) = \emptyset$, so $da\beta$

$$\underline{N}_{n\lambda+A} = \langle n\lambda \rangle K_A + \sum_{i=0}^{n} \langle (n-i)\lambda + i\mu \rangle B_A + \langle n\mu \rangle S_A$$
 (3.2)

 $f\ddot{u}r \ n \in \mathbb{N} \ mit \ n \leq n_0 \ und \ A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi \ gilt.$

- c.) Für alle $C \in \mathcal{A}^+$ und $M \subset \Delta$ gilt:
 - $C \in \text{Tr}(K_A), \ \overline{C} \cap K(M) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{\lambda} \in K(M)$
 - $C \in \text{Tr}(B_A), \ \overline{C} \cap K(M) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{\lambda}, \mu \in K(M)$
 - $C \in \mathsf{Tr}(S_A), \ \overline{C} \cap K(M) \neq \emptyset \Rightarrow \mu \in K(M)$

Dann gilt für alle Alkoven $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ und jedes $n \in \mathbb{N}$:

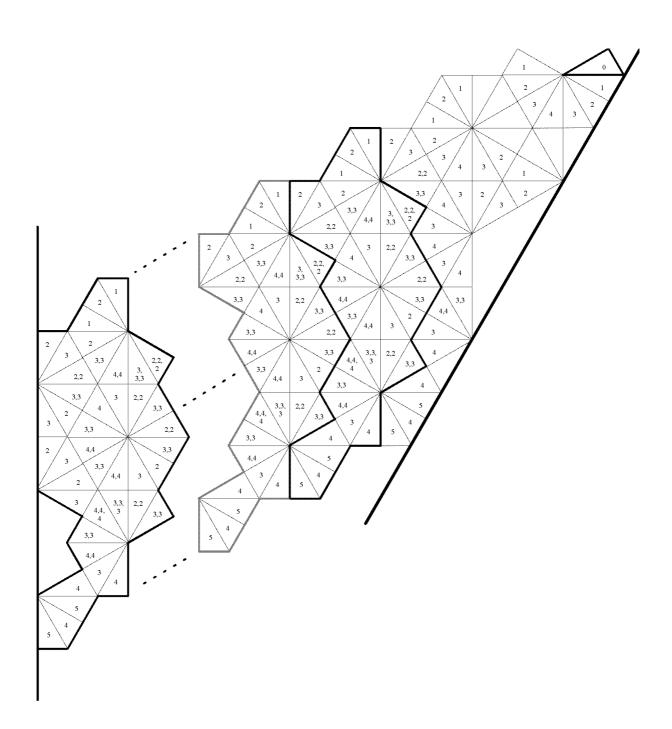
$$\underline{N}_{n\lambda+A} = \langle n\lambda \rangle K_A + \sum_{i=0}^n \langle (n-i)\lambda + i\mu \rangle B_A + \langle n\mu \rangle S_A.$$

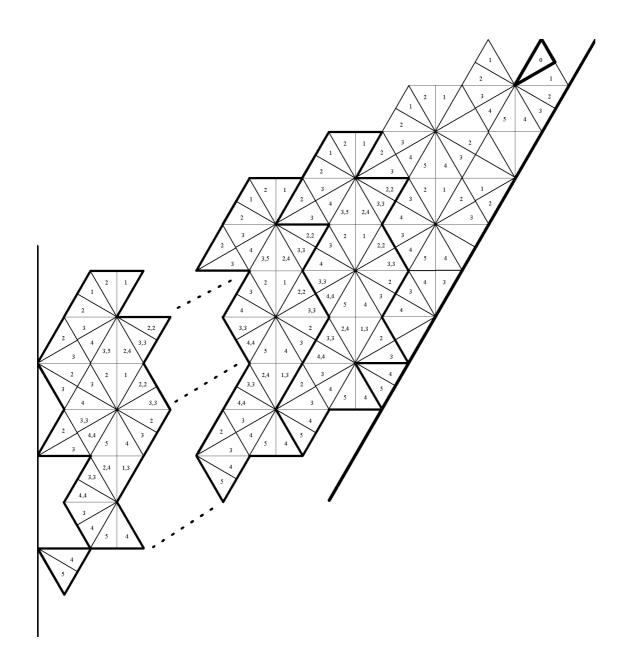
Beweis: Eine allgemeinere Form des Satzes wird später bewiesen (Satz 3.6).

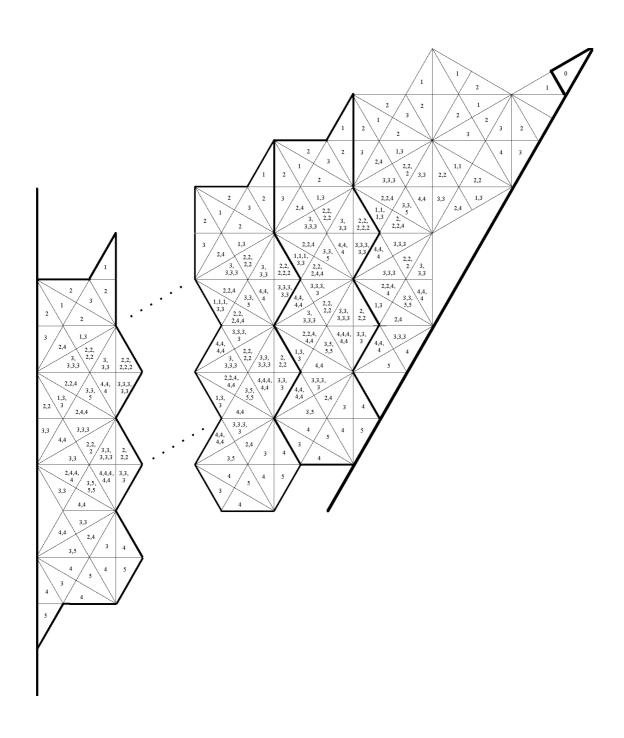
Obwohl die Menge der Patterns im gerade beschriebenen Fall bezüglich der Länge unbeschränkt ist, ist sie bezüglich der Breite sehr wohl beschränkt. Im allgemeinen gilt diese Beschränktheit bezüglich der Breite aber nicht, wie das Beispiel G_2 zeigt. Dies wird im folgenden behandelt.

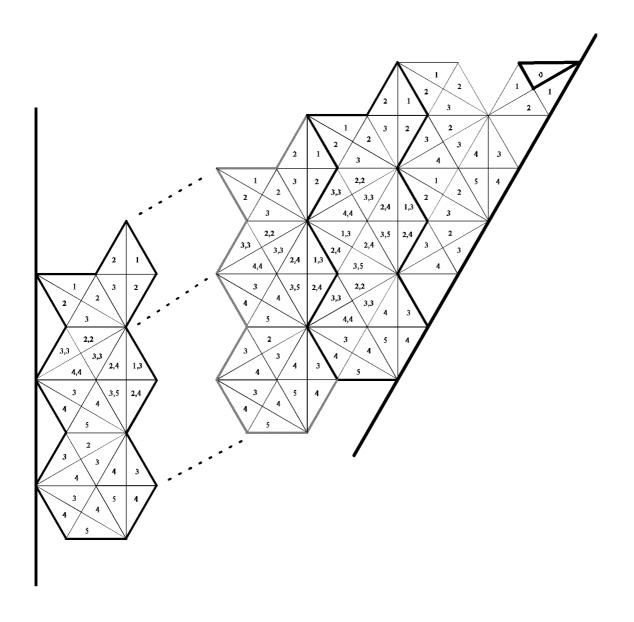
3.5 Unbeschränktheit im Fall G_2

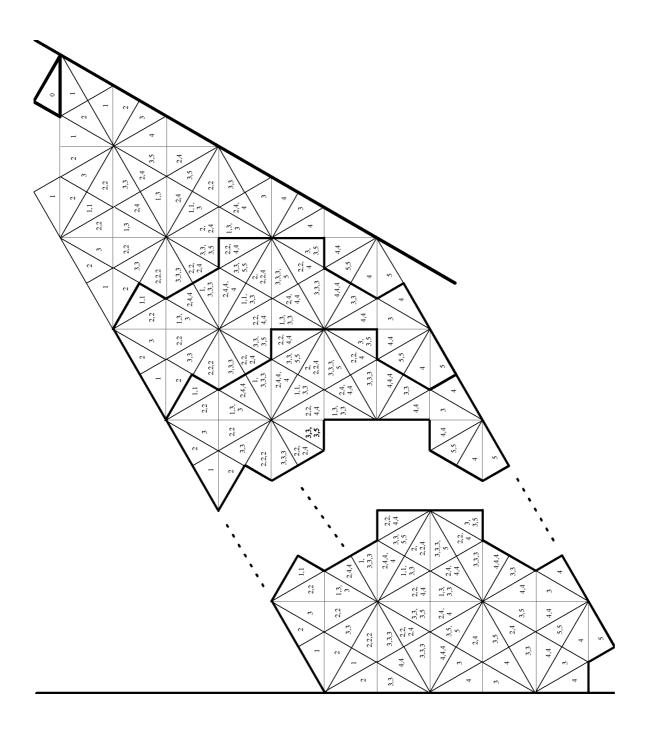
Für das Wurzelsystem G_2 sind Patterns bezüglich der Kante, die zur kurzen Wurzel gehört, nicht periodisch, vielmehr ist die Menge der Patterns sogar bezüglich der Breite unbeschränkt. Durch etwas aufwendigere Rechnungen gelangt man zur Vermutung, daß sich die Patterns wie in den folgenden Bildern dargestellt verhalten:

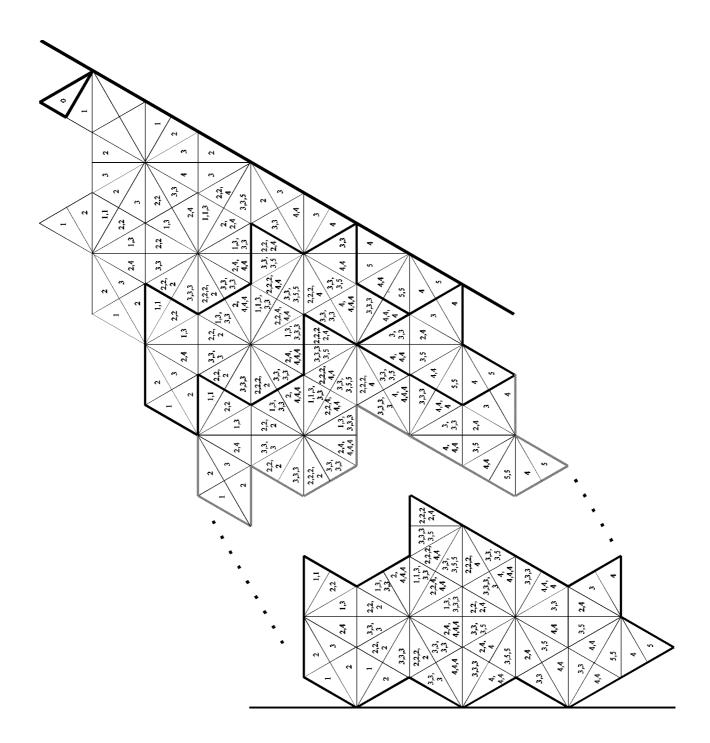


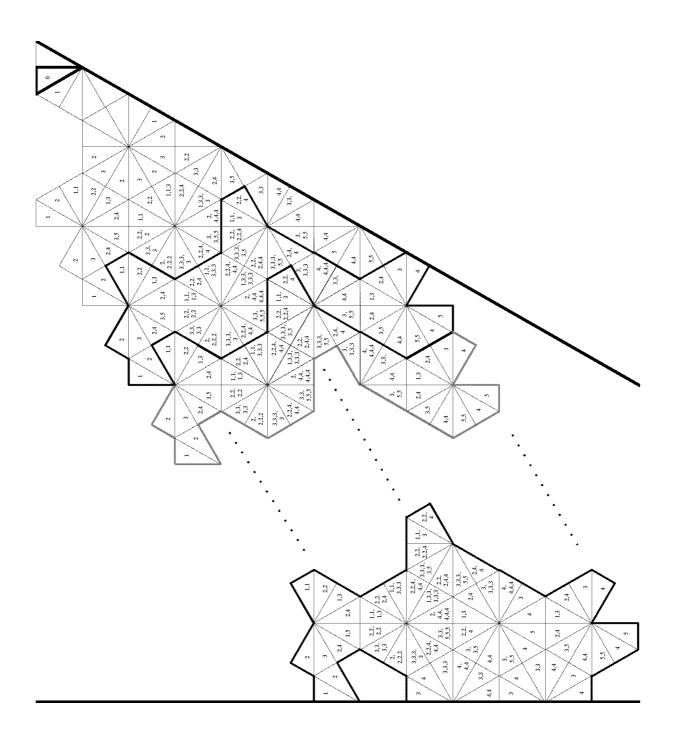


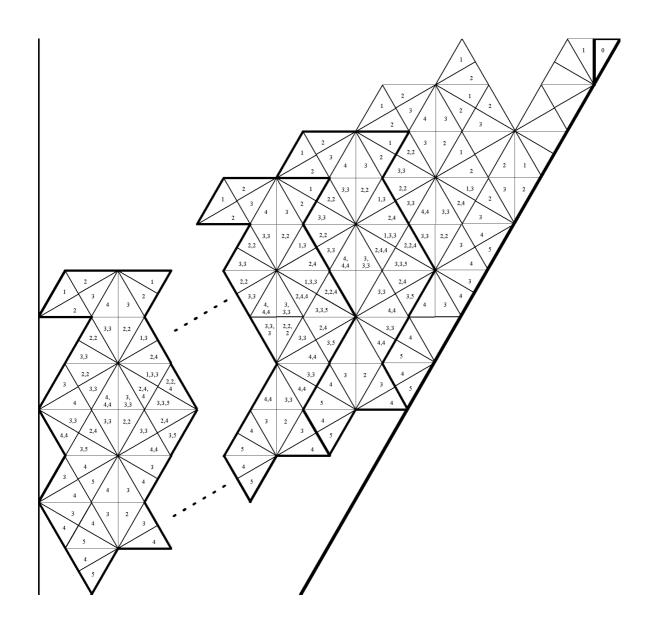


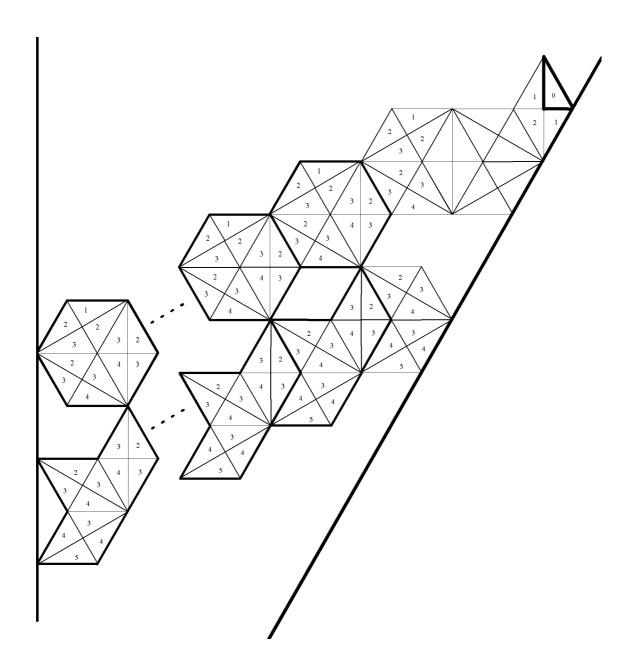


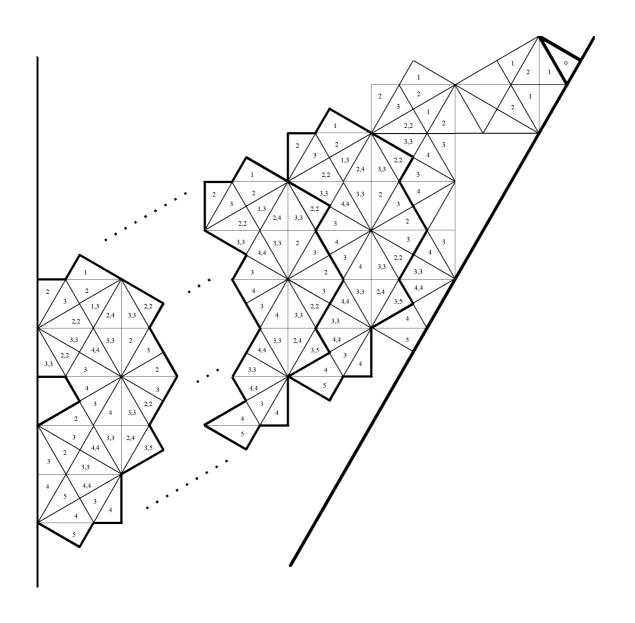


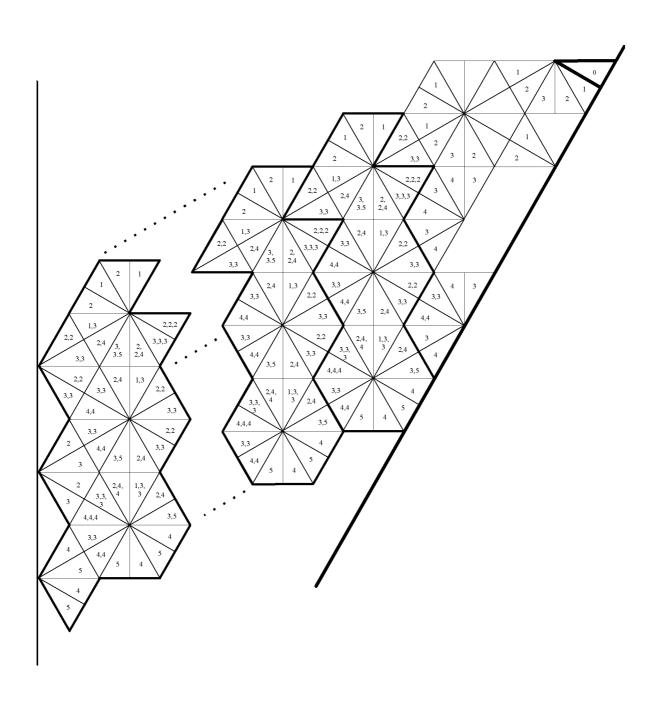


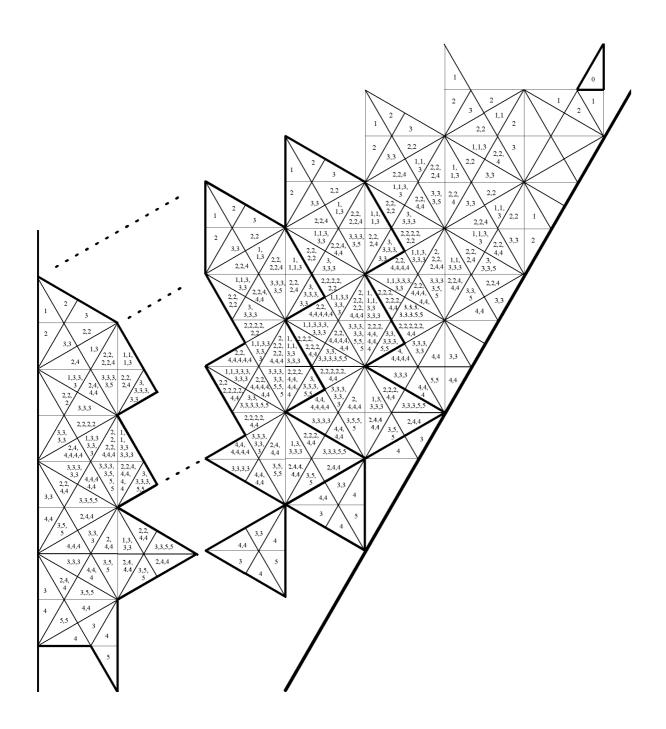












Für kleine Bezugsalkoven kann man dies explizit nachrechnen. Um zu beweisen, daß sich das beschriebene Verhalten auch beliebig weit fortsetzt, benutze ich Satz 3.5, den ich in der folgenden verallgemeinerten Form beweise.

Satz 3.6 Sei $\Pi \subset \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^{++}$ die Menge aller Alkoven einer festen Box, $\tilde{\lambda}$ ein fundamentales Gewicht, so daß $\lambda + \Pi \subset \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^{++}$ und $\lambda = z\tilde{\lambda} \in \mathbb{Z}R$ für eine natürliche Zahl z. Für alle $A \in z_{\leq}\tilde{\lambda} + \Pi$ gebe es $K_A, B_A, S_A \in \sum_{B \prec A} \mathbb{N}[v]N_B$, so daß

$$\underline{N}_A = K_A + B_A + S_A, \tag{3.3}$$

und es gebe ein $\mu \in \tilde{X} \cup \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- a.) Längs μ sind die N-Patterns periodisch.
- b.) Längs λ sind Alkoven aus \mathcal{A}^+ $(\mathbb{Z}\tilde{\lambda}+\Pi)$ periodisch
- c.) Es gibt eine natürliche Zahl $n_0 \ge n_\mu + n_\lambda + 2$ mit $\left(\mathsf{Tr}(\langle (n_0 2)\lambda \rangle K_A) \cup \mathsf{Tr}(\langle (n_0 2)\lambda \rangle B_A) \right) \cap (\mathsf{Tr}(K_A) \cup \mathsf{Tr}(B_A)) = \emptyset$, so da β

$$\underline{N}_{n\lambda+A} = \langle n\lambda \rangle K_A + \sum_{i=0}^{n} \langle (n-i)\lambda + i\mu \rangle B_A + \langle n\mu \rangle S_A$$
(3.4)

 $f\ddot{u}r \ n \in \mathbb{N} \ mit \ n < n_0 \ und \ A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi \ gilt.$

- d.) Für alle $C \in A^+$ und $M \subset \Delta$ gilt:
 - $C \in \mathsf{Tr}(K_A), \ \overline{C} \cap K(M) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{\lambda} \in K(M)$
 - $C \in \text{Tr}(B_A), \ \overline{C} \cap K(M) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{\lambda}, \mu \in K(M)$
 - $C \in \text{Tr}(S_A), \ \overline{C} \cap K(M) \neq \emptyset \Rightarrow \mu \in K(M)$

Dann gilt für alle Alkoven $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ und jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{N}_{n\lambda+A} = \langle n\lambda \rangle K_A + \sum_{i=0}^n \langle (n-i)\lambda + i\mu \rangle B_A + \langle n\mu \rangle S_A.$$

Bemerkung 3.7 Für Rang(R)=2 hat man gerade die Bedingungen von Satz 3.5, denn in diesem Fall ist $n_{\lambda} \leq 4$. Im Fall G_2 ist, wie aus den Berechnungen ersichtlich, $n_{\mu}=6$, falls μ das fundamentale Gewicht zur langen Wurzel bezeichnet. Für die beiden beschriebenen Fälle B_2 und G_2 , bei denen die Patterns nicht periodisch sind, reicht z=1 aus. Im allgemeinen kann man für ein Wurzelsystem vom Typ B-G (mit beliebigem Rang) $z\leq 4$ und für A_l zumindest $z\leq l+1$ wählen.

Um im folgenden lange Formelausdrücke reduzieren zu können, verwende ich folgende Schreibweise:

$$B(n,A) = \sum_{i=0}^{n} \langle (n-i)\lambda + i\mu \rangle B_A.$$

Für den Beweis des Satzes benötige ich einige Zwischenbehauptungen, die ich als Lemmata formuliere. Zuerst brauchen wir noch eine

Definition 3.8 Für alle Alkoven A der dominanten Weylkammer und jede einfache Spiegelung s mit $As \succ A$ setzen wir $R_A^s = \underline{N}_A C_s - \underline{N}_{As}$.

Lemma 3.9 Seien die Voraussetzungen wie im vorhergehenden Satz. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a.) es gibt es eine natürliche Zahl $m < n_0$, so daß für alle Alkoven $A \in \Pi$ und $n_0 \ge n > m$ gilt $\underline{N}_{n\lambda+A} = \langle \lambda \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+A}$.
- b.) es gilt $B_D = 0$, und falls $\tilde{\lambda} \neq \mu$ sogar $S_D = 0$, für einen Alkoven $D \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$.
- c.) es gilt $B_D = 0$, und falls $\tilde{\lambda} \neq \mu$ sogar $S_D = 0$, für alle Alkoven $D \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$.
- d.) die Alkoven aus $z < \tilde{\lambda} + \Pi$ sind längs λ periodisch (mit dazugehörigem $n_{\lambda} \leq n_0$).

Beweis: Für $N = \sum_A n_A N_A \in \mathcal{N}$ definieren wir $\mathsf{M}(N) = \sum_A n_A(1)$. Nehmen wir an, daß $\underline{N}_{m\lambda+A} = \langle \lambda \rangle \underline{N}_{(m-1)\lambda+A}$ gilt, also

$$\langle m\mu\rangle B_A + \langle m\mu\rangle S_A = \langle \lambda + (m-1)\mu\rangle S_A. \tag{3.5}$$

Dann muß $\mathsf{M}(B_A)=0$ sein. Da aber $B_A\in\sum_B\mathbb{N}[v]N_B$, gilt das nur, wenn bereits $B_A=0$ ist. Für $\tilde{\lambda}\neq\mu$ folgt damit auch sofort $S_A=0$. Damit impliziert also a.) die Bedingung b.). Sei nun $B_D=S_D=0$ für einen Alkoven $D\in z_{\leq}\tilde{\lambda}+\Pi$, das heißt, für $1\leq i\leq n_0$ gilt $\underline{N}_{i\lambda+D}=\langle i\lambda\rangle K_D$. Das ergibt:

$$\underline{N_{i\lambda+D}}C_s = \langle i\lambda \rangle (K_D C_s) = \underline{N_{i\lambda+Ds}} + R_{i\lambda+Ds}^s. \tag{3.6}$$

Angenommen $Ds \in z_{<} \tilde{\lambda} + \Pi$ und $B_{Ds} \neq 0$, dann gilt

$$M(\underline{N}_{n_0\lambda+Ds} + R_{n_0\lambda+D}^s) > M(\underline{N}_{(n_0-1)\lambda+Ds} + R_{(n_0-1)\lambda+D}^s),$$

da nach Voraussetzung $M(R^s_{n_0\lambda+D}) \ge M(R^s_{(n_0-1)\lambda+D})$ ist. Der Wert $M(\underline{N}_{i\lambda+D}C_s)$ ist aber für alle $i \le n_0$ derselbe, also folgt $B_{Ds} = 0$. Damit nun obige Gleichung 3.6 stimmt, muß aber sogar $M(R^s_{n_0\lambda+D}) = M(R^s_{(n_0-1)\lambda+D})$ sein. Wir erhalten damit für eine passende endliche Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathbb{N} \times \mathcal{A}$

$$0 = \underline{N}_{n_0\lambda + Ds} - \langle \lambda \rangle \underline{N}_{(n_0 - 1)\lambda + Ds} + R^s_{n_0\lambda + D} - \langle \lambda \rangle R^s_{(n_0 - 1)\lambda + D}$$

$$= \langle n_0\mu \rangle S_{Ds} - \langle \lambda \rangle \langle (n_0 - 1)\mu \rangle S_{Ds} + \sum_{(i,C) \in \mathcal{T}} \Big(\langle i\mu \rangle S_C - \langle \lambda \rangle \langle (i - 1)\mu \rangle S_C \Big).$$

Daraus folgt aber

$$\langle \lambda \rangle \Big(\langle (n_0 - 1)\mu \rangle S_{Ds} + \sum_{(i,C) \in \mathcal{T}} \big(\langle (i - 1)\mu \rangle S_C \big) \Big) = \langle \mu \rangle \Big(\langle (n_0 - 1)\mu \rangle S_{Ds} + \sum_{(i,C) \in \mathcal{T}} \big(\langle (i - 1)\mu \rangle S_C \big) \Big),$$

also, falls $\tilde{\lambda} \neq \mu$,

$$\langle (n_0 \mu \rangle S_{Ds} + \sum_{(i,C) \in \mathcal{T}} (\langle (i-1)\mu \rangle S_C) = 0.$$

Das ist aber sicherlich nur dann der Fall, wenn jeder Summand bereits Null ist, also insbesondere $S_{Ds} = 0$. Für $Ds \notin z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ und $B_{Ds} \neq 0$ gilt $\mathsf{M}(R^s_{(n_0-1)\lambda+D}) = \mathsf{M}(R^s_{(n_0-2)\lambda+D})$ und die Rechnung läuft völlig analog.

Die Folgerung c) \Rightarrow d) ist offensichtlich; d) \Rightarrow a) folgt direkt aus der Definition. Somit sind die vier Aussagen äquivalent. \diamondsuit

Bemerkung 3.10 Der Zusatz $\tilde{\lambda} \neq \mu$ in b.) und c.) kann umgangen werden, wenn man für den Fall, daß $\tilde{\lambda} = \mu$ ist, einfach $\tilde{K}_A = K_A + S_A$ anstatt K_A wählt.

 \Diamond

Lemma 3.11 Seien die Vorausetzungen wie in Satz 3.6. Dann gilt für alle Alkoven aus $z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ und alle natürlichen Zahlen n mit $2 \leq n \leq n_0$:

$$\underline{N}_{n\lambda+A} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+A} = \langle \lambda \rangle \left(\underline{N}_{(n-1)\lambda+A} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-2)\lambda+A}\right)$$

Beweis: Unter Ausnutzung der Gestalt unserer Patterns erhalten wir

$$\langle \lambda \rangle \left(\underline{N}_{(n-1)\lambda+A} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-2)\lambda+A} \right)$$

$$= \langle n\lambda \rangle K_A + \langle \lambda \rangle B(n-1,A) + \langle \lambda + (n-1)\mu \rangle S_A$$

$$- \langle \mu \rangle \left(\langle (n-1)\lambda \rangle K_A + \langle \lambda \rangle B(n-2,A) + \langle \lambda + (n-2)\mu \rangle S_A \right)$$

$$= \underline{N}_{n\lambda+A} - \langle n\mu \rangle B_A - \langle n\mu \rangle S_A + \langle \lambda + (n-1)\mu \rangle S_A$$

$$- \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+A} + \langle \mu \rangle \langle (n-1)\langle \mu \rangle \rangle B_A + \langle \mu \rangle \langle (n-1)\mu \rangle S_A - \langle \lambda + (n-1)\mu \rangle S_A$$

$$= \underline{N}_{n\lambda+A} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+A} .$$

Damit haben wir die Behauptung gezeigt.

Bemerkung 3.12 Bei diesem Lemma ist die Voraussetzung c.) des Satzes 3.6 und auch die Bedingung bezüglich des Trägers eigentlich nicht nötig.

Für die in Definition 3.8 erklärten Reste gilt die entsprechende Formel wie für die selbstdualen Elemente aus \mathcal{N} :

Lemma 3.13 Seien die Vorausetzungen wie in Satz 3.6. Dann gilt für alle Alkoven $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ und alle natürlichen Zahlen n mit $2 < n < n_0$:

$$R_{n\lambda+A}^s - \langle \mu \rangle R_{(n-1)\lambda+A}^s = \langle \lambda \rangle \Big(R_{(n-1)\lambda+A}^s - \langle \mu \rangle R_{(n-2)\lambda+A}^s \Big).$$

Falls $As \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$, gilt die Aussage auch für $n = n_0$.

Beweis: Aus den Definitionen folgen für $2 \le n < n_0$ und $A, As \in z_{\le} \tilde{\lambda} + \Pi$ mit $As \succ A$ sofort die beiden Gleichungen

$$\underline{N}_{n\lambda+As} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+As} = \langle n\lambda \rangle (K_A C_s + B_A C_s) - \langle (n-1)\lambda + \mu \rangle K_A C_s
-R_{n\lambda+A}^s + \langle \mu \rangle R_{(n-1)\lambda+A}^s
\langle \lambda \rangle \Big(\underline{N}_{(n-1)\lambda+As} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-2)\lambda+As} \Big) = \langle \lambda \rangle \Big(\langle (n-1)\lambda \rangle (K_A C_s + B_A C_s) - \langle (n-2)\lambda + \mu \rangle K_A C_s \Big)
-\langle \lambda \rangle \Big(R_{(n-1)\lambda+A}^s + \langle \mu \rangle R_{(n-2)\lambda+A}^s \Big)$$

Mit Lemma 3.11 erhält man durch Subtraktion der beiden Gleichungen direkt die Behauptung. Entsprechend gilt für $D \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ mit $D \prec Ds = \lambda + A$, wobei $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$, und $n \geq 2$:

$$\underline{N}_{n\lambda+A} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+A} = \langle (n-1)\lambda \rangle (K_D C_s + B_D C_s) - \langle (n-2)\lambda + \mu \rangle K_D C_s
- R_{(n-1)\lambda+D}^s + \langle \mu \rangle R_{(n-2)\lambda+D}^s$$

$$\langle \lambda \rangle \Big(\underline{N}_{(n-1)\lambda+A} - \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-2)\lambda+A} \Big) = \langle \lambda \rangle \Big(\langle (n-2)\lambda \rangle (K_D C_s + B_D C_s) - \langle (n-3)\lambda + \mu \rangle K_D C_s \Big)$$
$$- \langle \lambda \rangle \Big(R_{(n-2)\lambda+D}^s + \langle \mu \rangle R_{(n-3)\lambda+D}^s \Big)$$

Durch Subtraktion erhält man wiederum die geforderte Formel.

Lemma 3.14 Seien die Vorausetzungen wie in Satz 3.6. Dann gilt für alle Alkoven $D \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ mit $D \prec Ds = \lambda + A$, wobei $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$, und $1 \leq n < n_0$

$$\langle n\mu \rangle B_D C_s = \langle (n+1)\mu \rangle B_A + \langle (n+1)\mu \rangle S_A - \langle \lambda + n\mu \rangle S_A - (\langle n\mu \rangle S_D) C_s + \langle \lambda \rangle \Big((\langle (n-1)\mu \rangle S_D) C_s \Big) + R_{n\lambda+D}^s - \langle \lambda \rangle R_{(n-1)\lambda+D}^s$$

und für $A, As \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ mit $As \succ A$ und $1 \leq n < n_0$

$$\langle n\mu \rangle B_A C_s = \langle n\mu \rangle B_{As} + \langle n\mu \rangle S_{As} - \langle (n-1)\mu \rangle S_{As} - (\langle n\mu \rangle S_A) C_s + \langle \lambda \rangle \Big((\langle (n-1)\mu \rangle S_A) C_s) + R_{n\lambda+A}^s - \langle \lambda \rangle R_{(n-1)\lambda+A}^s \Big)$$

Beweis: Nach Definition von $R^s_{n\lambda+D}$ ist folgende Gleichung erfüllt:

$$\left(\langle (n-1)\lambda\rangle K_D + B(n-1,D) + \langle (n-1)\mu\rangle S_D\right) C_s = \langle n\lambda\rangle K_A + B(n,A) + \langle n\mu\rangle S_A + R^s_{(n-1)\lambda+D}$$

$$\Longrightarrow \langle n\lambda\rangle K_D C_s + \langle \lambda\rangle B(n-1,D) C_s + \langle \lambda\rangle \left((\langle (n-1)\mu\rangle S_D) C_s\right)$$

$$= \langle (n+1)\lambda\rangle K_A + \langle \lambda\rangle B(n,A) + \langle \lambda\rangle \left(\langle n\mu\rangle S_A\right) + \langle \lambda\rangle R^s_{(n-1)\lambda+D}.$$

Andererseits gilt

$$\langle n\lambda \rangle K_D C_s + B(n, D) C_s + \left(\langle n\mu \rangle S_D\right) C_s$$

= $\langle (n+1)\lambda \rangle K_A + B(n+1, A) + \langle (n+1)\mu \rangle S_A + R_{n\lambda+D}^s$.

Durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen erhält man die erste Behauptung. Ebenso gelten für $A, As \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ und $1 \leq n < n_0$ folgende Formeln:

$$\left(\langle n\lambda\rangle K_A + B(n,A) + \langle n\mu\rangle S_A\right)C_s = \langle n\lambda\rangle K_{As} + B(n,As) + \langle n\mu\rangle S_{As} + R_{n\lambda+A}^s$$

und

$$\langle \lambda \rangle \Big(\Big(\langle (n-1)\lambda \rangle K_A + B(n-1,A) + \langle (n-1)\mu \rangle S_A \Big) C_s \Big)$$

= $\langle \lambda \rangle \Big(\langle (n-1)\lambda \rangle K_{As} + B(n-1,As) + \langle (n-1)\mu \rangle S_{As} + R_{(n-1)\lambda+A}^s \Big).$

 \Diamond

Wiederum durch Subtraktion ist auch die zweite der behaupteten Formeln gezeigt.

Beweis des Satzes 3.6: Nach Voraussetzung gilt die Formel 3.4 für $A \in \langle i\lambda \rangle (z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi)$ mit $i \leq n_0$. Sie gelte nun auch für $i \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$.

Sei $D \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ mit $D \prec Ds = \bar{\lambda} + A$ (wobei $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$). Dann gilt:

$$\underline{N}_{n\lambda+D}C_s = \left(\langle n\lambda\rangle K_D + B(n,D) + \langle n\mu\rangle S_D\right)C_s
= \langle \lambda\rangle \left((\langle (n-1)\lambda\rangle K_D + B(n-1,D) + \langle (n-1)\mu\rangle S_D)C_s\right)
+ \langle n\mu\rangle B_DC_s + (\langle n\mu\rangle S_D)C_s - \langle \lambda\rangle \left(\langle (n-1)\mu\rangle S_D\right)C_s\right)
= \langle \lambda\rangle \left(\langle n\lambda\rangle K_A + B(n,A) + \langle n\mu\rangle S_A + R_{(n-1)\lambda+D}^s\right)
+ \langle n\mu\rangle B_DC_s + (\langle n\mu\rangle S_D)C_s - \langle \lambda\rangle \left(\left(\langle (n-1)\mu\rangle S_D\right)C_s\right)
nach Lemma 3.14 ist dies aber
= \langle \lambda\rangle \left(\langle n\lambda\rangle K_A + B(n,A) + \langle n\mu\rangle S_A + R_{(n-1)\lambda+D}^s\right)$$

$$+\langle\mu\rangle\Big(\langle n\mu\rangle B_A + \langle n\mu\rangle S_A - \langle\lambda + (n-1)\mu\rangle S_A - (\langle(n-1)\mu\rangle S_D)C_s\Big)$$

$$+\langle\mu\rangle\Big(\langle\lambda\rangle\Big((\langle(n-2)\mu\rangle S_D)C_s\Big)\Big) + R_{(n-1)\lambda+D}^s - \langle\lambda\rangle R_{(n-2)\lambda+D}^s\Big)$$

$$+(\langle n\mu\rangle S_D)C_s - \langle\lambda\rangle\Big(\Big(\langle(n-1)\mu\rangle S_D\Big)C_s\Big)$$

$$= \langle(n+1)\lambda\rangle K_A + B(n+1,A) + \langle(n+1)\mu\rangle S_A$$

$$+\langle\mu\rangle\Big(R_{(n-1)\lambda+D}^s - \langle\lambda\rangle R_{(n-2)\lambda+D}^s\Big) + \langle\lambda\rangle R_{(n-1)\lambda+D}^s.$$
(*)

Können wir noch zeigen, daß (*) eine Summe von selbstdualen Elementen ist, dann ist die Behauptung für $\underline{N}_{(n+1)\lambda+A}$ bewiesen. Nehmen wir nun an, wir hätten dies bereits gezeigt, dann erhalten wir analog zur obigen Rechnung für $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ mit $As \succ A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$

$$\underline{N}_{(n+1)\lambda+A}C_s = \langle (n+1)\lambda \rangle K_{As} + B(n+1,As) + \langle (n+1)\mu \rangle S_{As}
+ \underbrace{\langle \mu \rangle \left(R_{(n-1)\lambda+A}^s - \langle \lambda \rangle R_{(n-2)\lambda+A}^s \right) + \langle \lambda \rangle R_{(n-1)\lambda+A}^s}_{(**)}.$$

Untersuchen wir nun (*) bzw. (**). Betrachten wir zuerst den Fall $\mu = 0$. Sei $n_0 \le m \le n$. Wir setzen

$$T_{K,A,m,s} = \{ B \in \mathcal{A}^+ \mid B \in \mathsf{Tr}_{\mathbb{Z}}(\langle (m-2)\lambda \rangle K_A C_s) \}.$$

Bei Summation über Elemente aus dem ganzzahligen Träger eines Elementes aus \mathcal{N} soll immer die entsprechende (auch negative) Vielfachheit mitgezählt werden, also statt $\sum_{B\in \mathsf{Tr}_{\mathbb{Z}}(N)} p_B(0)N_B$ wird im

folgenden einfach $\sum_{B \in \text{Tr}_{\mathbb{Z}}(N)} N_B$ geschrieben. Für $T_{B,A,m,s}$ bzw. $T_{S,A,m,s}$ treffen wir analoge Vereinbarungen. Außerdem verwenden wir folgende Abkürzung

$$N(m,C) = \sum_{i=0}^{m} \underline{N}_{i\lambda+C}$$

Dann können wir schreiben:

$$R_{(m-2)\lambda+A}^{s} = \sum_{C \in T_{K,A,m,s}} \underline{N}_{C} + \sum_{C \in T_{B,A,m,s}} N(m-2,C) + \sum_{C \in T_{S,A,m,s}} \underline{N}_{C}.$$
 (3.7)

Nach Lemma 3.13 gilt:

$$R_{m\lambda+A}^s - R_{(m-1)\lambda+A}^s = \langle \lambda \rangle \Big(R_{(m-1)\lambda+A}^s - R_{(m-2)\lambda+A}^s \Big).$$

Mit der obigen Formel 3.7 erhält man die dazu äquivalente Aussage (wobei ich nun die Indizes A, m, s, C weglasse):

$$\sum_{C \in T_K} (\underline{N}_{2\lambda+C} - \underline{N}_{\lambda+C}) + \sum_{C \in T_B} \left(N(m) - N(m-1) \right) + \sum_{C \in T_S} \underline{N}_C - \underline{N}_C
= \sum_{C \in T_K} \langle \lambda \rangle (\underline{N}_{\lambda+C} - \underline{N}_C) + \sum_{C \in T_B} \langle \lambda \rangle \left(N(m-1) - N(m-2) \right) + \sum_{C \in T_S} \underline{N}_C - \underline{N}_C.$$
(3.8)

Für $C \in T_K$ gilt entweder $C \in \mathcal{A}^+ - (\mathbb{Z}\tilde{\lambda} + \Pi)$ und wegen der Periodizität längs λ also $\underline{N}_{2\lambda + C} = \langle \lambda \rangle \underline{N}_{\lambda + C}$ und $\underline{N}_{\lambda + C} = \langle \lambda \rangle \underline{N}_C$, oder $C \in \mathbb{Z}\tilde{\lambda} + \Pi$ und nach Lemma 3.11 somit $\underline{N}_{2\lambda + C} - \underline{N}_{\lambda + C} = \langle \lambda \rangle (\underline{N}_{\lambda + C} - \underline{N}_C)$. Also folgt aus Gleichung 3.8

$$\sum_{C \in T_B} \underline{N}_{m\lambda + C} = \langle \lambda \rangle (\sum_{C \in T_B} \underline{N}_{(m-1)\lambda + C}).$$

Wäre nun $C \in \mathbb{Z}\tilde{\lambda} + \Pi$ für einen Alkoven $C \in T_B$, wären die Patterns nach Lemma 3.9 periodisch, und wir wären fertig. Andernfalls gilt statt Gleichung 3.7:

$$R_{(m-2)\lambda+A}^s = \sum_{C \in T_K} \underline{N}_C + \sum_{C \in T_B \cap (\mathcal{A}^+ - \mathbb{Z}\tilde{\lambda} + \Pi)} N(m-2, C) + \sum_{C \in T_S} \underline{N}_C$$

Damit erhalten wir:

$$(*) = \sum_{C \in T_K} (\underline{N}_{\lambda+C} - \langle \lambda \rangle \underline{N}_C + \langle \lambda \rangle \underline{N}_{\lambda+C})$$

$$+ \sum_{C \in T_B} \left(N(n-1) - \langle \lambda \rangle N(n-2) + \langle \lambda \rangle N(n-1) \right) + \sum_{C \in T_S} \underline{N}_C - \langle \lambda \rangle \underline{N}_C + \langle \lambda \rangle \underline{N}_C$$

$$= \sum_{C \in T_K} \underline{N}_{\lambda+C} + \sum_{C \in T_B} \left(N(n-1) + \underbrace{\langle \lambda \rangle \underline{N}_{(n-1)\lambda+C}}_{=\underline{N}_{n\lambda+C}} \right) + \sum_{C \in T_S} \underline{N}_C$$

Also ist (*) eine (endliche) Summe von selbstdualen Elementen. Analog erhält man die entsprechende Aussage für (**).

Wenden wir uns nun dem Fall $\mu \neq 0$ zu. Sei mit den obigen Bezeichnungen

$$R_{(n-2)\lambda+A}^{s} = \sum_{C \in T_{\kappa}} \underline{N}_{C} + \sum_{C \in T_{\kappa}} \sum_{i=0}^{n-2} \underline{N}_{(n-2-i)\lambda+i\mu+C} + \sum_{C \in T_{\kappa}} \underline{N}_{(n-2)\mu+C}.$$

Setzen wir

$$R(n, C, a, b) = \sum_{i=a}^{b} \underline{N}_{(n-i)\lambda + i\mu + C}$$

und schreiben für R(n, C, 0, n) einfach R(n, C), dann gilt (wobei der Index C wieder weggelassen wird):

$$(*) = \sum_{C \in T_K} (\langle \mu \rangle \underline{N}_{\lambda+C} - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle \underline{N}_C + \langle \lambda \rangle \underline{N}_{\lambda+C})$$

$$+ \sum_{C \in T_B} (\langle \mu \rangle R(n-1) - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle R(n-2) + \langle \lambda \rangle R(n-1))$$

$$+ \sum_{C \in T_S} (\langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-1)\mu+C} - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle \underline{N}_{(n-2)\mu+C} + \langle \lambda \rangle \underline{N}_{(n-1)\mu+C})$$
mit dewelben Begründung wie oben, und de die Petterns längs μ

mit derselben Begründung wie oben, und da die Patterns längs μ periodisch sind, gilt:

$$= \sum_{C \in T_K} \underline{N}_{2\lambda + C}$$

$$+ \sum_{C \in T_B} \left(\langle \mu \rangle R(n-1) - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle R(n-2) + \langle \lambda \rangle R(n-1) \right)$$

$$+ \sum_{C \in T_B} \underline{N}_{n\mu + C}$$

Für die zweite Summe können wir noch weitere Umformungen vornehmen. Nach Lemma 3.11 gilt:

$$\sum_{C\in\mathbb{Z}\tilde{\lambda}+\Pi}\langle\mu\rangle R(n-1,0,n_{\mu}-1)-\langle\lambda\rangle\langle\mu\rangle R(n-2,0,n_{\mu}-1)+\langle\lambda\rangle R(n-1,0,n_{\mu}-1)=R(n,0,n_{\mu}-1).$$

Andererseits bekommen wir wegen der Periodizität längs λ (Voraussetzung b.) des Satzes) die Gleichung

$$\sum_{C \notin \mathbb{Z} \tilde{\lambda} + \Pi} \langle \mu \rangle R(n-1,0,n_{\mu}-1) - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle R(n-2,0,n_{\mu}-1) + \langle \lambda \rangle R(n-1,0,n_{\mu}-1)$$

$$= \langle \mu \rangle R(n-1,0,n_{\mu}-1) - \langle \mu \rangle R(n-1,0,n_{\mu}-1) + R(n,0,n_{\mu}-1)$$

$$= R(n,0,n_{\mu}-1).$$

Damit erhalten wir für $C \in T_B$

$$\langle \mu \rangle R(n-1) - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle R(n-2) + \langle \lambda \rangle R(n-1)$$

$$= R(n,0,n_{\mu}-1) + \langle \mu \rangle R(n-1,n_{\mu},n-1) - \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle R(n-2,n_{\mu},n-2) + \langle \lambda \rangle R(n-1,n_{\mu},n-1)$$

$$= R(n,0,n_{\mu}-1) + R(n,n_{\mu}+1,n) - \langle \lambda \rangle R(n-1,n_{\mu}+1,n-1) + \langle \lambda \rangle R(n-1,n_{\mu},n-1)$$

$$= R(n,0,n_{\mu}-1) + R(n,n_{\mu}=1,n) + \langle \lambda \rangle R(n-1,n_{\mu},n_{\mu})$$

$$= R(n)$$

Also bekommen wir schließlich:

$$(*) = \sum_{C \in T_K} \underline{N}_{2\lambda + C} + \sum_{C \in T_B} R(n) + \sum_{C \in T_S} \underline{N}_{n\mu + C}$$

Analog erhält man auch, daß (**) eine Summe von selbstdualen Elementen ist. Somit ist also der Satz 3.6 (und der Spezialfall Satz 3.5) bewiesen.

Bemerkung 3.15 Jetzt ist natürlich klar, daß man, wenn man die feste Box Π genügend groß wählt, für alle $A \in z_{\leq} \tilde{\lambda} + \Pi$ stets K_A, B_A, S_A so bestimmen kann, daß $\text{Tr}(K_A) \cap \text{Tr}(B_A) = \text{Tr}(K_A) \cap \text{Tr}(S_A) = \text{Tr}(B_A) \cap \text{Tr}(\bar{S}_A) = \emptyset$ gilt.

Kapitel 4

Stabilitätsaussagen am Rand

Nachdem nun an zwei Beispielen im zweidimensionalen Fall klar wurde, daß die ursprünglichen Vermutungen falsch sind, das heißt, daß die Patterns im allgemeinen weder periodisch noch beschränkt sind, stellt sich die Frage, ob man dennoch periodische Eigenschaften feststellen kann. Der folgende Satz besagt, daß ein gewisser "Kopf" der Patterns immer stabil bleibt.

Definition 4.1 Sei M eine Teilmenge der einfachen Wurzeln. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{S}_M = \langle s_\alpha \mid \alpha \in M \rangle$$

das Erzeugnis der einfachen Spiegelungen zu M. Sei zusätzlich $A \in \mathcal{A}^+$ ein fester Alkoven. Der Kopf (von A bezüglich M) sei definiert als

$$K_M(A) = \{B \in \mathcal{A}^+ \mid \text{es gibt keinen Alkoven } C \subset V - \bigcup_{s \in \mathcal{S}_M} s\mathcal{C} : B \prec C \prec A\}$$

Sei $\lambda \in X^+$ ein dominantes Gewicht, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die fundamentalen Gewichte. Schreibt man nun $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ als Linearkombination der fundamentalen Gewichte, dann bezeichne $\overline{\lambda} = \sum_{\lambda_i \neq 0} \omega_i$.

Nun können wir den zentralen Satz dieser Arbeit formulieren:

Satz 4.2 Sei $M \subset \Delta$ eine Teilmenge der einfachen Wurzeln und $\lambda \in X^+ \cap K(M)$. Dann gilt für alle Alkoven $A \subset \overline{\lambda} + \mathcal{C}$ die Gleichung

$$\operatorname{Tr}(\langle -\lambda \rangle \underline{N}_{\lambda+A} - \underline{N}_A) \cap K_M(A) = \emptyset.$$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 4.3 Sei $M \subset \Delta$ eine Teilmenge der einfachen Wurzeln. Sei $\lambda \in X^+ \cap K(M)$. Dann gilt für jeden Alkoven B die Schlußfolgerung

$$B \notin \bigcup_{s \in \mathcal{S}_M} s\mathcal{C} \Rightarrow -\lambda + B \notin \bigcup_{s \in \mathcal{S}_M} s\mathcal{C}.$$

Beweis: Sei H_M^C die Menge der Hyperebenen zu Spiegelungen aus $W - S_M$. Da jede einfache Spiegelung s_α gerade α auf $-\alpha$ abbildet und die anderen positiven Wurzeln permutiert, gilt:

$$B \not\in \bigcup_{s \in \mathcal{S}_M} s\mathcal{C} \Leftrightarrow B \subset H^{-} \text{ für mindestens ein } H \in H_M^C.$$

Da aber immer $-\lambda + H^- \subset H^-$ ist, folgt die Behauptung.

 \Diamond

Lemma 4.4 Für alle Alkoven $A \in A^+$ gibt es eindeutig bestimmte $p_{B,A} \in \mathcal{L}$, so daß gilt:

$$M_A = \underline{M}_A - \sum_{B \prec A} p_{B,A} \, \underline{M}_B \tag{4.1}$$

Beweis: Da für alle Alkoven die Gleichung $M_A = \underline{M}_A - \sum_{B \prec A} m_{B,A} M_B$ erfüllt ist, erhält man schließ-

lich die Darstellung $M_A = \underline{M}_A - \sum_{B \prec A} p_{B,A} \underline{M}_B$. Natürlich ist $\{\underline{M}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ linear unabhängig, also Basis des \mathcal{L} -Moduls \mathcal{M} .

Hilfssatz 4.5 Sei M eine Teilmenge der einfachen Wurzeln. K(M) die zugehörige Facette der dominanten Weylkammer. Für $\lambda \in K(M) \cap X$ und jeden Alkoven $A \subset \overline{\lambda} + \mathcal{C}$ gilt

$$\mathsf{Tr}(\langle -\lambda \rangle \underline{M}_{\lambda+A} - \underline{M}_A) \cap K_M(A) = \emptyset. \tag{4.2}$$

Beweis: Nach [So1, Korollar 6.9] gilt für alle $A \in \mathcal{A}^+$

$$\underline{M}_{\lambda+A} = Res \circ \eta \circ Alt(\underline{P}_{\lambda+A}).$$

Dabei bezeichnet η die Partitionsfunktion, Res die Restriktionsabbildung und Alt die Antisymmetrisierung um $-\rho$. Zu jedem Alkoven B und jedem $x \in W$ gibt es einen Alkoven $x \star B$, so daß $\langle -\rho \rangle \langle x \rangle \langle \rho \rangle \underline{P}_B = \underline{P}_{x \star B}$ gilt. Mit den Bezeichnungen von [Lu] ist $\rho + x \star B = (\rho + B) * x$.

Sei $\alpha \in \Delta$ eine einfache Wurzel und $\mathcal{F}_{\alpha} \subset \mathcal{F}$ die Menge der Spiegelebenen, die auf α senkrecht stehen. Seien $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{\alpha}$ die Spiegelebenen, die B und $s_{\alpha} \star B$ trennen. Dabei soll für $1 \leq i < n$ stets F_i im positiven Halbraum von F_{i+1} liegen. Dann ist n gerade und es gilt

$$s_{\alpha} \star B = s_1 s_2 \cdots s_n(B),$$

wobei s_i die Spiegelung an F_i bezeichnet. Insbesondere ist also $s_{\alpha} \star B \leq B$ und $s_{\alpha} \star B \notin \bigcup_{s \in \mathcal{S}_M} s\mathcal{C}$, falls $s_{\alpha} \notin \mathcal{S}_M$.

Definieren wir den Träger in naheliegender Weise (analog zur Definition 2.5) auch auf dem nach unten vervollständigten Modul (bei Soergel heißt er $\hat{\mathcal{P}}$), gilt also für $B \in \mathcal{A}^+$ und alle $x \in W$ mit $x \notin \mathcal{S}_M$ für jeden Alkoven C:

$$C \in \mathsf{Tr} \big(\eta \circ \langle -\rho \rangle \langle x \rangle \langle \rho \rangle (\underline{P}_B) \big) \Rightarrow C \notin K_M(B),$$

da $C \leq x \star B \prec B$. Für $C \in \text{Tr}(\eta \circ \langle -\rho \rangle \langle x \rangle \langle \rho \rangle (\underline{P}_{\lambda+A}))$ erhalten wir $-\lambda + C \leq -\lambda + x \star (\lambda + A) \prec A$, wobei $-\lambda + x \star (\lambda + A) \notin \bigcup_{i=1}^{n} sC$ nach Lemma 4.3. Also ist $-\lambda + C \notin K_M(A)$.

Offensichtlich gilt aber andererseits

$$\langle -\lambda \rangle \big(\sum_{x \in \mathcal{S}_M} (-1)^{l(x)} \langle -\rho \rangle \langle x \rangle \langle \rho \rangle \underline{P}_{\lambda+A} \big) = \sum_{x \in \mathcal{S}_M} (-1)^{l(x)} \langle -\rho \rangle \langle x \rangle \langle \rho \rangle \underline{P}_A.$$

Insgesamt bekommen wir also

$$\operatorname{Tr}(\langle -\lambda \rangle \underline{M}_{\lambda+A} - \underline{M}_{A}) \cap K_{M}(A) = \emptyset.$$

Das ist aber gerade die besagte Formel.

Eine analoge Aussage kann man auch bezüglich des Dualisierens bekommen. Bis auf einen "Rest" vertauschen Verschiebung um ganze Gewichte und Dualisieren miteinander, wie das folgende Lemma besagt.

Lemma 4.6 Seien λ und A wie oben. Dann gilt folgende Formel:

$$\operatorname{Tr}(\langle -\lambda \rangle \overline{M_{\lambda+A}} - \overline{M_A}) \cap K_M(A) = \emptyset.$$

Nach Lemma 4.4 gibt es eindeutig bestimmte Polynome $p_{B,A} \in \mathcal{L}$, so daß

$$M_A = \underline{M}_A + \sum_{B \prec A} p_{B,A} \underline{M}_B$$
, und somit auch $M_{\lambda + A} = \langle \lambda \rangle \underline{M}_A + \sum_{B \prec A} p_{B,A} \langle \lambda \rangle \underline{M}_B$.

Nach dem Hilfssatz 4.5 gibt es für alle $B \prec A$ ein $R_M(B) \in \mathcal{M}$ mit $\mathsf{Tr}(\langle -\lambda \rangle R_M(B)) \cap K_M(B) = \emptyset$, so $da\beta$

$$M_{\lambda+A} = \underline{M}_{\lambda+A} - R_M(A) + \sum_{B \prec A} p_{B,A} \Big(\underline{M}_{\lambda+B} - R_M(B) \Big).$$

Insbesondere gilt für $B \leq A$ auch $\mathsf{Tr}(\langle -\lambda \rangle R_M(B)) \cap K_M(A) = \emptyset$. Also gibt es ein $R \in \mathcal{M}$ (nämlich $R = R_M(A) + \sum_{B \leq A} p_{B,A} R_M(B)$) mit $\mathsf{Tr}(\langle -\lambda \rangle R) \cap K_M(A) = \emptyset$, so

daB

$$M_{\lambda+A} = \underline{M}_{\lambda+A} + \sum_{B \prec A} p_{B,A} \underline{M}_{\lambda+B} - R.$$

Natürlich gilt auch $Tr(\langle -\lambda \rangle \overline{R}) \cap K_M(A) = \emptyset$, das heißt

$$\overline{M_{\lambda+A}} = \underline{M_{\lambda+A}} + \sum_{B \prec A} \overline{p_{B,A}} \underline{M_{\lambda+B}} - \overline{R}$$

$$= \langle \lambda \rangle \underline{M_A} + R_M(A) + \sum_{B \prec A} \overline{p_{B,A}} \Big(\langle \lambda \rangle \underline{M_B} + R_M(B) \Big) - \overline{R}$$

$$= \langle \lambda \rangle \overline{M_A} + R - \overline{R}.$$

Dies ist aber gerade die Behauptung

Eine entsprechende Aussage gilt für unsere Dualität in dem Modul \mathcal{N} .

Lemma 4.7 Sei wiederum λ und A wie in den vorhergehenden Lemmata. Dann gilt auch hier

$$\operatorname{Tr}(\langle -\lambda \rangle \overline{N}_{\lambda+A} - \overline{N}_A) \cap K_M(A) = \emptyset.$$

Beweis: Die von Soergel in [So1, Beweis zu Theorem 3.5] definierte \mathcal{L} -schieflineare Bijektion ϕ : $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ vertauscht mit der Dualität und für $x \in \mathcal{W}$ gilt $\phi(N_x) = (-1)^{l(x)} M_x$. Seien nun $d_{y,x} \in \mathcal{L}$ so gewählt, daß

$$\overline{M}_x = \sum_{y \le x} d_{y,x} M_y = \sum_{y \le x} d_{y,x} (-1)^{l(y)} \phi(N_y) = \phi(\sum_{y \le x} (-1)^{l(y)} \overline{d_{y,x}} N_y).$$

Mit $\overline{M_x} = \overline{(-1)^{l(x)}\phi(N_x)} = (-1)^{l(x)}\phi(\overline{N_x})$ erhalten wir somit $\overline{N_x} = \sum_{x \in x} (-1)^{l(y)-l(x)} \overline{d_{y,x}} N_y$, in Alko-

venschreibweise ausgedrückt

$$\overline{N_A} = \sum_{B \prec A} (-1)^{d(A,B)} \overline{d_{B,A}} N_B.$$

Nach Lemma 4.6 kann man aber auch

$$\overline{M_{\lambda+A}} = \sum_{B \prec A} d_{B,A} M_{\lambda+B} + Rest \qquad \text{mit } \mathsf{Tr}(\langle -\lambda \rangle Rest) \cap K_M(A) = \emptyset.$$

schreiben. Das impliziert aber $\overline{N_{\lambda+A}} = \sum_{B \prec A} d_{B,A} N_{\lambda+B} + Rest$. Somit ist die obige Behauptung bewiesen.

Nun können wir Satz 4.2 beweisen:

Nach Definition gilt $n_{A,A} = 1$ für alle $A \in \mathcal{A}^+$. Sei $D \in \mathcal{A}^+$ mit $D \prec \lambda + A$ und $-\lambda + D \in K_M(A)$. Für alle Alkoven $B \in \mathcal{A}^+$ mit $D \prec B \prec \lambda + A$ gelte

$$n_{B,\lambda+A} = n_{-\lambda+B,A}. (4.3)$$

Wir wollen nun zeigen, daß diese Gleichung auch für den Alkoven D erfüllt ist. Nach Definition der Kazhdan-Lusztig-Polynome gilt

$$\underline{N}_{\lambda+A} = \sum_{B \in \mathcal{A}^+} n_{B,\lambda+A} N_B = \sum_{B \succ D} \overline{n_{B,A}} \, \overline{N_B} + \sum_{B \not\succ D} \overline{n_{B,\lambda+A}} \, \overline{N_B}. \tag{4.4}$$

Für jeden Alkoven $A \in \mathcal{A}^+$ sei $\overline{N}_A = \sum_{B \leq A} d_{B,A} N_B$ die Darstellung von \overline{N}_A in der Standardbasis.

Setzt man dies in Gleichung 4.4 ein, erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von N_D gerade

$$n_{D,\lambda+A} = \overline{n_{D,\lambda+A}} + \sum_{C \succ D} (n_{C,\lambda+A} d_{D,C}).$$

Das bedeutet aber, daß die Gleichung

$$n_{D,\lambda+A} = \sum_{C \succ D} (n_{C,\lambda+A} d_{D,C})^{+}$$

richtig ist. (Hier bezeichne p^+ den Anteil des Polynomes p mit positiven Exponenten.) Völlig analog erhält man

$$n_{-\lambda+D,A} = \sum_{C \succ -\lambda+D} (n_{C,A} d_{-\lambda+D,C})^{+}.$$

Liegt nun $-\lambda + D$ im Kopf $K_M(A)$ von A, dann bedeutet das nach Lemma 4.6 gerade $d_{D,\lambda+A} = d_{-\lambda+D,A}$. Da nun aber auch jeder Alkoven, der größer als $-\lambda + D$ ist, in $K_M(A)$ enthalten ist, folgt unter der Annahme 4.3 aus den letzten beiden Formeln gerade

$$n_{D,\lambda+A} = n_{-\lambda+D,A}$$
.

Das gilt nun für alle Alkoven D mit $-\lambda + D \in K_M(A)$. Das ist aber gerade die Behauptung des Satzes. \diamondsuit

68 NOTATIONEN

Liste der Notationen

```
\mathcal{A}
                              die Menge aller Alkoven
\mathcal{A}^{++}
                              die Menge der Alkoven in der um \rho verschobenen dominanten Weylkammer
A^+
                              der fundamentale dominante Alkove
\overline{A}
                              der (topologische) Abschluß eines Alkoven
                              die alternierende Abbildung \mathcal{P}^0 \to \mathcal{P}^{sgn}
alt
Alt
                              die Antisymmetrisierung um -\rho
\alpha,\alpha^{\vee}
                              eine Wurzel und ihre duale Wurzel
                              abkürzende Schreibweise für \sum_{i=0}^{n} \langle (n-i)\lambda + i\mu \rangle B_A
B(n,A)
\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}
                              die dominante Weylkammer
                              der Abschluß der dominanten Weylkammer
C_s = \underline{H}_s
                              selbstdualer Erzeuger von \mathcal{H}
d(A,B)
                              Anzahl der Hyperebenen, die die Alkoven A und B trennen
                              die Menge der einfachen Wurzeln
                              Partitions funktion (siehe [So1])
                              die Menge der affinen Spiegelebenen
F^+, F^-
                              offener positiver bzw. negativer Halbraum zu einer Hyperebene F \in \mathcal{F} (vgl. S. 10)
                              die Hecke-Algebra
(\mathcal{H}, H_x, \underline{H}_x, h_{x,y})
                              die Hecke-Algebra mit Basis und selbstdualen Elementen (siehe Definition 1.3
                              und Satz 1.4)
K_A, B_A, S_A
                              der Kopf-, Bauch- und Schlußteil eines systematisch verhaltenden Patterns
K(M)
                              die Facette bezüglich M \subset \Delta (siehe Definition 2.4)
                              der Kopf (eines Patterns) bezüglich A
K_{M}(A)
                              der Ring der Laurentpolynome
\lambda(A)
                              untere Ecke der Box, die A enthält.
                              Bezeichnung für \sum_{\lambda_i \neq 0} \omega_i.
\overline{\lambda}
M
                              meist eine Teilmenge der einfachen Wurzeln
                              definiert im Beweis von Lemma 3.9
(\mathcal{M}, M_x, \underline{M}_x, m_{x,y}) 
 (\mathcal{N}, N_x, \underline{N}_x, n_{x,y})
                              die parabolischen Hecke-Moduln (meist in der Alkovenschreibweise M_A etc.),
                              definiert in Kapitel 1.2
                              abkürzende Schreibweise für \sum_{i=0}^{n} \underline{N}_{i\lambda+C} andere Bezeichnung für N_A (durch "Zeilen- und Spaltenangabe") im Fall B_2.
N(n,A)
N_{[x,y]}
                              Grenzangaben bei Periodizität längs \mu bzw. \lambda (Seite 12, Definition 2.4)
n_{\mu}, n_{\lambda}
(\mathcal{P}, P_x, \underline{P}_x, p_{x,y})
                              der periodische Hecke-Modul
                              die fundamentale Box
                              die Menge der Alkoven einer (nicht notwendig der fundamentalen!) Box
П
                              alle Alkoven, die man durch eine Translation der Alkoven aus \Pi um ein ganzzahliges
\Pi_{\mathbb{Z}\lambda}
                              Vielfaches von \lambda erhält
z_{<}\lambda + \Pi
                              alle Alkoven, die man durch eine Translation der Alkoven aus Π um ein positives
                              ganzzahliges Vielfaches kleiner z von \lambda erhält (siehe Seite 43)
\mathcal{P}^0
                              Untermodul von \mathcal{P} mit Dualität
N(A), \underline{N}_A
                              ein Pattern mit Bezugsalkoven A
                              Wurzelsystem
R_A^s definiert als R_A^s = \underline{N}_A C_s - \underline{N}_{As}.

R(n,C,a,b), R(n,a,b) abkürzende Schreibweisen für \sum_{i=a}^b \underline{N}_{(n-i)\lambda+i\mu+C} abkürzende Schreibweisen für \sum_{i=0}^n \underline{N}_{(n-i)\lambda+i\mu+C}
                              die Restriktionsabbildung nach \mathcal{N}
res
Res
                              die Restriktionsabbildung nach \mathcal{M} (siehe [So1])
                              die Halbsumme der positiven Wurzeln
\rho
                               (einfache) Spiegelung bezüglich \alpha
S_{\alpha}
                              die Alkoven, die im Träger von \langle (m-2)\lambda \rangle K_A C_s \rangle enthalten sind
T_{K,A,m,s}, T_K
```

NOTATIONEN 69

 $T_{B,A,m,s}, T_B$ die Alkoven, die im Träger von $\langle (m-2)\lambda \rangle B_A C_s \rangle$ enthalten sind $T_{S,A,m,s}, T_{S}$ $\sum_{B \in Tr(N)} Tr(N)$ die Alkoven, die im Träger von $\langle (m-2)\lambda \rangle S_A C_s \rangle$ enthalten sind abkürzende Summenschreibweise, auf Seite 61 definiert der Träger eines Elementes aus $\mathcal N$ $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Z}}(N)$ der ganzzahlige Träger eines Elementes aus \mathcal{N} (definiert auf Seite 18) $W = \hat{\mathcal{W}}_0$ die endliche Weylgruppe $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ eine Coxetergruppe (insbesondere die affine Weylgruppe) $(\mathcal{W}_f,\mathcal{S}_f)$ die parabolische Untergruppe von \mathcal{W} X die Menge der ganzen Gewichte X^+ die Menge der dominanten Gewichte $\begin{array}{c} X \star B \\ \tilde{X} \\ \preceq \\ \langle w \rangle \\ \langle \lambda \rangle \end{array}$ definiert im Beweis des Hilfssatzes 4.5 die Menge der fundamentalen Gewichte Ordnungsrelation auf der Menge der Alkoven, definiert auf Seite 10 Operation von $w \in \mathcal{W}$ auf \mathcal{P}^0 Verschiebung eines Patterns oder eines Elementes aus $\mathcal N$ oder $\mathcal M$ um ein

dominantes Gewicht (siehe Seite 12)

Literaturverzeichnis

- [BB] Beilinson, A., Bernstein J.N.: Localisation de g-Modules, C.R. Acad. Sci, Paris 292, 1981.
- [BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M.: Kazhdan-Lustzig conjecture and holonomic systems, Inventiones 64 (1981), 387-410.
- [Bo] BOURBAKI, N.: Groupes et algèbres de Lie, Vol. 4-6, Masson 1981.
- [BGG] Bernstein, J.N., Gelfand, I.M., Gelfand, S.I.: Structure of Representations generated by Vectors of highest Weight, Funct. Anal. App. 5 (1971), 1-8.
- [De] Deodhar, V.V.: On some geometric Aspects of Bruhat Orderings ii. the parabolic Analogue of Kazhdan-Lusztig Polynomials, Journal of Algebra 142 (1987), 483-506.
- [DGK] DEODHAR, V.V., GABBER, O., KAC, V.G.: Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie Algebras, Advanced in Math. 45 (1982) 92-116.
- [Di] DIXMIER, J.: *Enveloping Algebras*, North Holland mathematical library, Vol. 14, Amsterdam-New York-Oxford, North Holland 1977.
- [Hu1] Humphreys, J.E.: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics 9, New York-Heidelberg-Berlin, Springer 1987.
- [Hu2] Humphreys, J.E.: Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 29, Cambridge University Press, 1990.
- [Ja1] Jantzen, J.C.: Moduln mit einem höchsten Gewicht, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 750, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1979.
- [Ja2] Jantzen, J.C.: Einhüllende Algebren halbeinfacher Liealgebren, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio, Springer 1983.
- [Ka] Kashiwara, M.: Kazhdan-Lusztig conjecture for a symmetrizable Kac Moody Lie algebra, The Gothendieck Festschrift II, Birkhäuser, Progress in Mathematics 87 (1990), 407-433.
- [Kc] Kac, V.G.: Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, 1990.
- [KL] KAZHDAN D., LUSZTIG G.: Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras, Inventiones 53 (1979), 191-213.
- [Kn] Knapp, A.: Lie Groups Beyond an Introduction, Berlin, Birkhäuser 1996.
- [Lu] Lusztig G.: Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, Advances in Mathematics 37 (1980), 121-164.
- [MP] MOODY, R., PIANZOLA, A.: Lie Algebras With Triangular Decompositions, Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts, New York, 1995.

- [So1] Soergel W.: Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln, Representation Theory 1 (An electronic Journal of the AMS) (1997), 37-68.
- [So2] Soergel W.: Charakterformeln für Kipp-Modul über Kac-Moody-Algebren, Representation Theory 1 (An electronic Journal of the AMS) (1997), 115-132.
- [Ve] VERMA, D.-N.: Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 160-166.

h erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe	
nd daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch ngabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.	