

Der Kombinatorikfunktork  $\mathbb{V}$ :  
Graduierte Kategorie  $\mathcal{O}$ , Hauptserien und  
primitive Ideale

Catharina Stroppel

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES  
DER MATHEMATISCHEN FAKULTÄT DER ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT  
FREIBURG I. BR.

OKTOBER 2001

Dekan: Prof. E. Kuwert

1. Referent: Prof. W. Soergel

2. Referent: Prof. H. H. Andersen

Datum der Promotion: 29.11.2001

## Vielen Dank!

Ich danke allen voran Wolfgang Soergel für die Betreuung der Arbeit, die vielen Anregungen und Kritiken und für seine Geduld und sein Verständnis in vielerlei Hinsicht. Ich danke ihm für die vielen Türen, die er mir stets offen hielt und auch öffnete. Außerdem danke ich Henning Andersen für die wunderbare Zeit in Aarhus, die sich auf diese Arbeit entscheidend ausgewirkt hat. Einige Inspirationen seinerseits werden wohl auch meine Arbeit der nächsten Monate prägen.

Ohne die finanzielle Hilfe des TMR-Programms „Algebraic Lie Representations“ wäre dieser und einige weitere Auslandsaufenthalte nicht möglich gewesen. Ich danke ebenfalls der Studienstiftung des deutschen Volkes und dem Cusanuswerk für ihre (nicht nur finanzielle) Unterstützung.

Ich bedanke mich bei Christian Haug und Martin Härterich für das Korrekturlesen von Teilen dieser Arbeit.

Insbesondere danke ich aber auch allen meinen Freunden und Kollegen für ihre physische und psychische Unterstützung, allen voran Moritz Meyer-ter-Vehn, Peter Fiebig, Steen Ryom-Hansen und Oleksandr Khomenko. Für Aufmunterung und Ratschläge danke ich besonders Markus Stroppel und natürlich Christian Haug. Ohne sie wäre wohl die Versorgung mit lebensnotwendigen und auch sehr genußvollen Dingen nicht immer gewährleistet gewesen . . . (und hoffe gleichzeitig, daß sie mir so manchen verpaßten Mensabesuch verzeihen mögen.)



# INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>Überblick</b>	<b>4</b>
<b>1 Kategorie <math>\mathcal{O}</math>: Der Funktor <math>\mathbb{V}</math> und Anwendungen</b>	<b>6</b>
1.1 Kategorie $\mathcal{O}$ : Definition und wichtige Eigenschaften . . . . .	6
1.2 Köcher der Kategorie $\mathcal{O}$ . . . . .	9
1.3 Endomorphismenringe von unzerlegbaren Projektiven . . . . .	9
1.4 Der Sockel von Projektiven . . . . .	13
1.5 Filtrierungen von Projektiven und Injektiven . . . . .	14
<b>2 Deformation der Kategorie <math>\mathcal{O}</math> und Harish-Chandra-Bimoduln</b>	<b>18</b>
2.1 Harish-Chandra-Bimoduln . . . . .	18
2.2 Die Kategorie $\mathcal{H}^I$ . . . . .	19
2.3 Die Kategorie $\mathcal{O}_\Lambda^i$ und der „dicke“ Vermamodul . . . . .	22
2.4 Die Deformationskategorie $\mathcal{D}_\Lambda(T)$ . . . . .	24
2.5 Der Funktor $\mathbb{V}$ für die deformierte Kategorie $\mathcal{O}$ . . . . .	26
2.6 Der Funktor $\mathbb{V}$ für Harish-Chandra-Bimoduln . . . . .	27
2.6.1 Die Definition des Funktors und seine Eindeutigkeit . . . . .	28
2.6.2 Der Chevalleyantiautomorphismus . . . . .	29
2.6.3 Der Funktor $\mathbb{V}$ und Verschiebungen . . . . .	30
2.6.4 Die Volltreue des Funktors $\mathbb{V}$ auf Projektiven . . . . .	32
<b>3 Hauptserien, Vervollständigung und Dualität</b>	<b>38</b>
3.1 Hauptserien und Josephs Vervollständigungsfunktoren . . . . .	38
3.2 Hauptserien und ihre dualen Hauptserien . . . . .	39
3.3 Endomorphismenringe und Selbsterweiterungen der Hauptserien . . . . .	42
3.4 Getwistete Kippmoduln . . . . .	47

<b>4</b>	<b>Kategorie <math>\mathcal{O}</math> und Graduierungen</b>	<b>51</b>
4.1	Die Grothendieckgruppe, Verschiebungsfunktoren und der Funktor $\mathbb{V}$ . . . . .	52
4.2	Allgemeines über Graduierungen . . . . .	53
4.2.1	Graduierte Moduln . . . . .	53
4.2.2	Graduierte Kategorien . . . . .	54
4.3	Graduierbarkeit von Moduln und Funktoren . . . . .	55
4.3.1	Kategorie $\mathcal{O}$ als Modulkategorie über einem graduierbaren Ring . . . . .	56
4.3.2	Projektive und Einfache als graduierbare Objekte . . . . .	57
4.4	Verschiebungsfunktoren und Graduierung . . . . .	59
4.4.1	Vermamoduln als graduierbare Objekte . . . . .	60
4.4.2	Duale Vermamoduln und Injektive als graduierbare Objekte . . . . .	62
4.4.3	Nichtgraduierbare Objekte . . . . .	62
4.4.4	Verschiebungen „nach oben“ und „nach unten“: Einige kurze exakte Sequenzen . . . . .	64
4.5	Graduierung und Dualität . . . . .	66
4.5.1	Eigenschaften der „graduerten Dualität“ . . . . .	67
4.5.2	Existenz einer „graduerten Dualität“ . . . . .	67
4.6	Graduierung, Kombinatorik und Heckealgebra . . . . .	68
4.7	Verschiebungen „auf die Wand und aus der Wand“ . . . . .	72
4.8	Harish-Chandra-Bimoduln und Graduierung . . . . .	77
4.8.1	Verschiebungen von „rechts“ . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Hauptserien und ihre Graduierung</b>	<b>82</b>
5.1	Hauptserien und ihre Graduierung . . . . .	82
5.1.1	Hauptserien als graduierbare Objekte . . . . .	82
5.1.2	Kombinatorik der Hauptserien . . . . .	84
5.2	Köcherdarstellungen der Hauptserien . . . . .	86
5.2.1	Das prinzipielle Verfahren zur Bestimmung der Köcherdarstellungen . . . . .	87
5.2.2	Explizite Köcherdarstellungen . . . . .	88
5.3	Sockel-, Radikal- und Gradfiltrierung der Hauptserien . . . . .	91
5.4	Hauptserien als Koszulmoduln? . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Eine graduierte Form der Jantzen-Summenformel für Hauptserien</b>	<b>94</b>
<b>7</b>	<b>Primitive Quotienten und ihre Kompositionsfaktoren</b>	<b>98</b>
7.1	Zu einer Vermutung von Joseph: Eine obere Schranke für Kompositionsfaktoren primitiver Quotienten . . . . .	98
7.2	Wurzelsysteme vom Rang 2: Einfache Multiplizitäten . . . . .	100
7.2.1	Das Beispiel: $A_2$ . . . . .	100
7.2.2	Die Beispiele $B_2$ und $G_2$ . . . . .	100
7.3	Wurzelsysteme vom Rang 3 und höhere Multiplizitäten . . . . .	100
7.3.1	Das Beispiel: $A_3$ . . . . .	100
7.3.2	Das Beispiel: $B_3$ . . . . .	102
7.4	Die graduierte Vierersequenz und eine untere Schranke . . . . .	105
	<b>Notationsindex und Literaturverzeichnis</b>	<b>108</b>

# Einleitung

---

Die vorliegende Arbeit wurde motiviert durch das Problem der Bestimmung der Kompositionsfaktoren primitiver Quotienten. Dabei bezeichnet „primitiver Quotient“ den Quotienten der universell Einhüllenden Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  einer halbeinfachen komplexen Liealgebra  $\mathfrak{g}$  nach dem Annihilator eines einfachen  $\mathfrak{g}$ -Moduls.

Dies ist zuerst einmal ein  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -Bimodul mit echtem zentralem Charakter, aber vermöge einer Äquivalenz von Kategorien ([BG]) durch ein Objekt in der Kategorie  $\mathcal{O}$  beschreibbar. Insbesondere hat dieses endliche Länge, und es macht Sinn, nach Kompositionsfaktoren zu fragen. Die möglichen Subquotienten einer Jordan-Hölderreihe werden durch ein dominantes Gewicht mit den Elementen einer entsprechenden Teilmenge der Weylgruppe parametrisiert; im regulären Fall ist das gerade die gesamte Weylgruppe.

Im Extremfall, wenn der einfache Modul gerade ein Vermamodul ist, wird sein Annihilator durch einen Satz von Duflo ([Di, 8.4.3]) bestimmt und hängt nur vom zentralen Charakter ab. Die Kompositionsfaktoren des zugehörigen Quotienten sind genau die des entsprechenden Vermamoduls und sind somit mit Hilfe des Kazhdan-Lusztig-Algorithmus bestimmbar.

In den schwierigeren Fällen ([Ja2, 7.2]) entspricht die Beschreibung der Annihilatoren einfacher Moduln dem Auffinden gewisser Untermoduln in den Vermamoduln zu dominanten Gewichten. Andererseits wird ein primitiver Quotient auch durch ein homomorphes Bild eines solchen Vermamoduls beschrieben. Insbesondere reicht es aus, die Bilder von Homomorphismen zwischen Hauptserien zu beschreiben.

Der Begriff „Hauptserie“ stammt dabei aus der Darstellungstheorie reeller Liegruppen und bezeichnet eine induzierte eindimensionale Darstellung einer minimalen parabolischen Untergruppe (siehe [Va], [Di]). Durch geeignete Komplexifizierung liefert das die Hauptserien in unserem Sinne. Eine solche Hauptserie (in [AL] „getwisteter Vermamodul“) ist in diesem Fall ein Objekt in  $\mathcal{O}$ , das dieselben Kompositionsfaktoren wie der entsprechende Vermamodul besitzt, welche aber anders angeordnet sein können. Als Spezialfälle der Hauptserien treten insbesondere die Vermamoduln selbst, aber auch ihre dualen Moduln auf. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Menge der Hauptserien unter der Dualität auf  $\mathcal{O}$  invariant ist.

Beide Herangehensweisen zur Beschreibung der primitiven Quotienten, sowohl die mit Hilfe von Untermoduln als auch durch Quotienten von Vermamoduln, waren Ausgangspunkt unserer Untersuchungen.

Entscheidende Grundlage und „Werkzeug“ der vorliegenden Arbeit bietet der von W. Soergel ([So2]) definierte Kombinatorikfunktorkomplex  $\mathbb{V}$  eines regulären Blocks von  $\mathcal{O}$  in die endlichdimensionalen Moduln über dem Kohomologiering der zu  $\mathfrak{g}$  gehörenden Fahnenmannigfaltigkeit. Dabei wird dieser Ring als Koinvarianten  $S(\mathfrak{h})/(S(\mathfrak{h})_+^W)$  der symmetrischen Algebra über der fest gewählten Cartanschen Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  von  $\mathfrak{g}$  beschrieben. Für nichtreguläre Blöcke liefert der Funktor Moduln über Invarianten der Koinvarianten (Soergels Endomorphismensatz). Aufgrund der von W. Soergel bewiesenen Volltreue des Funktors auf Projektiven, beschreibt  $\mathbb{V}$  den gesamten Block.

Mit Hilfe des Kombinatorikfunktors konnten wir für Wurzelsysteme vom Rang 2 und für Typ  $A_3$  die primitiven Quotienten mit den sie charakterisierenden Untermoduln bzw. Quotienten des entsprechenden projektiven Vermamoduls bestimmen. Obwohl diese Ergebnisse bereits bekannt sind, bietet unser Ansatz jedoch eine rein kombinatorische Zugangsweise. Um allgemeinere, auch für andere Wurzelsysteme gültige, Ergebnisse zu erlangen, haben wir die Hauptserien als solche untersucht. Im folgenden zeigen wir, daß die Hauptserien unzerlegbar und ihre Endomorphismenringe eindimensional sind, sie aber keine Selbsterweiterungen besitzen. Neben Endomorphismen und Selbsterweiterungen werden auch Homomorphismen und Erweiterungen zwischen „benachbarten“ Hauptserien bestimmt. Diese Ergebnisse sind völlig analog zum Extremfall der Vermamoduln, was sicherlich den zweiten Teil des Namens „getwistete VERMAMODULN“ rechtfertigt. Andererseits sind die Morphismenräume (bzw. Erweiterungen) zwischen einer Hauptserie und ihrer dualen im allgemeinen nicht eindimensional (bzw. trivial), was mit dem ersten Teil der Bezeichnung „GETWISTETE Vermamoduln“ verdeutlicht wird.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse leiten wir auch die Existenz und Charakterformeln verallgemeinerter Kippmoduln her, die Fahnen mit getwisteten Vermamoduln als Subquotienten besitzen.

Der oben beschriebene Funktor  $\mathbb{V}$  liefert uns aber zusätzlich eine Art Graduierung auf  $\mathcal{O}$ . Die Koinvarianten tragen auf natürlicher Weise eine Graduierung, wodurch wir eine gewisse Unterkategorie von  $\mathcal{O}$  als Modulkategorie über einem graduierbaren Ring auffassen können. Wir stellten uns die Frage, welche der Moduln einen graduierten Lift besitzen. Durch die Einführung einer graduierten Version von „Verschiebung durch die Wand“ erhalten wir die Graduierbarkeit aller Projektiven, Einfachen und aller Standardobjekte. Durch geeignete Konventionen und Wahl sind wir in der Lage zu zeigen, daß die Grothendieckgruppe der graduierbaren Objekte als graduierte Gruppe dann isomorph zur Heckealgebra ist. Das ermöglicht eine kombinatorische Beschreibung der graduierten Versionen der Verschiebungsfunktoren. Mit den Ergebnissen der Kazhdan-Lusztig-Theorie können wir die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome als graduierte Multiplizitäten deuten. Dies entspricht den Ergebnissen in [BGS], unterscheidet sich jedoch in der Zugangsweise.

Die graduierte Version der Verschiebungsfunktoren liefert auch Lifts für die Hauptserien. Das ermöglicht uns die Beschreibung primitiver Quotienten durch ein homomorphes Bild einer *homogenen* Abbildung zwischen einem Lift des entsprechenden projektiven Vermamoduls und

einem Lift der zugehörigen Hauptserie. Dadurch erhält man eine „obere Schranke“ für die möglichen Kompositionsfaktoren. Im Fall von einfachen Multiplizitäten ist das eine wirklich scharfe Schranke und löst unser Problem. Durch die Kombinatorik der Heckealgebra ist es auch für höhere Multiplizitäten möglich, diese obere Abschätzung explizit anzugeben. Mit einer Identifizierung der einfachen Kompositionsfaktoren im entsprechenden projektiven Vermamodul und der Hauptserie konnten wir im wesentlichen eine Vermutung von A. Joseph zeigen, die besagt, daß die Einfachen, welche in beiden Moduln im gleichen Grad auftreten (sogar mit Multiplizitäten), genau die einfachen Kompositionsfaktoren des zu untersuchenden primitiven Quotienten sind. Diese Identifizierung ist jedoch sehr unbefriedigend und für konkrete Berechnungen wenig hilfreich.

Die von A. Joseph geäußerte Vermutung wurde ursprünglich im Blick auf eine Jantzenfiltrierung für Hauptserien aufgestellt. Eine solche Verallgemeinerung der Jantzenfiltrierung auf Hauptserien wurde von H.H. Andersen und N. Lauritzen ([AL]) definiert. Es ist bekannt (siehe [BB2], [BGS]), daß diese Filtrierung auf den Vermamoduln mit der assoziierten Filtrierung der in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Graduierung übereinstimmt. Es besteht natürlich die Vermutung, daß dies auch für die übrigen Hauptserien der Fall ist. Eine erste Annäherung konnten wir durch eine graduierte Form der von H. Andersen und N. Lauritzen bewiesenen Summenformel für getwistete Vermamoduln zeigen. Für die mit einer einfachen Spiegelung getwisteten Vermamoduln oder ihren dualen ist es (durch Zurückführung auf den bereits bekannten Fall) ebenfalls richtig. Die Behandlung des allgemeinen Falls bleibt jedoch einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Wir möchten, um Mißverständnisse zu vermeiden, noch darauf hinweisen, daß der in dieser Arbeit verwendete Begriff „Block“ einer abelschen Kategorie einfach einen direkten Summanden bezeichnet. Insbesondere muß ein Block nicht notwendigerweise unzerlegbar sein. Außerdem schreiben wir für ein Objekt  $M$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  stets  $M \in \mathcal{C}$  anstatt  $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

## Überblick

Das erste Kapitel behandelt insbesondere die Morphismenräume zwischen Projektiven der Kategorie  $\mathcal{O}$ . Zentrales Hilfsmittel dazu ist der von W. Soergel [So2] definierte Kombinatorikfunktorkomplex  $\mathbb{V}$ . Damit wird es auch möglich,  $\mathcal{O}$  explizit als Darstellungskategorie von endlichen Köchern zu beschreiben.

Das Hauptresultat des Kapitels besteht in einer notwendigen und hinreichenden Bedingung, wann ein unzerlegbares projektives Objekt in  $\mathcal{O}$  einen kommutativen Endomorphismenring besitzt (Hauptsatz 1.3.1). Mit Deformationsargumenten (siehe [Jau]) kann gezeigt werden, daß der Endomorphismenring eines unzerlegbaren Projektiven  $P(x \cdot \lambda)$  kommutativ ist, falls der entsprechende projektive Vermamodul mit einfacher Multiplizität auftritt, das heißt, falls  $(P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)) = 1$  gilt für dominantes Gewicht  $\lambda$ . Wir geben hierfür einen alternativen Beweis an und zeigen auch die Umkehrung.

Als weitere Anwendung des Kombinatorikfunktors (Satz 1.4.1) bestimmen wir die Sockel der projektiven Objekte. Für diese möglicherweise bereits bekannte Tatsache konnte kein Beweis in der Literatur gefunden werden.

Ein Satz von E. Backelin in [Bc], der die Untermoduln von Projektiven beschreibt, welche von einer Potenz des zentralen Charakters annihiliert werden, wird auf injektive Objekte verallgemeinert. Genauer gilt (Satz 1.5.4) für dominantes Gewicht  $\lambda$  und zentralen Charakter  $\chi_\lambda$ :

$$I(x \cdot \lambda) / (\ker \chi_\lambda) I(x \cdot \lambda) \cong \bigoplus_{(I: \nabla(\lambda))} \nabla(\lambda).$$

In einem Artikel von W. Soergel ([So3]) wird eine Erweiterung des Kombinatorikfunktors von  $\mathcal{O}$  auf den Block der Harish-Chandra-Bimoduln mit trivialem verallgemeinertem zentralen Charakter definiert. Der dort bewiesene Struktursatz besagt, daß dieser Funktor - als Funktor in die Bimoduln über dem Zentrum der universell Einhüllenden Algebra - volltreu ist. Wir definieren diesen Funktor für beliebige „ganze“ Blöcke und beweisen einen verallgemeinerten Struktursatz in Kapitel 2. Die Verträglichkeit des Funktors mit Tensorprodukten (siehe [So3] für den trivialen Block) wird ebenfalls gezeigt.

Das dritte Kapitel ist den Hauptserien gewidmet. Die Resultate sind nur für reguläre ganze Gewichte formuliert, lassen sich jedoch ohne Schwierigkeiten auch auf beliebige ganze Gewichte übertragen. Das erste Hauptresultat, beschreibt das Duale einer Hauptserie. Genauer ist für ein ganzes Gewicht  $\lambda$  die Hauptserie aus  $\mathcal{O}_\lambda$  mit den Parametern  $x$  und  $y \in W$  dual zur Hauptserie mit den Parametern  $w_0x$  und  $w_0y$ . Das zentrale Argument des Beweises ist die Existenz einer die Hauptserien charakterisierende kurzen exakten Sequenz. Dies ermöglicht die Beschreibung der Hauptserien als geometrische Objekte oder auch als semiinfinite induzierte Moduln (siehe [AL]). Ein zentrales Resultat der vorliegenden Arbeit besteht aus dem Homomorphismensatz (Hauptsatz 3.3.3), der die Homomorphismenräume gewisser Hauptserien bestimmt. Insbesondere impliziert das die Unzerlegbarkeit der Hauptserien (vgl. Lemma 3.3.1). Durch den damit zu gewinnenden Satz 3.3.4 über einfache Erweiterungen von Hauptserien sind wir in der Lage „getwistete“ Kippmoduln (Satz 3.4.2) zu definieren und ihre Charaktere anzugeben. Die besagten Moduln sind unzerlegbar und haben eine Fahne, deren Subquotienten isomorph zu gewissen getwisteten Vermamoduln sind und zusätzlich die einfachen Erweiterungen mit ihnen trivial sind. Insbesondere liefert das eine Fülle von Filtrierungen auf dem antidominanten Projektiven.

In Kapitel 4 beschreiben wir, wie man eine gewisse Unterkategorie von  $\mathcal{O}$  als graduierte Modulkategorie auffassen kann. Wir nennen Objekte aus dieser Unterkategorie „graduierbar“. Insbesondere sind alle Projektiven und Standardobjekte graduierbar. Wir fassen dazu einen „ganzen“ Block in  $\mathcal{O}$  als Modul über dem Endomorphismenring eines projektiven Erzeugers auf. Mit Hilfe des von W. Soergel definierten Kombinatorikfunktors  $\mathbb{V}$  wird dieser Endomorphismenring zu einem  $\mathbb{Z}$ -graduierten Ring. Wir definieren dann Lifts von projektiven und einfachen Moduln. Eine graduierte Version der Verschiebungsfunktoren liefert Lifts der Vermamoduln und ihrer dualen. Diese Graduierung ist genau die in [BGS] beschriebene. Der Zugang ist jedoch anders gewählt. Es wird gezeigt, daß es eine graduierte Version der Dualität gibt. Mit Hilfe der Kazhdan-Lusztig-Theorie erhalten wir eine Interpretation der Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome durch graduierte Multiplizitäten.

Die oben beschriebene Graduierung, ermöglicht es, in Kapitel 5 die Hauptserien zu graduieren. Die Motivation dafür entstammt einer Arbeit von A. Joseph [Jo6], in der beschrieben wird, inwiefern eine solche Graduierung Information über Kompositionsfaktoren primitiver Ideale liefern kann. Dieser Frage wird in Kapitel 7 nachgegangen. Wir beschreiben als Verallgemeinerung des Kazhdan-Lusztig-Algorithmus ein Verfahren zur Bestimmung der Graduierung der Hauptserien mit Hilfe der Heckealgebra. Explizite Berechnungen von Köcherdarstellungen zu Hauptserien für Wurzelsysteme vom Rang 2 zeigen, daß die Hauptserien im allgemeinen weder rigid noch Koszul sind.

H. Andersen und N. Lauritzen definieren in [AL] eine Jantzenfiltrierung auf den Hauptserien und beweisen dafür eine Summenformel. Wir beweisen in Kapitel 6 eine entsprechende Summenformel für die in Kapitel 5 eingeführte Graduierung auf den Hauptserien.

Das letzte Kapitel der Arbeit untersucht die von A. Joseph in [Jo6] implizit geäußerten Vermutungen. Sie werden in unseren Kontext übertragen und umformuliert. Für Kompositionsfaktoren, die in dem dominanten Vermamodul  $M(0)$  mit einfacher Multiplizität vorkommen, kann kombinatorisch bestimmt werden, welche davon auch in einem primitiven Quotienten  $\mathcal{U}/\text{Ann}_{\mathcal{U}} L(x \cdot 0)$  vorkommen. Für höhere Multiplizitäten liefert unser Verfahren zumindest eine obere Schranke, die unter einer etwas künstlichen Identifikation der einfachen Kompositionsfaktoren in  $M(0)$  mit den entsprechenden Hauptserien (siehe Hauptsatz 7.4.2) präzisiert werden kann. Wir hoffen, daß die recht umfangreichen Berechnungen dennoch geeignet sind, die grundsätzlichen Schwierigkeiten der Thematik aufzuzeigen.

## KAPITEL

---

# 1

---

## Kategorie $\mathcal{O}$ : Der Funktor $\mathbb{V}$ und Anwendungen

---

---

*In diesem Kapitel werden wir projektive Objekte der Kategorie  $\mathcal{O}$ , genauer von ganzen Blöcken, näher beschreiben.*

*Das zentrale Hilfsmittel dazu ist der von Soergel ([So2]) eingeführte Funktor  $\mathbb{V}$ . Es wird kurz beschrieben, wie wir die Kategorie  $\mathcal{O}$  als Darstellungskategorie eines endlichen Köchers betrachten können und inwiefern dieser Funktor explizite Berechnungen ermöglicht.*

*Das Hauptergebnis dieses Kapitels wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür sein, wann ein unzerlegbares projektives Objekt mit ganzem Charakter in  $\mathcal{O}$  einen kommutativen Endomorphismenring besitzt. Daß diese Bedingung hinreichend ist, kann auch (siehe [Jau]) mit Deformationsargumenten gezeigt werden. Wir geben dafür einen alternativen Beweis an und zeigen, daß diese Voraussetzung auch notwendig ist.*

*Wir sind in der Lage, jeweils ein Beispiel für den Fall der Kommutativität beziehungsweise Nichtkommutativität anzugeben.*

*Als weitere Anwendung des von Soergel bereitgestellten Funktors können wir recht leicht (siehe Satz 1.4.1) die Sockel der Projektiven in  $\mathcal{O}$  bestimmen.*

*Im letzten Abschnitt des Kapitels beschreiben wir noch kurz die Operation des Zentrums auf Projektiven und Injektiven (Satz 1.5.4). Der Ausgangspunkt dazu ist eine Beschreibung ([Bc]) der Untermoduln eines projektiven unzerlegbaren Objektes in einem regulären Block, die von einer festen Potenz des entsprechenden maximalen Ideals des Zentrums annihiliert werden.*

### 1.1 Kategorie $\mathcal{O}$ : Definition und wichtige Eigenschaften

Sei  $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{h}$  eine halbeinfache komplexe Liealgebra mit einer fest gewählten Borel- und Cartanunteralgebra. Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$  die zugehörige Cartan-Zerlegung. Die zugehörigen universell Einhüllenden Algebren bezeichnen wir mit  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ,  $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$  usw. Seien  $\pi \subset$

$R^+ \subset R$  die zugehörigen Mengen der einfachen, positiven bzw. aller Wurzeln. Mit  $P(R)$  bezeichnen wir das Gitter der ganzen Gewichte. Wir betrachten die Kategorie  $\mathcal{O}$ , definiert als volle Unterkategorie der Kategorie aller  $\mathfrak{g}$ -Moduln, definiert durch

$$\text{Ob}(\mathcal{O}) = \left\{ M \in \mathfrak{g}\text{-mod} \left| \begin{array}{l} M \text{ ist endlich erzeugt als } \mathcal{U}(\mathfrak{g})\text{-Modul} \\ M \text{ ist lokal endlich für } \mathfrak{n} \\ \mathfrak{h} \text{ operiert diagonal auf } M \end{array} \right. \right\}$$

wobei die zweite Bedingung bedeutet, daß  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{n}) \cdot m < \infty$  für alle  $m \in M$ , und die letzte besagt, daß  $M = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M_{\mu}$ , wobei  $M_{\mu} = \{m \in M \mid h \cdot m = \mu(h)m \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}$  den  $\mu$ -Gewichtsraum von  $M$  bezeichnet.

Im folgenden werden wir (ohne Beweise) einige Eigenschaften dieser Kategorie angeben. Beweise und Details kann man zum Beispiel in [BGG, Ja1, Ja2] finden.

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{Z}$  das Zentrum der universell Einhüllenden  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Die Kategorie  $\mathcal{O}$  zerfällt in eine direkte Summe voller Unterkategorien  $\mathcal{O}_{\chi}$ , indiziert durch zentrale Charaktere  $\chi$  von  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Sei  $S = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{U}(\mathfrak{h})$  die symmetrische Algebra über  $\mathfrak{h}$ , betrachtet als reguläre Funktionen auf  $\mathfrak{h}^*$  mit der „dot-Operation“ der Weylgruppe  $W$ , definiert durch  $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ , wobei  $\rho$  die Halbsumme der positiven Wurzeln ist. Verwendet man den Harish-Chandra-Isomorphismus (siehe z.B. [Ja1, Satz 1.5], [Di, Theorem 7.4.5])  $\xi : \mathcal{Z} \xrightarrow{\sim} S^{W \cdot}$  und die Tatsache, daß  $S$  ganz über  $S^{W \cdot}$  ([Di, Theorem 7.4.8]) ist, bekommt man einen Isomorphismus  $\xi : \mathfrak{h}^*/(W \cdot) \xrightarrow{\sim} \text{Max } \mathcal{Z}$ . Das liefert die folgende Blockzerlegung

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\chi \in \text{Max } \mathcal{Z}} \mathcal{O}_{\chi} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*/(W \cdot)} \mathcal{O}_{\lambda},$$

wobei  $\mathcal{O}_{\chi}$  die Unterkategorie von  $\mathcal{O}$  bezeichnet, deren Objekte Moduln sind, die von einer Potenz von  $\chi$  annihiliert werden. Es beschreibt denselben Block wie  $\mathcal{O}_{\lambda}$ , falls  $\xi(\lambda) = \chi$ . Der Block  $\mathcal{O}_{\lambda}$  heißt regulär, falls  $\lambda$  regulär ist, d.h., falls  $\lambda + \rho$  auf keiner Kowurzel  $\check{\alpha}$  (bezüglich  $\mathfrak{h}$ ) verschwindet.

Zu  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  gibt es einen Standardmodul, den Verma-Modul  $M(\lambda) = \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda}$ , wobei  $\mathbb{C}_{\lambda}$  den irreduziblen  $\mathfrak{h}$ -Modul mit Gewicht  $\lambda$ , trivial zu einem  $\mathfrak{b}$ -Modul erweitert, bezeichnet. Das ist ein Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$  und hat zentralen Charakter  $\xi(\lambda)$ . Wir bezeichnen mit  $L(\lambda)$  den eindeutig bestimmten irreduziblen Quotienten von  $M(\lambda)$ .

**Satz 1.1.1.**

1. Jedes Objekt in  $\mathcal{O}$  hat endliche Länge.
2.  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) < \infty$  für alle  $M, N \in \mathcal{O}$ .
3. Es gibt nur endlich viele einfache Objekte in jedem Block  $\mathcal{O}_{\lambda}$ , parametrisiert durch  $W/W_{\lambda}$ , wobei  $W_{\lambda} = \{w \in W \mid w \cdot \lambda = \lambda\}$  den Stabilisator von  $\lambda$  unter der dot-Operation von  $W$  bezeichnet.
4. Zu  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen unzerlegbaren projektiven Modul  $P(\lambda) \in \mathcal{O}_{\lambda}$ , die projektive Decke von  $L(\lambda)$ . Somit hat  $\mathcal{O}$  genügend Projektive. Die unzerlegbaren Projektiven sind durch  $W/W_{\lambda}$  parametrisiert.

5.  $P(\lambda)$  hat für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  eine Vermafabne, d.h. eine Filtrierung, deren Subquotienten isomorph zu Verma moduln sind. Die Multiplizitäten  $(P(\lambda) : M(\mu))$  genügen der Reziprozitätsformel  $(P(\lambda) : M(\mu)) = [M(\mu) : L(\lambda)]$ .
6. Der Verma modul  $M(\lambda)$  ist projektiv genau dann, wenn  $\lambda$  dominant ist, d.h.  $\langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle \notin \{-1, -2, \dots\}$  für alle positiven Kowurzeln  $\check{\alpha}$ .
7. Der Verma modul  $M(\lambda)$  ist einfach genau dann, wenn  $\lambda$  antidominant ist, d.h. falls  $\langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle \notin \{1, 2, \dots\}$  für alle positiven Kowurzeln  $\check{\alpha}$ .

*Beweis:* [Ja1, Kapitel 1], [Ja2, Kapitel 4]. ◇

Für festes  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  werden wir nun die Kategorie  $\mathcal{O}_\lambda$  als eine gewisse Kategorie endlichdimensionaler Moduln über einer endlichdimensionalen Algebra betrachten:

Wir bezeichnen mit  $\text{mof} - R$  die Kategorie der endlichdimensionalen  $R$ -Rechtsmoduln. Wir bezeichnen mit

$$P_\lambda = \bigoplus_{x \in W/W_\lambda} P(x \cdot \lambda)$$

die direkte Summe aller unzerlegbaren Projektiven in diesem Block. Das ist ein (minimaler) projektiver Erzeuger und wir erhalten (siehe [Ba, Theorem 1.3]) eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\lambda &\longrightarrow \text{mof} - \text{End}_{\mathfrak{g}}(P_\lambda) \\ M &\longmapsto \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, M). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Auf diese Weise wird jeder Block zu einer quasierblichen („quasi-hereditary“) oder Höchstgewichtskategorie ([CPS]). Einen entscheidenden Schritt in der Beschreibung eines Blockes  $\mathcal{O}_\lambda$  liefert der folgende

**Satz 1.1.2.** ([So2, Endomorphismensatz], für einen schönen Beweis für reguläres  $\lambda$  siehe [Be])  
*Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $w_o$  das längste Element der Weylgruppe, dann induziert die Multiplikation des Zentrums einen Isomorphismus der folgenden Algebren:*

$$\text{End}(P(w_o \cdot \lambda)) \cong (S/(S_+^W))^{W_\lambda}.$$

### Bemerkung und Bezeichnung

Die sogenannte Koinvariantenalgebra  $(S/(S_+^W))$  hat gerade die Ordnung der Weylgruppe als Dimension (siehe [Bo3]). Im folgenden bezeichnen wir sie mit  $C$  und ihre Invarianten  $C^{W_\lambda}$  mit  $C^\lambda$ .

Die gesamte Information über einen Block kann damit auch durch einen „einfacheren“ Funktor beschrieben werden, mit Hilfe des folgenden Satzes:

**Satz 1.1.3.** ([So2, Struktursatz])

*Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Der exakte Funktor*

$$\begin{aligned} \mathbb{V} : \mathcal{O}_\lambda &\rightarrow C^\lambda - \text{mof} \\ M &\mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot \lambda), M) \end{aligned}$$

ist volltreu auf Projektiven. Er induziert sogar einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, Q) \cong \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P, \mathbb{V}Q),$$

falls nur  $Q$  projektiv ist.

**Bemerkung 1.1.4.** ([So2]) Es bezeichne  $\theta_s$  für eine einfache Spiegelung  $s$  die Verschiebung durch die  $s$ -Wand. Dann gibt es eine natürliche Äquivalenz von Funktoren

$$\theta_s \mathbb{V} \cong C \otimes_{C^s} \mathbb{V}.$$

Im folgenden werden wir einige Anwendungen des Funktors  $\mathbb{V}$  angeben.

## 1.2 Köcher der Kategorie $\mathcal{O}$

Mit Hilfe des Endomorphismensatzes [So2], des Struktursatzes und der Verschiebungsfunktoren kann man explizit Köcher der Kategorie  $\mathcal{O}$  ausrechnen. Für Blöcke zu ganzen Gewichten für Wurzelsysteme vom Rang 2 werden diese in [St] angegeben. Man findet dort auch den Köcher zum trivialen Block vom Typ  $A_3$ . Mit Hilfe dieser Ergebnisse konnten dann auch die Kompositionsfaktoren von primitiven Quotienten der universell Einhüllenden Algebra bestimmt werden.

## 1.3 Endomorphismenringe von unzerlegbaren Projektiven

Mit Hilfe des Funktors  $\mathbb{V}$  werden wir nun ein Kriterium für die Kommutativität von Endomorphismenringen unzerlegbarer projektiver Moduln angeben.

**Hauptsatz 1.3.1 (Kommutativität des Endomorphismenrings).**

Sei  $P = P(x \cdot \lambda)$  ein projektiver unzerlegbarer Modul in  $\mathcal{O}_\lambda$  und  $\lambda$  ein dominantes ganzes Gewicht. Dann sind äquivalent:

1.  $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(P)$  ist kommutativ.
2.  $(P : M(\lambda)) = 1$ .
3. Es existiert eine Surjektion  $\mathcal{Z} \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(P)$ .

Zuerst werden wir diesen Satz mit einigen Beispielen illustrieren. Für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$  sind die beiden Endomorphismenringe isomorph zu  $\mathbb{C}$  oder  $C \cong \mathbb{C}[X]/(X^2)$  und natürlich kommutativ. Betrachten wir nun den regulären ganzen Fall zum Wurzelsystem  $A_2$ :

**Beispiel 1.3.2.** Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$ .

Es gilt  $C \cong \mathbb{C}[X, Y]/\langle X^2 + XY + Y^2, 2XY^2 + Y^3, Y^4 \rangle$  und die Bilder von  $1, X, Y, X^2, Y^2, X^3$  unter der kanonischen Projektion bilden eine Basis. Man erhält als Endomorphismenringe (wobei wir die Elemente in  $\mathbb{C}[X, Y]$  und deren Bilder in  $C$  in der Schreibweise nicht unterscheiden)

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(P(0)) &\cong C/\langle X, Y \rangle, \\ \mathrm{End}(P(s_\alpha \cdot 0)) &\cong \mathrm{End}(P(s_\beta \cdot 0)) \cong C/\langle Y, X^2 \rangle, \\ \mathrm{End}(P(s_\beta s_\alpha \cdot 0)) &\cong \mathrm{End}(P(s_\alpha s_\beta \cdot 0)) \cong C/\langle Y^2, X^3 \rangle. \end{aligned}$$

Daß die Endomorphismenringe hier stets Quotienten der Koinvariantenalgebra sind, kommt nicht von ungefähr, denn es gilt das folgende

**Lemma 1.3.3.** *Sei  $\lambda$  ein dominantes ganzes Gewicht. Dann ist die minimale Anzahl  $\min$  der Erzeuger von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  gerade  $(P(x \cdot \lambda) : M(\lambda))$ .*

*Beweis:* Für einen Modul  $M$  über der Koinvariantenalgebra  $C$  haben wir die folgenden  $C$ -Morphismen:

$$M \cong C \otimes_C M \xrightarrow{pr \otimes id} C/C^+ \otimes_C M \cong M/C^+M.$$

Da diese Abbildung surjektiv ist und  $C/C^+ \cong \mathbb{C}$  gilt, liefert eine Wahl von Urbildern einer Basis von  $M/C^+M$  ein minimales Erzeugendensystem von  $M$  als  $C$ -Modul. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \min &= \dim \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)/C^+ \mathbb{V}P(x \cdot \lambda) = \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)/C^+ \mathbb{V}P(x \cdot \lambda), \mathbb{C}) \\ &= \dim \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)/C^+ \mathbb{V}P(x \cdot \lambda), C/C^+) \\ &= \dim \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(x \cdot \lambda), C/C^+) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot \lambda), M(\lambda)) = [M(\lambda) : L(x \cdot \lambda)] = (P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)). \end{aligned}$$

Für nichtreguläres  $\lambda$  läuft das Argument völlig analog mit  $C^\lambda$  statt  $C$ .  $\diamond$

**Konvention 1.3.4.** *Betrachten wir  $S = S(\mathfrak{h})$  als gerade graduierte Algebra, so daß  $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S^{2i}$  mit  $S^2 = \mathfrak{h}$  gilt, so erbt die Koinvariantenalgebra  $C$  eine Graduierung, da die Operation der Weylgruppe graderhaltend ist. Man kann dann für  $x \in W$  und  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  den Modul  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  als graduierten  $C$ -Modul auffassen. Wir betrachten im folgenden den Modul  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  als graduierten Modul, wobei sein höchster auftretende Grad  $l(x)$  sein soll. Näheres dazu findet man in [So6] oder auch in Kapitel 4.*

Vor dem Beweis des Satzes verdeutlichen wir die Aussage noch an einem weiteren Beispiel.

**Beispiel 1.3.5.** Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4)$ .

Dann ist die Weylgruppe  $W \cong S_4 \cong \langle s_1 := (1, 2), s_2 := (2, 3), s_3 := (3, 4) \rangle$ .

Sei  $x = s_2 s_3 s_1 s_2$ . Mit Hilfe der Kazhdan-Lusztig-Polynome ergibt sich die minimale Anzahl von Erzeugern des Moduls  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$ , in diesem Fall 2. Wir können  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  als direkten Summanden von  $C \otimes_{C^{s_2}} C \otimes_{C^{s_3}} C \otimes_{C^{s_1}} C \otimes_{C^{s_2}} C$  realisieren. Durch etwas aufwendigere Rechnungen ergeben sich, wobei  $X$  der Kowurzel der einfachen Spiegelung  $s_1$  entspricht, explizit als Erzeuger

$$e_1 := 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1,$$

$$e_2 := 1 \otimes 1 \otimes X \otimes 1 \otimes 1$$

und eine Basis des Sockels von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  der Form

$$\{X \otimes Y \otimes X \otimes X \otimes 1, X \otimes 1 \otimes X \otimes X \otimes 1 + X \otimes Y \otimes 1 \otimes X \otimes 1 + X \otimes Y \otimes X \otimes 1 \otimes 1\}.$$

Betrachtet man  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  als  $\mathbb{Z}$ -graduierten-Modul, dann ist  $e_1$  homogen vom Grad  $-4$ ,  $e_2$  vom Grad  $-2$  und die beiden Sockelelemente vom Grad 4 bzw 2.

Man kann in diesem Beispiel durch explizites Nachrechnen erkennen, daß

$$\begin{aligned} \tau : e_1 &\mapsto e_2, & e_2 &\mapsto 0 \\ f : e_1 &\mapsto X \otimes Y \otimes 1 \otimes X \otimes 1 - X \otimes 1 \otimes X \otimes X \otimes 1 & e_2 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

zwei  $C$ -Morphismen definieren, die nicht kommutieren.

**Definition 1.3.6.** Für einen Modul  $M$  mit Filtrierung  $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_r \supset \{0\}$  und einen Untermodul  $N$  erhalten wir durch  $N_i := M_i \cap N$  eine Filtrierung auf  $N$ . Wir bezeichnen sie als *auf  $N$  induzierte Filtrierung*.

### Der Beweis des Hauptsatzes

Wir führen den Beweis nur für reguläres  $\lambda$ . Es werden jedoch nur Argumente benutzt, die auch für singuläre Gewichte gelten.

- 3)  $\Rightarrow$  1): klar.
- 2)  $\Rightarrow$  3):  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  und damit  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot \lambda))$  ist ein Quotient von  $C$ , also auch von  $\mathcal{Z}$ .
- 1)  $\Rightarrow$  2): Wir zeigen, daß der Endomorphismenring bei höheren Multiplizitäten nicht kommutativ ist, indem wir zwei Morphismen  $\tau$  und  $f$  konstruieren, die nicht miteinander kommutieren.

#### Konstruktion von $\tau$ bis auf ein Vielfaches $d$ der Identität

Sei  $P = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_r \supset \{0\}$  eine Vermafiltrierung mit den Subquotienten  $N_i/N_{i+1} \cong M(\lambda_i)$  mit  $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ . Diese Filtrierung induziert eine Quasivermafahne auf  $\ker \chi_\lambda P$ , das heißt eine Filtrierung, deren Subquotienten isomorph zu Untermoduln von Vermamoduln sind. Wir bezeichnen mit  $\widetilde{M}(\lambda_i) \subseteq M(\lambda_i)$  den entsprechenden Subquotienten und setzen  $J := \{i \mid \widetilde{M}(\lambda_i) \neq 0\} \subset \{0, 1, \dots, r\}$ . Damit gilt in der Grothendieckgruppe die Gleichheit

$$[P] = \sum_{i=0}^r [M(\lambda_i)] \quad \text{und} \quad [\ker \chi_\lambda P] = \sum_{i \in J} [\widetilde{M}(\lambda_i)]. \quad (1.2)$$

Mit den Dimensionsargumenten zu Lemma 1.3.3 erhalten wir, daß die Kodimension von  $\mathbb{V}\ker P$  in  $\mathbb{V}P$  gerade die Multiplizität des dominanten Vermamoduls ist, also  $|J| = r - (P : M(\lambda))$ .

Sei nun  $s \in \{0, 1, \dots, r\}$  mit  $s \notin J$ . Es gibt (siehe [Di]) eine Inklusion  $M(x \cdot \lambda) \hookrightarrow M(\lambda_s)$ . Wegen der Projektivität von  $P$  liefert das einen nichttrivialen Morphismus  $\phi_s : P \rightarrow N_s$ , also einen Endomorphismus von  $P$ . Nach Konstruktion gilt im  $\mathbb{V}\phi_s \not\subseteq \mathbb{V}\ker \chi_\lambda P$  und  $\phi_s \notin \mathbb{C}\text{id}$ , da  $\lambda_s \neq x \cdot \lambda$ . Diese Morphismen  $\mathbb{V}\phi_s$  haben alle die Eigenschaft, daß  $\mathbb{V}\phi_s(e_1) \notin \mathbb{V}\ker \chi_\lambda P$ , wobei  $e_1 \in \mathbb{V}P$  von minimalem Grad  $-m = -l(x)$  sei.

Sei nun  $\psi \notin \mathbb{C}\text{id}$  homogen von minimalem Grad, so daß  $\psi(e_1) \notin \mathbb{V}\ker \chi_\lambda P$  und sei  $\tilde{e}_2 := \psi(e_1)$  vom Grad  $-n$ .

Dieses  $\psi$  ist bis auf ein Vielfaches der Identität bereits eines der beiden gesuchten nicht kommutierenden Abbildungen.

#### Das Argument

Sei nun  $h \in \mathbb{V}P$  von maximalem Grad  $m = l(x)$ .

Wir behaupten, daß es homogene Elemente  $a \in C$  vom Grad  $m + n$  und  $d \in C$  vom Grad  $m - n$  oder  $d = 0$  gibt, so daß durch

$$\begin{aligned} f : e_1 &\mapsto ae_1 \\ e_i &\mapsto 0, \text{ falls } i \in \{2, \dots, k\} \end{aligned}$$

eine  $C$ -lineare Abbildung auf  $\mathbb{V}P$  definiert wird, die nicht mit  $\psi + d \cdot \text{id}$  kommutiert. Dabei wählen wir geeignete Erzeuger  $\{e_i\}$  von  $\mathbb{V}P$  abhängig von  $d$ .

#### Konstruktion von $f$ und die Bestimmung von $d$

Wir definieren nun solche Elemente  $a, d \in C$ . Dafür beginnen wir mit dem einfachen Fall

- I) Angenommen, es existiert ein (oBdA homogenes)  $c \in C^+$ , so daß  $c\tilde{e}_2 = h$ . Dann sei  $a := c$  und  $d := 0$ .
- II) Angenommen, es existiert kein  $c \in C^+$ , so daß  $c\tilde{e}_2 = h$ . Nach [So6, Prop. 2.9.1] existiert ein (oBdA homogenes)  $g \in C^+$ , so daß  $ge_1 = h$ . Dann existiert aber auch ein (homogenes)  $d \in C^+$  mit  $\deg d = m - n$ ,  $de_1 \neq 0$  und  $da = g$  für passendes  $a \in C$  homogen. Das so definierte  $a$  ist ebenfalls vom Grad  $m + n$ .

Wir setzen  $e_2 := \tilde{e}_2 + de_1$  und ergänzen  $\{e_1, e_2\}$  zu einem minimalen Erzeugendensystem  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  von  $\mathbb{V}P$ . Wir können dies sogar so wählen, daß die Elemente mit aufsteigender Indizierung im Grad monoton wachsen.

Wir überprüfen die Wohldefiniertheit von  $f$ :

Sei dazu  $ce_1 = 0$  für ein  $c \in C$ . Dann ist  $f(ce_1) = cae_1 = ace_1 = 0$ . Sei  $c \in C$  homogen und  $ce_1 = \sum_{i=2}^k \alpha_i e_i$  mit  $\alpha_i \in C$ . Dann gilt  $\deg(c) > m - n$  wegen unserer Annahme an den Grad der Erzeuger. Dann ist aber  $\deg(f(ce_1)) = \deg(cae_1) > (m - n) + (m + n) - m = m$  und wegen der Struktur von  $\mathbb{V}P$  also Null. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß die beiden angegebenen Morphismen nicht kommutieren.

#### Der Nachweis der Nichtkommutativität

Für den ersten Fall erhalten wir

$$f \circ \tau(e_1) = f \circ \psi(e_1) = f(e_2) = 0.$$

Andererseits aber

$$\tau \circ f(e_1) = \psi \circ f(e_1) = \psi(ae_1) = ae_2 \neq 0.$$

Für den zweiten Fall gilt mit  $\tau := \psi + d \cdot \text{id}$

$$f \circ \tau(e_1) = f(\tilde{e}_2 + de_1) = f(e_2) = 0.$$

andererseits aber

$$\tau \circ f(e_1) = \tau(ae_1) = a\psi(e_1) + ade_1 = ade_1 \neq 0.$$

Somit haben wir also zwei Endomorphismen gefunden, die nicht kommutieren.

◇

**Bemerkung 1.3.7.** • Der zentrale Schritt im Beweis des Hauptsatzes besteht aus der Sicherstellung eines Endomorphismus von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$ , der linear unabhängig zur Identität ist und dessen Bild nicht in  $\ker \chi_\lambda \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  enthalten ist. In der Tat können wir

eine Abschätzung für die Dimension des Homomorphismenraumes von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  nach  $\ker \chi_\lambda \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  angeben.

Sei dazu  $\lambda$  ein dominantes ganzes Gewicht und bezeichnen wir mit  $\kappa$  das Ideal  $(\ker \chi_\lambda)$  des Zentrums. Die Einschränkung des Isomorphismus  $\text{End}(P(x \cdot \lambda)) \cong \text{End}(\mathbb{V}P(x \cdot \lambda))$  definiert, da  $\mathbb{V}$  ein Homologiefunktor ist und mit der Operation von  $\mathcal{Z}$  vertauscht, eine Inklusion

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot \lambda), \kappa P(x \cdot \lambda)) \hookrightarrow \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(x \cdot \lambda), \kappa \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) =: B.$$

Das induziert eine Surjektion

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot \lambda), P(x \cdot \lambda)/\kappa P(x \cdot \lambda)) \twoheadrightarrow \text{coker}(B \hookrightarrow \text{End}_C(\mathbb{V}P(x \cdot \lambda))) =: A.$$

Da nun aber (wie aus dem vorherigen Beweis ersichtlich)  $\dim A \geq [P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)]$ , gilt

$$\dim \text{End}_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot \lambda)/\kappa P(x \cdot \lambda)) \geq [P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)].$$

- Man kann leicht eine Vektorraumbasis von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  wie folgt angeben:  
Sei dazu  $P(x \cdot \lambda) = M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r \supset \{0\}$  eine Vermafahne mit  $M_i/M_{i+1} \cong M(\lambda_i)$ . Sei  $0 \neq f_{\lambda_i} \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot \lambda), M(\lambda_i))$  (eindeutig bis auf einen Skalar). Die kanonische Abbildung von  $M_i$  nach  $M(\lambda_i)$  liftet über  $f_{\lambda_i}$  zu einer Abbildung  $h_i$ . Dann ist  $\{h_i\}_{1 \leq i \leq r}$  eine Basis von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$ .  
Dazu nehmen wir  $\sum_{i=1}^r c_i h_i = 0$  an. Sei  $x \in P(w_o \cdot \lambda)$  mit  $h_1(x) \in M_1 \setminus M_2$ . Durch Einsetzen in obige Gleichung erhält man dann  $c_1 = 0$ , da die Bilder aller anderen  $h_i$  in  $M_2$  enthalten sind. Analog erhält man  $c_i = 0$  für alle  $i$ . Mit Dimensionsvergleich folgt dann die Behauptung.
- Eine Basis des Sockels wird beschrieben durch die Abbildungen

$$s_i : P(w_o \cdot \lambda) \twoheadrightarrow L(w_o \cdot \lambda) \hookrightarrow M(\lambda) \xrightarrow{\text{incl}_i} \bigoplus_{[P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)]} M(\lambda) \hookrightarrow P(x \cdot \lambda),$$

wobei  $\text{incl}_i$  die Inklusion in den  $i$ -ten Summanden bedeutet.

- Sind alle Multiplizitäten einfach, so erzeugt  $h_1$  den Modul  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  über den Koinvarianten.

## 1.4 Der Sockel von Projektiven

Wir bestimmen nun die Gestalt des Sockels eines unzerlegbaren Projektiven.

**Satz 1.4.1.** *Für ein dominantes ganzes Gewicht  $\lambda$  gilt*

$$\text{soc } P(x \cdot \lambda) = \bigoplus_{i=1}^{[P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)]} L(w_o \cdot \lambda)$$

*Beweis:* Der Sockel enthält nur einfache Vermamoduln, denn sonst wäre

$$0 \neq \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(L(y \cdot \lambda), P(x \cdot \lambda)) \cong \text{Hom}_C(\mathbb{V}L(y \cdot \lambda), \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) \cong \text{Hom}_C(0, \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)),$$

da  $\mathbb{V}$  alle Einfachen ohne maximale Gelfand-Kirillov-Dimension annihiliert. Man erkennt, daß nur einfache Vermamoduln im Sockel auftreten auch daran, daß  $P(x \cdot \lambda)$  eine Vermafahne hat, d.h.  $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha$  operiert injektiv auf  $P(x \cdot \lambda)$ , also auch auf dem Sockel und somit besteht dieser aus Vermamoduln.

Für  $L := L(w_o \cdot \lambda) \subseteq \text{soc } P(x \cdot \lambda)$  betrachten wir die exakte Sequenz  $L \hookrightarrow M(\lambda) \twoheadrightarrow M(\lambda)/L$ . Das liefert eine exakte Sequenz

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda)/L, P(x \cdot \lambda)) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), P(x \cdot \lambda)) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(L, P(x \cdot \lambda)).$$

Da  $P(x \cdot \lambda)$  projektiv ist und  $[M(\lambda) : L] = 1$ , gilt (unter der Verwendung von Satz 1.1.3):

$$0 = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}(M(\lambda)/L), \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda)/L, P(x \cdot \lambda)).$$

Also ist  $f$  eine Injektion. Mit

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), P(x \cdot \lambda)) &= \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}L, \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(L, P(x \cdot \lambda)) \end{aligned}$$

folgt  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(L, P(x \cdot \lambda)) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), P(x \cdot \lambda))$ . Das ergibt die Behauptung.  $\diamond$

## 1.5 Filtrierungen von Projektiven und Injektiven

Sei  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  dominant und ganz. Sei  $P = P(x \cdot \lambda) \in \mathcal{O}_\lambda$  ein unzerlegbarer projektiver Modul. Dann kann man seine Vermafahne zu einer Filtrierung

$$P = M_r \supseteq M_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq M_0 \supseteq \{0\} \quad (1.3)$$

vergrößern mit  $M_i/M_{i-1} \cong \bigoplus_{y \in W^\lambda, l(y)=i} M(y \cdot \lambda)^{m_{y,x}}$ , wobei  $m_{y,x} \in \mathbb{N}$  und  $r = l(x)$ .

Wir bezeichnen für einen Modul  $M$  über einem Ring  $R$  mit Ideal  $I$  die Invarianten unter der Operation von  $I$  mit  $M^I$ . Die obige Filtrierung kann man auch mit Hilfe von  $\ker \chi_\lambda$ -Invarianten beschreiben:

**Satz 1.5.1.** ([Bc]) *Die Filtrierung*

$$P = N_r \supseteq N_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq N_0 \supseteq \{0\}$$

mit  $N_i := P^{\ker \chi_\lambda^{i+1}}$  ist gerade die vergrößerte Vermafahne (1.3).

Wir werden nun diese Aussage dualisieren. Dazu verwenden wir folgende Standardaussage

**Lemma 1.5.2.** *Seien  $M, N \in \mathcal{O}$ . Sei  $J \triangleleft \mathcal{Z}$  ein Ideal, dann erhalten wir einen Isomorphismus*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M/JM, N) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N^J).$$

Es bezeichne  $\star$  die Dualität auf  $\mathcal{O}$ . Das bedeutet,  $M^\star$  ist gerade der maximale  $\mathfrak{h}$ -halbeinfache Untermodul der kontragredienten Darstellung von  $M$ . Sei  $\mathbb{V}(\lambda)$  der dualisierte Vermamodul  $M(\lambda)$ . Dann gilt folgende Aussage:

**Lemma 1.5.3.** *Ein Modul  $M$  hat eine Vermafhane  $\iff M^*$  hat eine  $\nabla$ -Fahne, d.h. eine Filtrierung mit Subquotienten, die isomorph zu dualen Vermamoduln sind.*

*Beweis:* Für einen Vermamodul ist die Aussage klar. Für einen beliebigen Modul läuft das Argument mit Induktion über die Länge der Vermafhane.  $\diamond$

Damit erhalten wir folgenden

**Satz 1.5.4.** *Sei  $\lambda$  ein dominantes ganzes Gewicht und  $I = I(x \cdot \lambda)$  die injektive Hülle von  $L(x \cdot 0)$  in  $\mathcal{O}$ . Dann hat  $I/(\ker \chi_\lambda)^i I$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine  $\nabla$ -Fahne. Insbesondere gilt*

$$I/(\ker \chi_\lambda)I \cong \bigoplus_{[I:\nabla(\lambda)]} \nabla(\lambda).$$

*Beweis:* Für  $P := P(x \cdot \lambda)$ ,  $\kappa := \ker \chi_\lambda$  und  $r := l(x) + 1$  betrachten wir die beiden Sequenzen

$$\begin{aligned} I = I/\kappa^r I &\twoheadrightarrow I/\kappa^{r-1} I \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow I/\kappa I \\ P^* = (P^{\kappa^r})^* &\twoheadrightarrow (P^{\kappa^{r-1}})^* \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow (P^\kappa)^*. \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß  $I/\kappa^i I \cong (P^{\kappa^i})^*$  gilt.

Wir haben  $(I/\kappa^i)^* \hookrightarrow I^* \cong P$ , genauer sogar (vgl. Lemma 1.5.2)  $(I/\kappa^i)^* \hookrightarrow P^{\kappa^i}$ . Durch Dualisieren erhalten wir also  $h : (P^{\kappa^i})^* \twoheadrightarrow I/\kappa^i I$ . Es bleibt also noch die Injektivität dieser Abbildung zu zeigen. Sei  $f \in (P^{\kappa^i})^*$  mit  $h(f) = 0$ . Wir wählen eine Fortsetzung  $\tilde{f}$  von  $f$  auf  $P$ , das heißt ein Urbild unter der kanonischen Abbildung  $P^* \twoheadrightarrow (P^{\kappa^i})^*$ . Damit gilt also

$$\tilde{f} = \sum_{s=1}^n z_s g_s$$

für passende Elemente  $z_s \in \kappa^i$ ,  $g_s \in P^*$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

Für  $p \in P^{\kappa^i}$  gilt dann aber

$$\tilde{f}(p) = \sum_{s=1}^n (z_s g_s)(p) = \sum_{s=1}^n g_s(z_s p) = 0, \quad (1.4)$$

wobei wir benutzt haben, daß die Elemente des Zentrums unter dem Chevalleyautomorphismus fix bleiben (siehe [Ja2, (3.5)] oder Lemma 2.6.3). Damit haben wir aber gezeigt, daß die Abbildung  $h$  injektiv ist.

Mit dem vorangehenden Satz und Lemma 1.5.3 folgen dann alle Behauptungen.  $\diamond$

**Bemerkung 1.5.5.** Wir betrachten nun mit den Bezeichnungen des vorangehenden Satzes  $P$  bzw.  $I$  mit einer Vermafhane, bzw. einer Fahne, deren Subquotienten isomorph zu dualen Vermamoduln sind. Diese induzieren auf  $P^{\kappa^i}$  bzw.  $(I/\kappa^i)$  eine Fahne, deren Subquotienten isomorph zu Untermoduln von Vermamoduln bzw. Quotienten von dualen Vermamoduln sind. Auch wenn man das Ergebnis des vorhergehenden Satzes nicht benutzt, kann man rein kombinatorisch die Länge solcher Quasivermafahnen bzw. „Quasi-dualen-Vermafahnen“ wie folgt bestimmen.

Bezeichnen wir mit  $P_{w_o} \cong I_{w_o}$  den injektiv-projektiven unzerlegbaren Modul in  $\mathcal{O}_\lambda$  mit einfachem Kopf  $L$ , dann wird die Länge der entsprechenden Fahnen gegeben durch

$$\begin{aligned}
[I/\kappa^i I : L] &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(I/\kappa^i I, I_{w_o}) \\
&\stackrel{(\text{Lemma 1.5.2})}{=} \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(I, I_{w_o}^{\kappa^i}) \\
&= \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(I, I_{w_o})^{\kappa^i} \\
&= \dim(\mathbb{V}I)^{\kappa^i} \\
&= \dim(\mathbb{V}P)^{\kappa^i} \\
&= [P^{\kappa^i} : L] \\
&\stackrel{(\text{Satz 1.5.1})}{=} |\{x \in W \mid l(x) < i\}| =: m_i. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Insbesondere haben also die auf  $P^{\kappa^i}$  bzw.  $(I/\kappa^i)$  induzierten Fahnen dieselbe Länge.

Für die „einfachen“ Fälle, in denen alle Multiplizitäten einfach sind, können wir die auf den Modul  $(\ker \chi_\lambda)^i P(w_o \cdot \lambda)$  induzierte Quasivermafahne auch wie im folgenden Korollar und der anschließenden Bemerkung angegeben beschreiben. Im allgemeinen ist dies aber wohl eine tiefgehende Angelegenheit.

**Korollar 1.5.6.** *Sei  $\lambda$  ein dominantes ganzes Gewicht. Für alle  $x \in W$  gelte*

$$(P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)) \leq 1.$$

*Dann induziert eine Vermafahne von  $P(w_o \cdot \lambda)$  eine Quasivermafahne auf  $\ker \chi_\lambda P(w_o \cdot \lambda)$  mit Subquotienten isomorph zu  $\operatorname{rad} M(\lambda_i)$  für passende  $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ .*

*Beweis:* Wir schreiben zur Abkürzung  $\kappa := \ker \chi_\lambda$ . Sei  $P(w_o \cdot \lambda) = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_r = M(\lambda) \supset \{0\}$  eine Vermafahne. Weil der Annihilator eines Vermamoduls  $M(x \cdot \lambda)$  gerade  $\mathcal{U}\kappa$  ist, gilt  $\kappa P(w_o \cdot \lambda) \subseteq N_1$ , also  $\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap P(w_o \cdot \lambda) / (\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap N_1) = \{0\} \cong \operatorname{rad} M(w_o \cdot \lambda)$ . Dieses Prinzip wenden wir jetzt auch auf den Rest der Vermafahne an.

Dazu betrachten wir die Köcherdarstellung  $V$ , die  $P(w_o \cdot \lambda)$  entspricht. Die Punkte des Köchers stehen nach Satz 1.1.1 in Bijektion zu den Elementen in  $W^\lambda$ . Sei  $V_x$  der Vektorraum, der in  $V$  dem Weylgruppenelement  $x$  entspricht. Es gilt

$$V_x \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot \lambda), P(w_o \cdot \lambda)) \cong \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$$

als Vektorraum. Das Ideal  $\kappa$  operiert auf  $V$ , indem es auf jedem  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  durch das maximale Ideal  $C_+^\lambda$  von  $C^\lambda$  operiert.

Nun ist  $M(\lambda)$  gerade  $P(w_o \cdot \lambda)^\kappa$ , also entspricht der Untermodul  $\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap M(\lambda)$  von  $P(w_o \cdot \lambda)$  gerade der Unterdarstellung  $\{\tilde{V}_x\}_{x \in W^\lambda}$  mit  $\tilde{V}_x = (\kappa \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) \cap \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)^\kappa$ . Aus Gradgründen erhalten wir  $\tilde{V}_e = \kappa \mathbb{V}M(\lambda) \cap \mathbb{V}M(\lambda)^\kappa = \{0\}$ , also  $\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap M(\lambda) \subseteq \operatorname{rad} M(\lambda)$ . (Man sieht an dieser Beschreibung, daß sogar Gleichheit gilt.)

Betrachten wir die vergrößerte Vermafahne (1.3), dann entspricht dem Modul  $\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap M_i$  gerade die Unterdarstellung  $\{\tilde{V}_x^i\}_{x \in W^\lambda}$  mit  $\tilde{V}_x^i = (\kappa \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) \cap \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)^{\kappa^i}$ . Dann ist aber  $(\tilde{V}_x^i)/(\tilde{V}_x^{i-1}) = \{0\}$ , falls  $l(x) \leq i$ . Somit erhalten wir für alle  $i$  die Aussage

$$(\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap M_i) / (\kappa P(w_o \cdot \lambda) \cap M_{i-1}) \subseteq \bigoplus_{y \in W^\lambda, l(y)=i} \operatorname{rad} M(y \cdot \lambda)^{m_{y,x}}.$$

Andererseits kennen wir die Multiplizitäten:

$$\begin{aligned}
[\kappa P(w_o \cdot \lambda) : L(x \cdot \lambda)] &= [P(w_o \cdot \lambda) : L(x \cdot \lambda)] - [I(w_o \cdot \lambda)/\kappa I(w_o \cdot \lambda) : L(x \cdot \lambda)] \\
&\stackrel{(\text{Satz } 1.5.4)}{=} [P(w_o \cdot \lambda) : L(x \cdot \lambda)] - [\nabla(\lambda) : L(x \cdot \lambda)] \\
&= [P(w_o \cdot \lambda) : L(x \cdot \lambda)] - [P(x \cdot \lambda) : M(\lambda)] \\
&\geq [P(w_o \cdot \lambda) : L(x \cdot \lambda)] - 1.
\end{aligned}$$

Das liefert nun insgesamt die Behauptung.  $\diamond$

**Bemerkung 1.5.7.** Für Wurzelsysteme vom Rang 2 kann man explizit nachrechnen, daß die Subquotienten der auf  $\kappa^i P(w_o \cdot \lambda)$  induzierten Quasivermafhane isomorph zu gewissen  $\text{rad}^i M(\lambda_j)$  sind.

---

## Deformation der Kategorie $\mathcal{O}$ und Harish-Chandra-Bimoduln

---

*Im folgenden Kapitel werden wir zuerst projektive Objekte in der Kategorie der Harish-Chandra-Bimoduln mit festem verallgemeinertem zentralen Charakter von rechts beschreiben. Anschließend werden wir die für unsere Überlegungen maßgeblichen Ergebnisse aus [So3] zusammenfassen. Dort wird ein Kombinatorikfunktorkonzept auf einer deformierten Kategorie  $\mathcal{O}$  eingeführt. Dieser ermöglicht es, die Volltreue eines entsprechenden Funktors für Harish-Chandra-Bimoduln mit trivialem verallgemeinertem zentralen Charakter von beiden Seiten zu zeigen (siehe [So3]). Wir werden zuerst die einzelnen Varianten des Kombinatorikfunktors erläutern, um den bereits bekannten Rahmen abzustecken. Als Referenz dazu diene insbesondere [So2] und [So3].*

*Schließlich werden wir in Abschnitt 2.6 den von Soergel definierten Kombinatorikfunktorkonzept  $\mathbb{V}$  für Harish-Chandra-Bimoduln mit trivialem verallgemeinertem zentralen Charakter auf beliebigen verallgemeinerten ganzen zentralen Charakter ausdehnen. Wir erhalten dadurch zu jeweils beliebigem verallgemeinertem zentralen Charakter von links und rechts einen Funktor von dem zugehörigen Block in die Kategorie der Bimoduln über dem Zentrum der universell Einhüllenden Algebra.*

*Das zentrale Resultat des Kapitels besagt, daß diese Funktoren auch für singuläre ganze Blöcke treu auf Projektiven bleiben. Der Vollständigkeit halber geben wir auch noch einige Eigenschaften an, die sich auf den singulären Fall übertragen lassen. Zu nennen wäre hierzu die Verträglichkeit mit Tensorprodukten.*

### 2.1 Harish-Chandra-Bimoduln

Sei (immer noch)  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Liealgebra über  $\mathbb{C}$  und  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  ihre universell Einhüllende Algebra mit Zentrum  $\mathcal{Z}$ . Für einen  $\mathcal{U}$ -Bimodul  $M$  definieren wir die adjungierte Operation von  $\mathfrak{g}$  auf  $M$  durch  $x \cdot m := xm - mx$  für  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $m \in M$ . Der Bimodul  $M$  heißt *lokal- $\mathfrak{g}$ -endlich*, falls jedes  $m \in M$  in einem endlichdimensionalen Teilraum liegt, der

invariant unter der adjungierten Operation von  $\mathfrak{g}$  ist. Wir definieren die Kategorie  $\mathcal{H}$  der *Harish-Chandra-Bimoduln* als die volle Unterkategorie aller  $\mathcal{U}$ -Bimoduln, die

1. endlich erzeugt und
2. lokal- $\mathfrak{g}$ -endlich sind.

Wir wählen ein Chevalleysystem  $\{x_\alpha, h_\alpha\}_{\alpha \in R}$  für  $\mathfrak{g}$ , also  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$  mit  $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$  und  $\alpha(h_\alpha) = 2$ . Dann definiert  $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  durch  $x_\alpha \mapsto x_{-\alpha}$  und  $h_\alpha \mapsto h_\alpha$  einen Antiautomorphismus von  $\mathfrak{g}$ , der sich zu einem Isomorphismus  $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}^{opp}$  fortsetzt. Wir wählen als Isomorphismus  $\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$  die Fortsetzung der Abbildung  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ , definiert durch  $(x, y) \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes y$ .

Somit erhalten wir (abhängig von der Wahl dieser Isomorphismen) eine Kette von Äquivalenzen von Kategorien

$$\mathcal{U} - mod - \mathcal{U} \cong \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}^{opp} - mod \cong \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} - mod \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) - mod \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - mod.$$

Die adjungierte Operation von  $\mathfrak{g}$  entspricht unter der gesamten Äquivalenz der Operation von  $\mathfrak{k} := \{(x, -\tau(x))\}$ . Da  $\mathfrak{g}$  halbeinfach ist, ist es auch  $\mathfrak{k}$ . Damit ist *lokal- $\mathfrak{g}$ -endlich* äquivalent zu *lokal- $\mathfrak{k}$ -endlich* und damit zu *halbeinfach unter  $\mathfrak{k}$* .

Die universell Einhüllende  $\mathcal{U}$  ist natürlich ein Bimodul über sich selbst und lokal- $\mathfrak{g}$ -endlich, da die kanonische Filtrierung invariant unter der adjungierten Operation ist. Für ein Ideal  $I \triangleleft \mathcal{U}$  mit endlicher  $\mathcal{Z}$ -Kodimension, d.h.  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}/\mathcal{Z} \cap I < \infty$ , ist  $\mathcal{U}/I$  ein Harish-Chandra-Modul, der von rechts von  $I$  annulliert wird. Wir werden zuerst die Unterkategorie solcher Moduln untersuchen.

## 2.2 Die Kategorie $\mathcal{H}^I$

Sei  $I \triangleleft \mathcal{U}$  ein Ideal mit endlicher  $\mathcal{Z}$ -Kodimension. Wir betrachten die Unterkategorie

$$\mathcal{H}^I = \{M \in \mathcal{H} \mid MI = 0\}$$

aller Harish-Chandra-Moduln, welche von rechts von  $I$  annulliert werden. Ist insbesondere  $I = \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^n$  (mit  $n \in \mathbb{N}^+$ ) für einen zentralen Charakter  $\chi_\lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , so sind die Objekte in  $\mathcal{H}^I$  Bimoduln mit verallgemeinertem zentralen Charakter von rechts.

Jeder  $\mathfrak{g}$ -Modul  $E$  kann als  $\mathcal{U}$ -Bimodul aufgefaßt werden, indem man ihn mit der trivialen Rechtsstruktur versieht. Wir bezeichnen ihn dann mit  $E^l$ .

Für jeden endlich erzeugten  $\mathcal{U}$ -Bimodul  $X$  ist die Menge der ad- $\mathfrak{g}$ -endlichen Vektoren sogar ein Untermodul ([Di, 1.7.9]). Wir bezeichnen ihn mit  $X^{adf}$ . Die Moduln der Form  $E^l \otimes \mathcal{U}/I$  für endlichdimensionales  $E$  sind alle in  $\mathcal{H}^I$ , denn sie sind offensichtlich endlich erzeugt und es gilt  $(E^l \otimes X)^{adf} = E^l \otimes X^{adf} = E^l \otimes X$  für jeden Harish-Chandra-Bimodul  $X$ . Denn offensichtlich ist  $E^l \otimes X^{adf} \subseteq (E^l \otimes X)^{adf}$ . Andererseits sind aber die isotypischen Komponenten als  $\mathfrak{k}$ -Modul dieselben.

Wir geben nun zuerst eine Beschreibung der Projektiven in  $\mathcal{H}^I$  an.

### Satz 2.2.1 (Projektive in $\mathcal{H}^I$ ).

*Die projektiven Objekte in  $\mathcal{H}^I$  sind gerade die direkten Summanden von Moduln der Form  $E^l \otimes \mathcal{U}/I$ , wobei  $E$  die endlichdimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Moduln durchläuft.  $\mathcal{H}^I$  hat genügend Projektive.*

*Beweis:* 1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}(E^l \otimes \mathcal{U}/I, X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(E^l, X) \\ \phi &\mapsto \tilde{\phi} \end{aligned}$$

mit  $\tilde{\phi}(e) := \phi(e \otimes 1)$  ist eine Injektion.

Denn sei  $\mathbb{C}_1 = \langle 1 + I \rangle_{\mathbb{C}}$  der eindimensionale triviale  $\mathfrak{k}$ -Untermodul von  $\mathcal{U}/I$ . Der kanonische Isomorphismus von Vektorräumen  $E^l \otimes \mathbb{C}_1 \cong E^l$  ist auch ein  $\mathfrak{k}$ -Isomorphismus. Somit ist  $\tilde{\phi}$  ein  $\mathfrak{k}$ -Modulhomomorphismus. Da  $\phi(e \otimes (u + I)) = \phi(e \otimes (1 + I)u) = \phi(e \otimes (1 + I))u = \tilde{\phi}(e)u$ , ist  $\Phi$  injektiv.

2.  $\Phi$  ist Isomorphismus, falls  $X \in \mathcal{H}^I$  (oder allgemeiner  $\text{RAnn } X \supset I$ ). Sei  $\psi : E^l \rightarrow X$   $\mathfrak{k}$ -linear. Betrachte die komplex-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \check{\psi} : E^l \otimes \mathcal{U}/I &\rightarrow X \\ e \otimes u &\mapsto \psi(e)u. \end{aligned}$$

Aufgrund unserer Voraussetzung ist die Abbildung wohldefiniert, und man kann direkt nachrechnen, daß sie auch ein Bimodulhomomorphismus ist. Somit haben wir ein Urbild für  $\psi$  gefunden.

3.  $E^l \otimes \mathcal{U}/I$  ist projektiv.

Der Funktor  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(E^l, X)$  ist exakt, da alle Harish-Chandra-Moduln halbeinfach über  $\mathfrak{k}$  sind. Mit Hilfe des funktoriellen Isomorphismus  $\Phi$  erhalten wir, daß auch  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}(E^l \otimes \mathcal{U}/I, X)$  exakt ist.

4. Jedes Objekt in  $\mathcal{H}^I$  ist projektiv präsentierbar.

Insbesondere gibt es genügend Projektive.

Sei  $X \in \mathcal{H}^I$ . Nun existiert ein endlichdimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul  $E$ , mit einer Surjektion  $E^l \otimes \mathcal{U}/I \twoheadrightarrow X$ . (Dazu wählen wir endlich viele Erzeuger  $\{x_1, \dots, x_r\}$  von  $X$ . Weil  $X$  ein Harish-Chandra-Bimodul ist, gibt es einen endlichdimensionalen  $\mathfrak{k}$ -stabilen Teilraum  $E$  von  $X$ , der alle diese Erzeuger enthält. Man rechnet leicht nach, daß  $E\mathcal{U} = \mathcal{U}E \cong E^l \otimes \mathcal{U}$  ist. Deswegen induziert die Inklusion von  $E$  in  $X$  einen Bimodulmorphismus  $E^l \otimes \mathcal{U} \rightarrow X$ , der surjektiv ist, weil das Bild alle Erzeuger enthält. Diese Abbildung faktorisiert über  $I$ .) Der Kern dieser Surjektion erfüllt wiederum obige Voraussetzungen und somit ist  $X$  projektiv präsentierbar.

5. Alle Projektiven sind von der angegebenen Form.

Sei  $P$  ein projektives Objekt in  $\mathcal{H}^I$ . Dann existiert eine Surjektion (in  $\mathcal{H}^I$ ) wie oben, die aber spaltet, da  $P$  projektiv ist.

◇

Zuletzt wollen wir noch die einfachen Objekte in  $\mathcal{H}^I$  mit  $I = \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^i$  beschreiben. Für  $\lambda, \mu$  dominante ganze Gewichte sei

$$W_{(\lambda, \mu)} := \left\{ w \in W \quad \left| \quad \begin{array}{l} w(\alpha) < 0, \forall \alpha \in \pi_\mu \\ w^{-1}(\beta) < 0, \forall \beta \in \pi_\lambda \end{array} \right. \right\},$$

wobei  $\pi_\lambda$  „die“ Basis für  $W_\lambda$  ist, also  $\pi_\lambda := \{\alpha \in \pi \mid \langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle = 0\}$ . Insbesondere ist  $\pi_\lambda = \emptyset$ , falls  $\lambda$  regulär ist und somit  $W_{(\lambda, \mu)} = W$ , falls auch  $\mu$  regulär ist.

Für  $M, N \in \mathcal{O}$  sei  $\mathcal{L}(M, N)$  die abkürzende Schreibweise für  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)^{adf}$ .

**Satz 2.2.2 (Einfache Objekte in  $\mathcal{H}^I$ ).**

Sei  $i \in \mathbb{N}^+$ .

1. Alle einfachen Objekte in  $\mathcal{H}^I$  mit  $I = \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^i$  haben die Form  $\mathcal{L}(M^i(\lambda), L(x \cdot \mu))$ .
2.  $\mathcal{L}(M^i(\lambda), L(x \cdot \mu)) \neq 0 \iff x \in W_{(\lambda, \mu)}$ .

*Beweis:* 1. Jedes einfache Objekt hat echten zentralen Charakter von rechts, also folgt die Aussage aufgrund der Kenntnisse der einfachen Objekte in  $\mathcal{O}_\Lambda = \mathcal{O}_\Lambda^1$  bzw. in der Kategorie der Harish-Chandra-Bimoduln mit echtem zentralen Charakter von rechts und dem Isomorphismus  $\mathcal{L}(M^i(\lambda), L(x \cdot \mu)) \cong \mathcal{L}(M(\lambda), L(x \cdot \mu))$  aus [So1, 4 (a)].

2. Dies folgt direkt aus der Beschreibung der einfachen Objekte in  $\mathcal{H}_\lambda^1$  (vgl. [Ja2, Korollar 6.26]) und dem Isomorphismus  $\mathcal{L}(M^i(\lambda), L(x \cdot \mu)) \cong \mathcal{L}(M(\lambda), L(x \cdot \mu))$  (siehe [So1]).

◇

Wir formulieren nun noch eine Verallgemeinerung von Satz 1.4.1, auf die wir später noch zurückgreifen werden. Diese Aussage konnte nicht in der Literatur gefunden werden.

**Lemma 2.2.3.** *Sei  $i \in \mathbb{N}^+$ . Sei  $X \in \mathcal{H}^I$  projektiv mit  $I = \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^i$  für ein dominantes ganzes Gewicht  $\lambda$ . Dann ist der Sockel von  $X$  eine direkte Summe von Moduln der Form  $\mathcal{L}(M^i(\lambda), L(w_\circ \cdot \mu))$  für geeignete Gewichte  $\mu$ .*

*Beweis:* Es reicht zu zeigen, daß  $X$  als Linksmodul frei über  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$  ist. Dann läuft das Argument völlig analog zu Satz 1.4.1.

Wir schreiben zur Abkürzung  $\kappa := (\ker \chi_\lambda)^i$ . Nach [MS, Lemma 5.7] (oder implizit in [Ko, Theorem 0.13]) ist die universell Einhüllende  $\mathcal{U}$  ein freier  $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -Modul, also gilt

$$\mathcal{U} \cong \bigoplus_N (\mathcal{Z} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-))$$

als  $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -Modul mit einer geeigneten Indexmenge  $N$ . Somit gilt also

$$(\mathcal{Z}/\kappa \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)) \otimes_{(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-))} \mathcal{U} \cong \bigoplus_N (\mathcal{Z}/\kappa \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-))$$

als  $\mathcal{Z}/\kappa \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -Modul. Nun definiert die Multiplikation einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}/\kappa \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)) \otimes_{(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-))} \mathcal{U} &\cong \mathcal{U}/I \\ z \otimes n \otimes u &\mapsto znu \end{aligned}$$

als  $\mathcal{Z}/\kappa \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -Modul. Denn man überprüft ohne Mühe die Wohldefiniertheit der Abbildung. Offensichtlich ist sie surjektiv und mit der kanonischen Graduierung verträglich und damit bijektiv. Die Verträglichkeit mit der Linksoperation folgt direkt mit den Definitionen, da das Zentrum insbesondere mit  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$  kommutiert.

Somit ist also  $\mathcal{U}/I$  ein freier  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -Modul.

Sei nun  $E$  ein endlichdimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul, dann erhalten wir folgende Isomorphismen als  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -Moduln

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}/I \otimes E &\cong \bigoplus_M \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes E \\
&\cong \bigoplus_M (\mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)) \otimes E \\
&\cong \bigoplus_M \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} (\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes E) \\
&\cong \bigoplus_{M'} \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \\
&\cong \bigoplus_{M'} \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)
\end{aligned}$$

für geeignete Indexmengen  $M$  und  $M'$ . Dabei wurde im dritten Schritt die Tensoridentität (siehe [GL, Proposition 1.7]) benutzt.

Damit sind also alle Projektiven in  $\mathcal{H}^I$  als Linksmoduln  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -frei und somit auch ihre Sockel. Das liefert die Behauptung.  $\diamond$

Im nächsten Kapitel werden wir die Hilfsmittel bereitstellen, mit denen das obige Lemma in der Tat als Verallgemeinerung von Satz 1.4.1 erscheint. Für reguläres  $\lambda$  erhalten wir mit Korollar 2.3.7, Satz 2.2.1 und Lemma 2.3.4, daß  $X \otimes_{\mathcal{U}} M^i(\lambda)$  eine Vermafahne hat. Nach Lemma 2.3.5 hat dann jeder Projektive eine Vermafahne. Das liefert dann mit den Ergebnissen aus [So1] direkt die Behauptung von Lemma 2.2.3 für reguläres  $\lambda$ .

### 2.3 Die Kategorie $\mathcal{O}_{\Lambda}^i$ und der „dicke“ Vermamodul

Für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  sei  $\Lambda := \lambda + P(R)$  das verschobene Gewichtegitter. Mit  $\Lambda^+$  bezeichnen wir den „Trichter“ der dominanten Gewichte in  $\Lambda$ .

Wir definieren für ein dominantes Gewicht  $\lambda$  und  $i \in \mathbb{N}^+$  die Kategorie  $\mathcal{O}_{\Lambda}^i$  als die volle Unterkategorie aller  $\mathfrak{g}$ -Moduln  $M$ , für die gilt:

1.  $M$  ist als  $\mathfrak{g}$ -Modul endlich erzeugt,
2. lokal  $\mathfrak{b}$ -endlich und
3.  $M = \bigoplus_{\nu \in \lambda + P(R)} M_{\nu}^i$ , wobei  $M_{\nu}^i = \{m \in M \mid (\ker \nu)^i m = 0\}$ , also direkte Summe verallgemeinerter Gewichtsräume ist.

Für einen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $M$  und ein Gewicht  $\nu$  setzen wir  $M_{\nu}^{\infty} = \{m \in M \mid (\ker \nu)^i m = 0, \text{ für ein } i\} = \bigcup_i M_{\nu}^i$ . Wir definieren zu  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $i \in \mathbb{N}^+$  den „verdickten-Vermamodul“

$$M^i(\lambda) := \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} S(\mathfrak{h}) / (\ker \lambda)^i.$$

**Bemerkung 2.3.1.** Für den Block mit trivialem verallgemeinertem Charakter kann man den Modul  $M^i(0)$  auch erhalten, indem man den Vermamodul  $M(0)$  mit der Lokalisierung  $T$  von  $S$  an  $S^+ = \ker 0$  deformiert und anschließend mit  $(S^+)^i$  spezialisiert. Das liegt daran,

daß  $S/\text{incl}^{-1}(I) \cong T/I$  für jedes Ideal  $I \triangleleft T$  vermöge der offensichtlichen Abbildung. (Für  $f \in S/\text{incl}^{-1}(I)$  und oBdA.  $f(0) = 1$  ist ein Inverses gegeben durch  $(1 - \tilde{f} + \tilde{f}^2 - \dots \tilde{f}^{i-1})$  mit  $\tilde{f} := f - f(0)$ . Siehe dazu auch Abschnitt 2.4.)

**Lemma 2.3.2.** *Sei  $i \in \mathbb{N}^+$ . Für dominantes Gewicht  $\lambda$  ist  $M^i(\lambda)$  projektiv in  $\mathcal{O}_\Lambda^i$ .*

*Beweis:* Sei  $N \in \mathcal{O}_\Lambda^i$ . Dann gilt

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M^i(\lambda), N) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} S(\mathfrak{h})/(\ker \lambda)^i, N) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{b}}(S(\mathfrak{h})/(\ker \lambda)^i, N) \cong (N_\lambda^i)^{\mathfrak{n}}.$$

Der letzte Isomorphismus ist natürlich durch das Auswerten an der Eins gegeben. Da aber alle Gewichte von  $N$  zu demselben Weylgruppenorbit gehören, gilt  $(N_\lambda^i)^{\mathfrak{n}} = N_\lambda^i$ . Die Zuordnung  $N \mapsto N_\lambda^i$  ist exakt. Damit folgt die Behauptung.  $\diamond$

**Korollar 2.3.3.**  $\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M^i(\lambda), M(\lambda)) = \dim M(\lambda)_\lambda^i = \dim M(\lambda)_\lambda = 1$ .

Bevor wir den Hauptsatz zeigen, erwähnen wir noch einige Standardresultate. Insbesondere geben sie die Motivation und einen alternativen Beweis von Lemma 2.2.3 für den regulären Fall.

**Lemma 2.3.4.** *Jeder verallgemeinerte Vermamodul hat eine Vermafahne. Für jeden endlich-dimensionalen Modul  $E$  und  $i \in \mathbb{N}^+$  hat  $E \otimes M^i(\lambda)$  eine Vermafahne.*

*Beweis:* Da  $(\ker \lambda)^i$  endliche Kodimension in  $S(\mathfrak{h})$  hat, existiert also eine Filtrierung von  $S(\mathfrak{h})/(\ker \lambda)^i$  als  $\mathfrak{b}$ -Modul mit eindimensionalen Subquotienten. Anwenden des exakten Funktors  $\mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \bullet$  liefert eine Vermafahne. Die zweite Behauptung folgt direkt aus der ersten und der Tatsache, daß  $E \otimes M(\lambda)$  eine Vermafahne hat.  $\diamond$

**Lemma 2.3.5.** ([BGG, Proposition 2])

$M = M_1 \oplus M_2$  in  $\mathcal{O}_\Lambda^i$  hat eine Vermafahne  $\iff M_1$  und  $M_2$  haben eine Vermafahne.

*Beweis:* Die Folgerung von rechts nach links ist klar. Für die andere ist zu zeigen, daß für  $0 \neq v \in M_\lambda$  und  $\lambda$  maximal der Modul  $M/\mathcal{U}v$  eine Vermafahne hat. Denn damit gilt (oBdA  $v \in (M_1)_\lambda$ ) dann  $M/\mathcal{U}v = M_1/\mathcal{U}v \oplus M_2$ . Dieser Modul hat kleinere Länge und somit folgt die Behauptung mit Induktion. (Induktionsanfang:  $M$  ein Vermamodul, also unzerlegbar).

Wir wählen eine Filtrierung  $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset \{0\}$  mit Vermasubquotienten. Sei  $j$  maximal mit  $v \in M_j$ . Da  $\lambda$  maximales Gewicht von  $M$ , also auch von  $M_j/M_{j+1}$  ist, gilt  $M_j/M_{j+1} \cong M(\lambda)$  und wird vom Bild von  $v$  unter der kanonischen Projektion erzeugt. Andererseits wird  $v$  von  $\mathfrak{n}$  annihilert, also ist  $\mathcal{U}v$  homomorphes Bild von  $M(\lambda)$ . Insgesamt bekommen wir also einen  $\mathfrak{g}$ -Morphismus

$$M(\lambda) \twoheadrightarrow \mathcal{U}v \hookrightarrow M_j \twoheadrightarrow M(\lambda).$$

Die Abbildung ist nicht Null, also injektiv, und somit  $\mathcal{U}v \cap M_{j+1} = 0$ . Wir erhalten dann die gewünschte Filtrierung als Bild der Filtrierung von  $M$  unter der kanonischen Projektion  $M \twoheadrightarrow M/\mathcal{U}v$ .  $\diamond$

In [So1] wurde der Annihilator eines verdickten Vermamoduls bestimmt mit Hilfe des folgenden Satzes:

**Satz 2.3.6.** ([So1, Proposition 2])

Sei  $M$  ein  $\mathfrak{g}$ -Modul, der von einem verallgemeinerten Gewichtsvektor  $v \in M_\lambda^\infty$  (mit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ) erzeugt wird, und die Dimension des verallgemeinerten Gewichtsraumes  $M_\lambda^\infty$  sei endlich. Außerdem sei  $M$  frei erzeugt über  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ , d.h.  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes M_\lambda^\infty \xrightarrow{\sim} M$  via  $u \otimes v \mapsto uv$ . Dann gilt

$$\text{Ann}_{\mathcal{U}} M = \mathcal{U} \text{Ann}_{\mathcal{Z}} M.$$

Für den verdickten Vermamodul zum Gewicht  $\lambda$  gelten natürlich die Voraussetzungen des Satzes. Fassen wir nun  $\mathcal{Z}$  via Harish-Chandra-Isomorphismus als Teilraum von  $S = S(\mathfrak{h})$  auf, so ergibt die Vervollständigung am maximalen Ideal  $\xi(\lambda)$  eine Inklusion  $j : \hat{\mathcal{Z}}_{\xi(\lambda)} \hookrightarrow \hat{S}_{(\ker \lambda)}$ . Somit erhalten wir

**Korollar 2.3.7.** Für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $i \in \mathbb{N}^+$  gilt

$$\text{Ann}_{\mathcal{U}} M^i(\lambda) = \mathcal{U} \text{Ann}_{\mathcal{Z}} M^i(\lambda) = \mathcal{U}(\xi^{-1} \circ j^{-1}((\ker \lambda)^i)) \supseteq \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^i.$$

Falls  $\lambda$  regulär ist, gilt sogar Gleichheit.

Insbesondere gilt für  $I = \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^i$  und  $M \in \mathcal{O}_\Lambda^i$ , daß  $\mathcal{L}(M^i(\lambda), M) \in \mathcal{H}^I$ .

## 2.4 Die Deformationskategorie $\mathcal{D}_\Lambda(T)$

Zuerst führen wir einige Bezeichnungen ein. Es sei  $T = S_{(\ker 0)}$  die Lokalisierung von  $S$  an  $0 \in \mathfrak{h}^*$  mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ .

Wir bezeichnen mit  $M_T(\lambda) := \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} (\mathbb{C}_\lambda \otimes T)$  den  $T$ -deformierten Vermamodul. Dabei operiert  $\mathfrak{b}$  auf  $\mathbb{C}_\lambda$  wie gewöhnlich und auf  $T$  via der Abbildung  $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \hookrightarrow S \hookrightarrow T$ .

Wir definieren die Deformationskategorie  $\mathcal{D}_\Lambda(T)$  als die kleinste volle Unterkategorie von  $\mathfrak{g} \otimes T$ -mod, die

1.  $M_T(\lambda)$  für  $\lambda \in \Lambda^+$  enthält,
2. abgeschlossen ist unter Tensorieren mit endlichdimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Moduln und
3. mit einem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält und
4. abgeschlossen ist unter der Bildung endlicher direkter Summen.

### Eigenschaften von $\mathcal{D}_\Lambda(T)$

- Für einen endlichdimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $E$  hat der  $\mathfrak{g} \otimes T$ -Modul  $E \otimes M_T(\lambda)$  eine Filtrierung mit Subquotienten isomorph zu  $M_T(\lambda + \nu)$ , wobei  $\nu$  die Gewichte von  $E$  durchläuft.
- Der verdickte Vermamodul  $M^i(\lambda)$  ist zu dem spezialisierten Modul  $M_T(\lambda) \otimes_T T/\mathfrak{m}^i$  isomorph.
- Die Gewichtsräume eines Moduls  $M \in \mathcal{D}_\Lambda(T)$  seien definiert als

$$M^\nu := \{m \in M \mid h m = \underbrace{(h + \nu(h))}_{\in T} m \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Dies sind freie  $T$ -Moduln von endlichem Rang.

### Operation des Zentrums und Blockzerlegung

Jedes Element  $x \in \mathcal{Z} \otimes T$  definiert einen Endomorphismus von  $M_T(\lambda)$ , der die Gewichtsraumzerlegung respektiert. Somit operiert  $x$  auf dem höchsten Gewichtsraum, einem freien  $T$ -Modul vom Rang 1, durch Multiplikation mit einem Element aus  $T$ . Da der Modul von diesem Raum erzeugt wird, ist dadurch auch schon der gesamte Endomorphismus festgelegt. Sei  $\chi_\lambda : \mathcal{Z} \otimes T \rightarrow T$  die dadurch induzierte Abbildung, das heißt, für  $x \in \mathcal{Z} \otimes T$  gilt  $\chi_\lambda(x)m = xm$  für alle  $m \in M_T(\lambda)$ .

Der Träger (im folgenden als  $\text{supp}$  bezeichnet) eines deformierten Vermamoduls  $M_T(\lambda)$  ist abgeschlossen in  $\mathcal{Z} \otimes T$ . Genauer gilt, da die Gewichtsräume endlich erzeugt sind, die Formel

$$\begin{aligned} \text{supp } M_T(\lambda) &= \text{supp} \bigoplus_{\nu} (M_T(\lambda))^{\nu} = \bigcup_{\nu} \text{supp}((M_T(\lambda))^{\nu}) = \bigcup_{\nu} \mathcal{V}(\text{Ann}(M_T(\lambda))^{\nu}) \\ &= \mathcal{V}(\text{Ann}(M_T(\lambda))^{\wedge}) = \ker \chi_\lambda, \end{aligned}$$

wobei für  $J \subset \mathcal{Z} \otimes T$  das Symbol  $\mathcal{V}(J)$  den Zariskiabschluß von  $J$  bezüglich des (Prim-)Spektrums von  $(\mathcal{Z} \otimes T)$  bezeichnet (vgl. [Bo1, II, 4]).

Die Inklusion  $\ker \chi_\lambda \hookrightarrow \mathcal{Z} \otimes T$  definiert einen Isomorphismus  $\text{spec } T \xrightarrow{\sim} \text{supp } M_T(\lambda)$ . Somit enthält der Träger von  $M_T(\lambda)$  genau einen abgeschlossenen Punkt, nämlich  $\xi(\lambda) \otimes T + \mathcal{Z} \otimes \mathfrak{m}$ . Damit haben die Träger von  $M_T(\lambda)$  und  $M_T(\mu)$  genau dann nichttrivialen Schnitt, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  dasselbe maximale Ideal des Zentrums definieren, beziehungsweise, falls sie im gleichen Weylgruppenorbit liegen.

### Blockzerlegung nach zentralem Charakter

Sei nun  $\text{Tr}(\chi) = \bigcup_{\xi(\lambda)=\chi} \text{supp}(M_T(\lambda))$ . Der Träger eines beliebigen Moduls aus  $\mathcal{D}_\Lambda(T)$  ist in einer endlichen Vereinigung solcher  $\text{Tr}(\chi)$  enthalten.

Insgesamt liefert uns das eine Zerlegung der Kategorie in durch maximale Ideale des Zentrums indizierte Blöcke

$$\mathcal{D}_\Lambda(T) = \bigoplus_{\chi} \mathcal{D}_\Lambda^\chi(T),$$

wobei der Block  $\mathcal{D}_\Lambda^\chi(T)$  gerade die Unterkategorie aller Objekte darstellt, deren Träger in  $\text{Tr}(\chi)$  enthalten sind.

### Blockzerlegung nach dem Wurzelgitter

Die Gewichtsräume eines Moduls  $M$  aus  $\mathcal{D}_\Lambda(T)$  sind  $T$ -Moduln. Nehmen wir nun ein Element  $c \in \mathfrak{h}^*/\mathbb{Z}R$ , so ist  $\bigoplus_{\mu \in c} M^\mu$  ein  $\mathfrak{g} \otimes T$ -Untermodul von  $M$ . Dadurch erhalten wir eine Blockzerlegung

$$\mathcal{D}_\Lambda(T) = \bigoplus_{c \in \Lambda/\mathbb{Z}R} \mathcal{D}_\Lambda^c(T).$$

Feinste Blockzerlegung

Koppelt man nun in gewisser Weise beide Zerlegungen, kann man diese Zerlegung noch verfeinern. Genauer setzen wir

$$\mathcal{D}_\lambda(T) = \mathcal{D}_\Lambda^{\xi(\lambda)} \cap \mathcal{D}_\Lambda^{\lambda + \mathbb{Z}R}.$$

Das liefert nun die Zerlegung

$$\mathcal{D}_\Lambda(T) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} \mathcal{D}_\lambda(T). \quad (2.1)$$

**Verschiebungsfunktoren**

Wir bezeichnen mit  $\text{pr}_\lambda$  die Projektion auf  $\mathcal{D}_\lambda(T)$  gemäß (2.1). Für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\lambda - \mu$  ein ganzes Gewicht definieren wir den Verschiebungsfunktor

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^\mu : \mathcal{D}_\lambda(T) &\longrightarrow \mathcal{D}_\mu(T) \\ M &\mapsto \text{pr}_\mu(E(\mu - \lambda) \otimes M), \end{aligned}$$

wobei  $E(\mu - \lambda)$  den endlichdimensionalen irreduziblen  $\mathfrak{g}$ -Modul mit höchstem Gewicht im Weylgruppenorbit (mit Fixpunkt Null) von  $(\mu - \lambda)$  bezeichnet.

Bezüglich der Spezialisierung gelten die folgenden Resultate:

**Satz 2.4.1.** ([So2], [So3])

1. Die Spezialisierung  $\cdot \otimes_T T/\mathfrak{m}$  am abgeschlossenen Punkt liefert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen aller Objekte in  $\mathcal{D}_\Lambda(T)$  und der Projektiven in  $\mathcal{O}_\Lambda$ . Insbesondere gilt  $M_T(\lambda) \otimes_T T/\mathfrak{m} \cong M(\lambda)$ .
2. Für  $J := (\ker \lambda)^i \subset T$  mit  $i \in \mathbb{N}^+$  ergibt die  $J$ -Spezialisierung  $\cdot \otimes_T T/J$  bis auf Isomorphie eine Bijektion zwischen den Objekten von  $\mathcal{D}_\Lambda(T)$  und den Projektiven in  $\mathcal{O}_\Lambda^i$ .
3. Die Spezialisierung vertauscht jeweils mit der Verschiebung.

*Beweis:* Siehe [So2, Kapitel 2.1] und [So3, Theorem 6]. ◇

**2.5 Der Funktor  $\mathbb{V}$  für die deformierte Kategorie  $\mathcal{O}$** 

Wir formulieren hier nochmals den Endomorphismensatz für deformierte Projektive in voller Allgemeinheit.

Sei dazu  $\lambda$  ein dominantes Gewicht. Sei  $P_T(\lambda)$  die durch Satz 2.4.1 definierte  $T$ -Deformation des antidominanten Projektiven aus  $\mathcal{O}_\lambda$ . Sei  $\mathcal{W} := \langle s_\alpha \mid \alpha \in R, \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z} \rangle$  die bezüglich  $\lambda$  ganze Weylgruppe. Wir betrachten die Abbildung

$$h_\lambda : \mathcal{Z} \otimes T \xrightarrow{\xi \otimes \text{id}} S \otimes T \xrightarrow{(+\lambda) \otimes \text{id}} S \otimes T \xrightarrow{\text{can}} T \otimes_{T^{\mathcal{W}}} T, \quad (2.2)$$

wobei  $+\lambda$  den Komorphismus zur Translation um  $\lambda$  bezeichnet. Sei  $\mathcal{W}_\lambda$  der Stabilisator von  $\lambda$  in  $\mathcal{W}$ . Es gilt damit folgender

**Satz 2.5.1.** (vgl. [So3, Theorem 9])

Sei  $\lambda$  dominant und  $h_\lambda$  die Abbildung aus (2.2). Dann definiert die Multiplikation eine Surjektion  $\mathcal{Z} \otimes T \twoheadrightarrow \text{End}_{\mathfrak{g} \otimes T}(P_T(\lambda))$  mit Kern  $\ker h_\lambda$ . Das Bild von  $h_\lambda$  ist  $T^{\mathcal{W}\lambda} \otimes_{T^{\mathcal{W}}} T$ . Somit induziert das einen Isomorphismus

$$T^{\mathcal{W}\lambda} \otimes_{T^{\mathcal{W}}} T \cong \text{End}_{\mathfrak{g} \otimes T}(P_T(\lambda)).$$

*Beweis:* Siehe [So3, Theorem 9] unter Verwendung von [So2, Endomorphismensatz]. Die Tatsache, daß  $\lambda$  nicht notwendigerweise ganz ist, ändert die Aussagen von [So3, Theorem 9] nicht, wenn man die Weylgruppe durch die bezüglich  $\lambda$  ganze Weylgruppe ersetzt.  $\diamond$

Wir erinnern nun an die Definition des besagten Funktors.

Sei  $\mu$  ein ganzes dominantes Gewicht. Sei  $P_T(\mu) \in \mathcal{D}_\mu(T)$  die Deformation des antidominanten Projektiven  $P_\mu \in \mathcal{O}_\mu$ . Dann sei

$$\begin{aligned} \mathbb{V} = \mathbb{V}_\mu : \quad \mathcal{D}_\mu(T) &\rightarrow T^{\mathcal{W}\mu} \text{ -- mod } -T \\ M &\mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{g} \otimes T}(P_T(\mu), M). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da alle Objekte in  $\mathcal{D}_0(T)$  projektiv sind, ist dieser Funktor exakt.

## 2.6 Der Funktor $\mathbb{V}$ für Harish-Chandra-Bimoduln

In [So3] wird ein Funktor  $\mathbb{V}$  von dem Block der Harish-Chandra-Bimoduln mit verallgemeinertem trivialem zentralem Charakter von beiden Seiten in die  $\mathcal{Z}$ -Bimoduln definiert, mit der Eigenschaft, daß er alle einfachen Bimoduln mit nichtmaximaler Gelfand-Kirillov-Dimension annulliert und den anderen auf einen Modul der Dimension 1 abbildet. Im folgenden wollen wir diesen Funktor auf singuläre Blöcke fortsetzen. Es wird gezeigt, daß er für beliebigen ganzen verallgemeinerten zentralen Charakter ebenfalls treu auf Projektiven ist. Wir können dann auch zeigen, daß einige weitere Eigenschaften erhalten bleiben.

### Verschiebungsfunktoren für Harish-Chandra-Bimoduln

Die Operation des Zentrums von  $\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  zerlegt die Kategorie  $\mathcal{H}$  in Blöcke. Mit analogen Bezeichnungen wie in Kapitel 1.1 erhalten wir

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(\zeta, \chi) \in \text{Max } \mathcal{Z} \times \text{Max } \mathcal{Z}} \zeta \mathcal{H}_\chi = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*/(W \cdot)} \lambda \mathcal{H}_\mu,$$

wobei  $\lambda \mathcal{H}_\mu$  aus allen Harish-Chandra-Bimoduln besteht, die verallgemeinerten zentralen Charakter  $\lambda$  von links und  $\mu$  von rechts haben.

Es seien  $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$  dominante ganze Gewichte. Wir bezeichnen mit  $\text{pr}_{(\mu, \mu')}$  die Projektion auf den Block  ${}_\mu \mathcal{H}_{\mu'}$ .

Wir definieren den Verschiebungsfunktor

$$\begin{aligned} \theta_{(\lambda, \lambda')}^{(\mu, \mu')} : \quad \lambda \mathcal{H}_{\lambda'} &\longrightarrow {}_\mu \mathcal{H}_{\mu'} \\ X &\mapsto \text{pr}_{(\mu, \mu')} (X \otimes E(\mu - \lambda)^l \otimes E(\mu' - \lambda')^r), \end{aligned}$$

wobei  $E(\mu - \lambda)$  den endlichdimensionalen irreduziblen  $\mathfrak{g}$ -Modul mit höchstem Gewicht im Weylgruppenorbit (mit Fixpunkt Null) von  $(\mu - \lambda)$  bezeichnet.

Wir setzen  ${}_{\lambda}L_{\mu} := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\mu), L(w_o \cdot \lambda))^{adf}$ , und  ${}_{\lambda}P_{\mu}^n$  sei seine projektive Decke in

$${}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}^n := \{X \in {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} \mid 0 = X(z - \chi_{\mu}(z))^n\}.$$

Entsprechend seien  ${}^n_{\lambda}P_{\mu}$  und  ${}^n_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}$  definiert.

Wir bezeichnen mit  $\theta_s$  bzw.  $\theta_s^r$  die Verschiebung durch die  $s$ -Wand von links bzw. von rechts. Präziser heißt das, wir wählen zu Gewichten  $\lambda$  und  $\mu$  jeweils Gewichte  $\lambda'$  und  $\mu'$ , so daß  $\lambda - \lambda'$  und  $\mu - \mu'$  ganz sind und  $W_{\lambda'} = W_{\mu'} = \{1, s\}$  gilt. Dann sind die Verschiebungen durch die Funktoren

$$\begin{aligned} \theta_s &:= \theta_{(\lambda', \mu)}^{(\lambda, \mu)} \circ \theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda', \mu)} : & {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} &\longrightarrow {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} & \text{bzw.} \\ \theta_s^r &:= \theta_{(\lambda, \mu')}^{(\lambda, \mu)} \circ \theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda, \mu')} : & {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} &\longrightarrow {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} \end{aligned}$$

definiert. (Bis auf natürliche Äquivalenz sind diese Funktoren unabhängig von der Wahl von  $\lambda'$  und  $\mu'$ .)

Für  $M, N \in \mathcal{O}$  sei  $\mathcal{L}(M, N)$  die abkürzende Schreibweise für  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)^{adf}$ .

**Lemma 2.6.1.** *Seien  $\lambda, \mu$  dominante ganze Gewichte und  $W_{\mu} \supseteq W_{\lambda}$ . Dann gilt:*

$$\theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} P_{\nu}^n \cong {}_{\lambda}P_{\nu}^n \quad \text{bzw.} \quad \theta_{(\nu, \mu)}^{(\nu, \lambda)} {}^n_{\nu}P_{\mu} \cong {}^n_{\nu}P_{\lambda}.$$

*Beweis:* Wir zeigen nur die erste Aussage, die andere geht völlig analog. Der Modul auf der linken Seite ist offensichtlich projektiv in  ${}_{\lambda}\mathcal{H}_{\nu}^n$ . Außerdem ist

$$\dim \text{Hom} \left( \theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} P_{\nu}^n, \mathcal{L}(M(\nu), L(x \cdot \mu)) \right) = \dim \text{Hom} \left( {}_{\mu}P_{\nu}^n, \theta_{(\lambda, \nu)}^{(\mu, \nu)} (\mathcal{L}(M(\nu), L(x \cdot \mu))) \right)$$

nur ungleich Null, falls  $x$  das längste Element ist (siehe [Ja1, 4.12 (3)]). In diesem Fall ist der Raum aber eindimensional.  $\diamond$

### 2.6.1 Die Definition des Funktors und seine Eindeutigkeit

Wir wollen nun den „Kombinatorikfunktor“  $\mathbb{V}$  definieren.

#### Die Definition:

Seien dazu  $\lambda, \mu$  (nicht notwendigerweise ganze) dominante Gewichte. Wir nehmen eine Folge  $\{P^n\} = \{{}_{\lambda}P_{\mu}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von projektiven Decken von  ${}_{\lambda}L_{\mu}$  in  ${}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}^n$ . Mit einer passenden Wahl von Surjektionen  $p_i : P^i \twoheadrightarrow P^j$  für  $j \leq i$  erhalten wir ein projektives System, d.h. für festes  $X \in {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}$  ein injektives System  $\{\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P^i, X)\}$ .

Wir definieren den Funktor  $\mathbb{V}_{(\lambda, \mu)}$  (oder einfach  $\mathbb{V}$ ) durch

$$\mathbb{V}X := \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P^i, X).$$

Der Funktor ist exakt ([La, S.171]) und annulliert alle Einfachen außer dem einfachen  ${}_{\lambda}L_{\mu}$  mit maximaler Gelfand-Kirillov-Dimension in diesem Block und es gilt  $\dim \mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\mu}) = 1$ .

Eindeutigkeit:

Darüberhinaus ist er sogar eindeutig durch diese Bedingungen. Denn sei  $\mathbb{W}$  ebenfalls ein Funktor mit all diesen Eigenschaften. Wir wählen dazu einen Basisvektor  $v$  aus  $\mathbb{W}(\lambda L_\mu)$  und kompatible Urbilder  $v_i \in \mathbb{W}P^i$  unter den Projektionen  $\mathbb{W}p_i$ . Da jedes  $X \in {}_\lambda \mathcal{H}_\mu$  schon in einem  ${}_\lambda \mathcal{H}_\mu^n$  für genügend großes  $n$  liegt, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{V}X &= \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P^i, X) &\rightarrow & \mathbb{W}X \\ \{f_m\} & &\mapsto & (\mathbb{W}f_n)(v_n) \end{aligned}$$

für genügend großes  $n$  wohldefiniert. Man kann leicht nachprüfen, daß diese Abbildungen dann eine Äquivalenz der beiden Funktoren bestimmen.

Insbesondere können wir bei der Definition des Funktors statt eines Systems von projektiven Decken in  ${}_\lambda \mathcal{H}_\mu^n$  auch ein System von projektiven Decken in  ${}^n \mathcal{H}_\mu$  wählen.

$\mathbb{V}$  als Funktor in die Kategorie der Bimoduln über dem Zentrum:

Wir können  $\mathbb{V}$  auch als Funktor in die Bimoduln über dem Zentrum  $\mathcal{Z}$  auffassen, indem wir  $\mathbb{V}X$  mit der von  $X$  geerbten  $\mathcal{Z}$ -Bimodulstruktur versehen. Durch Vervollständigung an den Idealen  $\ker \chi_\lambda$  bzw.  $\ker \chi_\mu$  kann man  $\mathbb{V}X$  auch als  $S^{W_\lambda} \otimes S^{W_\mu}$ -Modul behandeln. Im folgenden werden wir dies nicht mehr unterscheiden.

Zur Abkürzung schreiben wir ab sofort  $S^\lambda$  statt  $S^{W_\lambda}$ .

## 2.6.2 Der Chevalleyantiautomorphismus

Der Chevalleyantiautomorphismus  $\tau$  (zur Definition siehe Kapitel 2.1) liefert einen Algebrenisomorphismus  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \cong \mathcal{U}^{\text{opp}} \otimes \mathcal{U}^{\text{opp}}$  und definiert einen Funktor  $\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , der gerade die Links- und Rechtsoperation von  $\mathfrak{g}$  vertauscht. Explizit bedeutet das für einen Bimodul  $X$ :

- $\eta(X) = X$  als Vektorraum
- $(u, v) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  operiert auf  $\eta(X)$  wie  $(v, u)$  auf  $X$ .

Wir schreiben statt  $\eta(X)$  auch  $X^\eta$ . Es gelten folgende mehr oder weniger offensichtliche Aussagen:

**Lemma 2.6.2.** *Für  $X, Y \in \mathcal{H}$  und ein beliebiges Gewicht  $\lambda$  und  $n \in \mathbb{N}^+$  gilt*

1.  $\eta(X \otimes Y) \cong \eta(Y) \otimes \eta(X)$  als Bimoduln
2.  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\eta(X), \eta(Y))$  als Vektorräume.
3.  $X$  ist projektiv in  $\mathcal{H}_\lambda^n \iff \eta(X)$  ist projektiv in  ${}^n \mathcal{H}$ .
4.  $X$  ist unzerlegbar  $\iff \eta(X)$  ist unzerlegbar.
5.  $X$  ist einfach  $\iff \eta(X)$  ist einfach.

*Beweis:* Die natürlichen Isomorphismen sind durch die mengentheoretische Identität gegeben. Man überprüft leicht, daß dies tatsächlich Morphismen in den entsprechenden Kategorien sind. Die Untermoduln von  $\eta(X)$  sind offensichtlich dieselben wie die Untermoduln von  $X$ . Insbesondere gilt also die letzte der obigen Aussagen. Die Behauptung über die Projektivität und Unzerlegbarkeit folgt aus der Gleichheit der Morphismenräume.  $\diamond$

Eine weitere wichtige Eigenschaft bezüglich des Zentrums der universell Einhüllenden Algebra wollen wir ebenfalls festhalten:

**Lemma 2.6.3.** (vgl. [Di, Lemma 7.4.2], [Ja2, (3.5)])

*Der Chevalleyantiautomorphismus  $\tau$  induziert die Identität auf dem Zentrum  $\mathcal{Z}$  von  $\mathcal{U}$ .*

*Beweis:* Da  $\tau$  ein Algebrenantiautomorphismus ist, läßt er insbesondere das Zentrum invariant. Nun gilt aber  $\xi(z) = \xi(\tau(z))$  für jedes Element  $z$  aus dem Zentrum, da  $\tau$  eingeschränkt auf  $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$  nach Definition die Identität darstellt. Der Harish-Chandra-Isomorphismus ist aber insbesondere injektiv, somit gilt  $z = \tau(z)$  für alle  $z \in \mathcal{Z}$ .  $\diamond$

Für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  liefert das eine Äquivalenz von Blöcken  ${}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} \xrightarrow{\sim} {}_{\mu}\mathcal{H}_{\lambda}$ . Dies wird beispielsweise in [So1] behandelt.

### 2.6.3 Der Funktor $\mathbb{V}$ und Verschiebungen

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie sich  $\mathbb{V}$  mit Verschiebungen verhält. Wir erwähnen einige einfache Aussagen, die schließlich dazu dienen werden, den Hauptsatz dieses Kapitels über die Volltreue des Funktors auf Projektiven zu zeigen.

**Lemma 2.6.4.** *Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Seien  $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$  dominante ganze Gewichte mit  $W_{\lambda'} \supseteq W_{\lambda}$  und  $W_{\mu'} \supseteq W_{\mu}$ . Für einen Bimodul  $X \in {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}$  gilt folgende Gleichheit als Vektorräume*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}({}_{\lambda'}P_{\mu}^n, \theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda', \mu)} X) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}({}_{\lambda}P_{\mu}^n, X) \quad \text{und} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}({}_{\lambda}P_{\mu'}^n, \theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda, \mu')} X) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}({}_{\lambda}P_{\mu}^n, X). \end{aligned}$$

*Damit also auch*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda, \mu')} X &= \mathbb{V}X \quad \text{und} \\ \mathbb{V}\theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda', \mu)} X &= \mathbb{V}X. \end{aligned}$$

*Beweis:* Das ist gerade die Aussage der Adjungiertheit der entsprechenden Verschiebungsfunktoren gepaart mit der Aussage in Lemma 2.6.1.  $\diamond$

**Lemma 2.6.5.** *Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Seien  $\lambda, \mu, \nu$  dominante ganze Gewichte mit  $W_{\lambda} \subseteq W_{\nu}$ . Für einen Modul  $M \in \mathcal{O}_{\mu}^i$  erhalten wir  $\mathfrak{g}$ -Bimodulisomorphismen*

$$\theta_{(\mu, \lambda)}^{(\mu, \nu)} \mathcal{L}(M(\lambda)^i, M) \cong \mathcal{L}(\theta_{\lambda}^{\nu} M(\lambda)^i, M) \cong \mathcal{L}(M(\nu)^i, M). \quad (2.4)$$

*Beweis:* Der letzte Isomorphismus ist klar, da  $\theta_{\lambda}^{\nu} M(\lambda)^i \cong M(\nu)^i$  als  $\mathfrak{g}$ -Moduln. Die Vektorraumisomorphismen  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M \otimes E, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, E^* \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N) \otimes E^*$  sind mit der  $\mathfrak{g}$ -Bimodulstruktur verträglich und induzieren den ersten Isomorphismus.  $\diamond$

**Lemma 2.6.6.** *Seien  $\lambda, \mu, \nu$  dominante ganze Gewichte und  $\lambda$  regulär. Dann gibt es eine natürliche Äquivalenz von Funktoren*

$$\mathbb{V}\theta_{(\lambda, \nu)}^{(\mu, \nu)} \cong \text{res}_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} \mathbb{V}$$

von  ${}_{\lambda}\mathcal{H}_{\nu}$  nach  $S^{\mu} \otimes S^{\nu}$ -mof, wobei  $\text{res}_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)}$  die Restriktion von  $S^{\lambda} \otimes S^{\nu}$ -mof  $\rightarrow S^{\mu} \otimes S^{\nu}$ -mof bezeichnet. Analoges gilt für Verschiebungen von rechts.

*Beweis:* Für  $\nu$  regulär ist das nur eine Umformulierung von [So3, Theorem 12].

Für Verschiebung von der anderen Seite betrachten wir die Komposition von Funktoren

$${}_{\nu}\mathcal{H}_{\lambda} \xrightarrow{\eta} {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\nu} \xrightarrow{\mathbb{V}} \mathcal{Z} - \text{mod} - \mathcal{Z} \xrightarrow{\tilde{\eta}} \mathcal{Z} - \text{mod} \mathcal{Z}, \quad (2.5)$$

wobei  $\tilde{\eta}$ , ebenso wie  $\eta$ , gerade die Links- und Rechtsoperation miteinander vertauscht. Offensichtlich ist diese Komposition gerade der Funktor  $\mathbb{V}$  für  ${}_{\nu}\mathcal{H}_{\lambda}$ . Nun gilt aber nach Lemma 2.6.2 Punkt 1, daß auf natürliche Weise  $\eta(\theta_{(\nu, \lambda)}^{(\nu, \mu)} X) \cong \theta_{(\lambda, \nu)}^{(\mu, \nu)} \eta(X)$  für einen Bimodul  $X \in {}_{\nu}\mathcal{H}_{\lambda}$  gilt. Somit erhalten wir folgendes kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} {}_{\nu}\mathcal{H}_{\lambda} & \xrightarrow{\eta} & {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\nu} & \xrightarrow{\mathbb{V}} & S - \text{mod} - S^{\nu} & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & S^{\nu} - \text{mod} - S \\ \theta_{(\nu, \lambda)}^{(\nu, \mu)} \downarrow & & \theta_{(\lambda, \nu)}^{(\mu, \nu)} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} & & \downarrow \text{res}_{(\nu, \mu)}^{(\nu, \lambda)} \\ {}_{\nu}\mathcal{H}_{\mu} & \xrightarrow{\eta} & {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu} & \xrightarrow{\mathbb{V}} & S^{\mu} - \text{mod} - S^{\nu} & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & S^{\nu} - \text{mod} - S^{\mu}. \end{array} \quad (2.6)$$

Für singuläres  $\nu$  gilt nach Lemma 2.6.4 als Vektorraum  $\mathbb{V}\theta_{(\nu, \lambda)}^{(\nu, \mu)} X \cong \mathbb{V}X$  für  $X \in {}_{\nu}\mathcal{H}_{\lambda}$ . Dies ist aber dann auch ein  $S^{\nu}$ -Linksmodulisomorphismus. Die  $S^{\mu}$ -Rechtsstruktur ist nach Lemma 2.6.5 gegeben durch Einschränkung der  $S$ -Rechtsstruktur auf  $X$ . Für Verschiebung auf der anderen Seite benutze man ein (2.6) entsprechendes kommutatives Diagramm, um es auf den bereits gezeigten Fall zurückzuführen.  $\diamond$

Eine Art adjungierte Version des obigen Lemmas ist folgendes

**Lemma 2.6.7.** *Seien  $\lambda, \mu, \nu$  dominante ganze Gewichte mit  $W_{\lambda} \subseteq W_{\mu}$  und  $\nu$  regulär. Dann gibt es eine natürliche Äquivalenz von Funktoren*

$$\mathbb{V}\theta_{(\nu, \mu)}^{(\nu, \lambda)}(\bullet) \cong (S \otimes S^{\lambda}) \otimes_{S \otimes S^{\mu}} \mathbb{V}(\bullet), \quad (2.7)$$

$$\mathbb{V}\theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)}(\bullet) \cong (S^{\lambda} \otimes S) \otimes_{S^{\mu} \otimes S} \mathbb{V}(\bullet). \quad (2.8)$$

*Beweis:* Für  $\nu$  regulär ist (2.8) nur eine Umformulierung der Aussagen [So3, Theorem 12 mit Proposition 6]. Zum Beweis von (2.7) betrachten wir wiederum die Komposition von Funktoren (2.5). Ein analoges Diagramm zu (2.6) liefert den Beweis.  $\diamond$

Für singuläres  $\nu$  sollte diese Aussage ebenfalls richtig sein, benötigt aber eine bessere Kenntnis der Bimoduln mit singulärem verallgemeinertem zentralen Charakter von beiden Seiten.

### 2.6.4 Die Volltreue des Funktors $\mathbb{V}$ auf Projektiven

Wir erhalten nun als Verallgemeinerung der Resultate von [So3] den folgenden

**Hauptsatz 2.6.8 (Verallgemeinerter Struktursatz).**

Für jeden Block  ${}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu}$  mit  $\mu$  und  $\nu$  dominante ganze Gewichte existiert ein bis auf Äquivalenz eindeutiger exakter Funktor

$$\mathbb{V} : {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu} \longrightarrow \mathbb{C} - \text{mod},$$

mit der Eigenschaft, daß er alle einfachen Objekte mit Ausnahme des einfachen Objektes mit maximaler Gelfand-Kirillov-Dimension in diesem Block annihiliert.

Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Der Funktor induziert für  $P \in {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu}$  und  $Q \in {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu}^n$  projektiv einen Isomorphismus

$$\Psi : \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, Q) \cong \text{Hom}_{S \otimes S}(\mathbb{V}P, \mathbb{V}Q),$$

falls  $\nu$  regulär ist. Für singuläres  $\nu$  erhalten wir zumindest eine Injektion.

*Beweis:* Die Existenz des Funktors und die durch die geforderten Eigenschaften gegebene Eindeutigkeit haben wir bereits in Abschnitt 2.6.1 gezeigt.

Wir fahren also mit dem zweiten Teil der Behauptung fort.

$\Psi$  ist injektiv:  $\mathbb{V}$  ist exakt, also ein Homologiefunktor, d.h. es gilt  $\mathbb{V}(\text{im}(\phi)) = \text{im}(\mathbb{V}(\phi))$  für alle Morphismen  $\phi : M \rightarrow N$  und  $M, N \in \mathcal{H}$ .

Denn sei  $i : \text{im} \phi \hookrightarrow N$  die Inklusion. Dann gilt  $\text{im}(\mathbb{V}\phi) = \text{im}(\mathbb{V}(i \circ \phi)) = \text{im}(\mathbb{V}i \circ \mathbb{V}\phi) = \text{im}(\mathbb{V}i) = \mathbb{V}(\text{im} \phi)$ . Bei der vorletzten Gleichheit wurde benutzt, daß  $\mathbb{V}\phi$  surjektiv ist.

Nun hat aber das Bild von  $\phi \neq 0$  stets nichttrivialen Schnitt mit dem Sockel von  $N$ , also gilt mit Lemma 2.2.3  $\mathbb{V}(\text{im} \phi) = \text{im}(\mathbb{V}\phi) \neq \{0\}$ . Somit ist  $\Psi$  eine Injektion.

$\Psi$  ist surjektiv: Nun zeigen wir noch Dimensionsgleichheit. Seien  $P \in {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu}$  und  $Q \in {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu}^n$  projektiv mit  $\mu, \nu$  dominant ganz. Sei  $\nu$  regulär. Wir wählen ein reguläres  $\lambda$  im um  $\mu$  verschobenen Gewichtegitter. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{W_{\mu}} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, Q) &\stackrel{(1)}{=} \dim \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_{(\lambda, \nu)}^{(\mu, \nu)} \theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} P, Q) \\ &\stackrel{(2)}{=} \dim \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} P, \theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} Q) \\ &\stackrel{(3)}{=} \dim \text{Hom}_{S \otimes S}(\mathbb{V}\theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} P, \mathbb{V}\theta_{(\mu, \nu)}^{(\lambda, \nu)} Q) \\ &\stackrel{(4)}{=} \dim \text{Hom}_{S \otimes S}((S \otimes S) \otimes_{S^{\mu} \otimes S} \mathbb{V}P, (S \otimes S) \otimes_{S^{\mu} \otimes S} \mathbb{V}Q) \\ &= \dim \text{Hom}_{S^{\mu} \otimes S}(\mathbb{V}P, (S \otimes S) \otimes_{S^{\mu} \otimes S} \mathbb{V}Q) \\ &= \dim \text{Hom}_{S^{\mu} \otimes S}(\mathbb{V}P, \bigoplus_{W_{\mu}} \mathbb{V}Q) \\ &= \bigoplus_{W_{\mu}} \dim \text{Hom}_{S^{\mu} \otimes S}(\mathbb{V}P, \mathbb{V}Q) \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt nach [BG, 4.2 c)], die zweite wegen der Adjungiertheit der beiden Funktoren. Die darauffolgende Gleichung ist gerade die Volltreue des Funktors auf regulären Blöcken (vgl. [So3, Theorem 13]). Mit Lemma 2.6.7 folgt die vierte Gleichheit. Der Rest ist dann klar, da  $S \otimes S$  freier  $S \otimes S^{\mu}$ -Modul vom Rang  $|W_{\mu}|$  ist (vgl. [Bo3, 4-6, V 5]).  $\diamond$

**Bemerkung 2.6.9.** Wir vermuten, daß die Surjektivität auch für singuläres  $\nu$  gilt. Dazu müssten wir zeigen, daß  $\theta_{(\mu,\nu)}^{(\mu,\lambda)}Q$  projektiv ist in  $\mathcal{H}^I$  für geeignetes  $I$ , so daß der Struktursatz [So3, Theorem 13] gilt.

Auch für singulären verallgemeinerten zentralen Charakter von beiden Seiten, erhielten wir damit das Resultat durch eine entsprechende Rechnung wie oben, unter der Voraussetzung, daß  $(S \otimes S^\nu) \otimes_{S^\mu \otimes S^\nu} \mathbb{V}Y \cong \mathbb{V}\theta_{(\mu,\nu)}^{(\lambda,\nu)}Y$  als  $S \otimes S^\nu$ -Bimoduln für  $Y = P$  und  $Y = Q$  gilt.

Dazu nehmen wir an, daß es ein  $X \in {}_\mu\mathcal{H}_\lambda$  gibt, mit  $\theta_{(\mu,\lambda)}^{(\mu,\nu)}X \cong Y$ . Dies ist keine große Einschränkung, da wir notfalls statt  $Y$  eine direkte Summe  $Y \oplus \dots \oplus Y$  nehmen können, was an unserem Dimensionsargument nichts ändert.

Wir erhalten damit folgende Isomorphismen als  $S \otimes S^\nu$ -Bimoduln:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\theta_{(\mu,\nu)}^{(\lambda,\nu)}Y &\cong \mathbb{V}\theta_{(\mu,\nu)}^{(\lambda,\nu)}\theta_{(\mu,\lambda)}^{(\mu,\nu)}X \\ &\cong \mathbb{V}\theta_{(\lambda,\lambda)}^{(\lambda,\nu)}\theta_{(\mu,\lambda)}^{(\lambda,\lambda)}X \\ &\cong \text{res}_{(\lambda,\nu)}^{(\lambda,\lambda)}((S \otimes S) \otimes_{(S^\mu \otimes S)} \mathbb{V}X) \\ &\cong (S \otimes S^\nu) \otimes_{(S^\mu \otimes S^\nu)} \text{res}_{(\mu,\nu)}^{(\mu,\lambda)}\mathbb{V}X \\ &\cong (S \otimes S^\nu) \otimes_{(S^\mu \otimes S^\nu)} \mathbb{V}\theta_{(\mu,\lambda)}^{(\mu,\nu)}X \\ &\cong (S \otimes S^\nu)_{(S^\mu \otimes S^\nu)} \mathbb{V}Y. \end{aligned}$$

Dabei wird im ersten Isomorphismus nur die Definition von  $X$  benutzt. Für den zweiten Isomorphismus verende man, daß man jede Verschiebung als Komposition einer Rechts- und einer Linksverschiebung schreiben kann. Genauer heißt das:  $\theta_{(\lambda,\lambda')}^{(\mu,\mu')} \cong \theta_{(\lambda,\mu')}^{(\mu,\mu')} \theta_{(\lambda,\lambda')}^{(\lambda,\mu')} \cong \theta_{(\mu,\lambda)}^{(\mu,\lambda)} \theta_{(\lambda,\lambda')}^{(\mu,\lambda')}$  als Funktoren von  ${}_\lambda\mathcal{H}_{\lambda'}$  nach  ${}_\mu\mathcal{H}_{\mu'}$  für beliebige ganze Gewichte  $\lambda, \lambda', \mu$  und  $\mu'$ .

Für den dritten Isomorphismus benutzen wir Lemma 2.6.6 und dann Lemma 2.6.7. Im nächsten Schritt machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß die Rechts- und Linksbimoduloperationen vertauschen. Zuletzt verwenden wir nochmals Lemma 2.6.6. Mit der Definition von  $X$  folgt die Aussage für  $Y$  und damit die gesamte Behauptung.

Nun sei wiederum  $I \subset \mathcal{U}$  ein Ideal mit endlicher  $Z$ -Kodimension. Insbesondere können wir  $I = \mathcal{U}(\ker \chi_\lambda)^i$  für ein beliebiges dominantes Gewicht  $\lambda$  wählen. Dann gelten die folgenden Verallgemeinerungen von [So3] für die Gelfand-Kirillov-Dimensionen. Als Quelle für die Standardaussagen gelte wiederum [Ja2]. Sie dienen als Vorbereitung zum Beweis des Satzes 2.6.13, der besagt, daß  $\mathbb{V}$  mit Tensorproduktbildung vertauscht.

**Lemma 2.6.10.** *Sei  $X \in \mathcal{H}^I, Y \in {}^I\mathcal{H}$ . Dann gilt*

$$\text{GKdim } X \geq \text{GKdim } (X \otimes_{\mathcal{U}} Y) \leq \text{GKdim } Y.$$

*Beweis:* Offensichtlich ist  $\text{RAnn}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) \supseteq \text{RAnn } Y$ . Aufgrund des Beweises von Satz 2.2.1 Teil 4 existiert ein endlichdimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul  $E$  mit einer Surjektion

$$E^l \otimes \mathcal{U} / \text{RAnn}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) \twoheadrightarrow X \otimes_{\mathcal{U}} Y.$$

Also gilt ([Ja2, 8.6])

$$\text{GKdim } (X \otimes_{\mathcal{U}} Y) \leq \text{GKdim } (E^l \otimes \mathcal{U} / \text{RAnn}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y)).$$

Andererseits existiert nach [Ja2, 6.11] eine Injektion  $\mathcal{U}/\text{RAnn}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) \hookrightarrow E^{*l} \otimes X \otimes_{\mathcal{U}} Y$ . Somit erhalten wir  $\text{GKdim}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) = \text{GKdim}(E^l \otimes \mathcal{U}/\text{RAnn}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y))$ . Insgesamt ergibt das (vgl. [Ja2, 8.8 und 10.3])

$$\text{GKdim}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) = \text{GKdim}(\mathcal{U}/\text{RAnn}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y)) \leq \text{GKdim}(\mathcal{U}/\text{RAnn} Y) = \text{GKdim} Y.$$

Die andere Ungleichung gilt natürlich völlig analog.  $\diamond$

**Lemma 2.6.11.** *Sei  $X \in \mathcal{H}^I, Y \in {}^I\mathcal{H}$ . Dann gilt*

$$\text{GKdim} X \geq \text{GKdim} \text{Tor}_j(X, Y) \leq \text{GKdim} Y.$$

*Beweis:* Für  $j=0$  ist das gerade Lemma 2.6.10. Wählt man nun eine projektive Auflösung  $\mathbf{P}^\bullet$  von  $Y$  in  ${}^I\mathcal{H}$ , dann ist  $\text{Tor}_j(X, Y) = \text{H}_j(X \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{P}^\bullet)$ . Man erhält  $\text{GKdim}(\text{Tor}_i(X, Y)) \leq \text{GKdim}(X \otimes_{\mathcal{U}} P^j) \leq \text{GKdim}(X)$  und natürlich Analoges für  $Y$ .  $\diamond$

**Lemma 2.6.12.** *Seien  $\lambda$  und  $\mu$  dominante ganze Gewichte. Sei  ${}_{\lambda}L_{\mu}$  der einfache Bimodul in  ${}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}$  mit maximaler Gelfand-Kirillov-Dimension. Dann gilt für  $\lambda, \mu, \nu$  ganz und dominant*

$$\mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}) \cong \mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\nu}).$$

*Beweis:* Sei zuerst  $\lambda = \mu$ , dann ist  ${}_{\lambda}L_{\mu} = \text{soc}(\mathcal{U}/\mathcal{U} \ker \chi_{\lambda}) \subseteq \mathcal{U}/\mathcal{U} \ker \chi_{\lambda}$ . Sei  $K$  der Kokern dieser Inklusion. Der Funktor  $\cdot \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}$  liefert die exakte Sequenz

$$\text{Tor}_1(K, {}_{\mu}L_{\nu}) \rightarrow {}_{\lambda}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu} \rightarrow \underbrace{\mathcal{U}/\mathcal{U} \ker \chi_{\lambda} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}}_{\cong {}_{\lambda}L_{\nu}} \twoheadrightarrow K \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}.$$

Wendet man darauf den exakten Funktor  $\mathbb{V}$  an, erhält man eine exakte Sequenz der Form

$$\mathbb{V} \text{Tor}_1(K, {}_{\mu}L_{\nu}) \rightarrow \mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}) \rightarrow \mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\nu}) \twoheadrightarrow \mathbb{V}(K \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}).$$

Es gilt nach Lemma 2.6.11 aber  $\mathbb{V} \text{Tor}_1(K, {}_{\mu}L_{\nu}) = 0$ , da in  $K$  nur einfache Moduln mit nichtmaximaler Gelfand-Kirillov-Dimension vorkommen. Ebenso gilt  $\mathbb{V}(K \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}) = 0$  nach Lemma 2.6.10. Das ergibt den behaupteten Isomorphismus.

Verschiebung auf die Wand liefert dann auch einen entsprechenden Isomorphismus für  $\lambda = -\rho$ . Für  $-\rho \neq \lambda \neq \mu$  betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{comp} : \mathcal{L}(\Delta(\mu), \Delta(w_o \cdot \lambda)) \otimes_{\mathcal{U}} \mathcal{L}(\Delta(v), \Delta(w_o \cdot \mu)) &\rightarrow \mathcal{L}(\Delta(v), \Delta(w_o \cdot \lambda)) \\ f \otimes g &\mapsto f \circ i \circ g, \end{aligned}$$

wobei  $i$  die Inklusion des Sockels  $\Delta(w_o \cdot \mu)$  in  $\Delta(\mu)$  bezeichnet. Die Wohldefiniertheit folgt direkt aus den Definitionen der Operationen und [Ja2, 6.8 (6)]. Es ist sogar ein nichttrivialer  $\mathcal{U}$ -Bimodulmorphismus, also surjektiv. Das liefert dann eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}) \twoheadrightarrow \mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\nu}),$$

und es reicht somit aus, die Dimensionen zu vergleichen. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{V}({}_{\lambda}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu}) &= [{}_{\lambda}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu} : {}_{\lambda}L_{\nu}] \\ &= [{}_{-\rho}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu} : {}_{-\rho}L_{\nu}] \\ &\leq [{}_{\mu}L_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}L_{\nu} : {}_{\mu}L_{\nu}] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das ergibt somit die Behauptung für beliebige dominante ganze Gewichte  $\lambda, \mu$  und  $\nu$ .  $\diamond$

Zuletzt zeigen wir noch (vgl. [So3, Proposition 13]), daß der Funktor mit Tensorieren vertauscht. Sei  $(\otimes_{\mathcal{U}})$  der Bifunktor  $\mathcal{H}^I \times {}^I\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , der zwei Bimoduln über  $\mathcal{U}$  miteinander tensoriert. Analog sei  $(\otimes_{\mathcal{Z}})$  für  $\mathcal{Z}$ -Bimoduln definiert.

**Satz 2.6.13.** *Seien  $\lambda, \mu, \nu$  dominant ganz. Dann erhalten wir eine natürliche Äquivalenz von Bifunktoren*

$$(\otimes_{\mathcal{Z}})(\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \cong \mathbb{V}(\otimes_{\mathcal{U}}) : {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu} \times {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu} \longrightarrow {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\nu}.$$

*Beweis:* Wir konstruieren induktiv eine natürliche Transformation.

Definition der natürlichen Transformation:

Sei zuerst  $\mu = \nu$ . Wir wählen nichttriviale Morphismen  $f_{\lambda, \mu} : {}^1_{\lambda}P_{\mu} = {}_{\lambda}P_{\mu} \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda))$  und  $f_{\mu, \mu} : {}^1_{\mu}P_{\mu} = {}_{\mu}P_{\mu} \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(\mu), \Delta(\mu))$ . Das liefert aufgrund der Projektivität von  ${}_{\lambda}P_{\mu}$  und der Gestalt des Sockels von  $\mathcal{L}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda))$  eine Abbildung  $\phi = \phi^1(\lambda, \mu, \mu)$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & {}_{\lambda}P_{\mu} \\ & \nearrow \phi & \downarrow f_{\lambda, \mu} \\ {}_{\lambda}P_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}_{\mu}P_{\mu} & \xrightarrow{f_{\lambda, \mu} \otimes f_{\mu, \mu}} & \mathcal{L}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)) \otimes_{\mathcal{U}} \mathcal{U} / \ker \chi_{\mu} = \mathcal{L}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)) \end{array} \quad (2.9)$$

kommutiert. Schließlich können wir wiederum mit universellen Eigenschaften induktiv Abbildungen  $\phi^n = \phi^n(\lambda, \mu, \mu)$  definieren, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc} & \longrightarrow & {}^n_{\lambda}P_{\mu} & \xrightarrow{pr_n} & {}^{n-1}_{\lambda}P_{\mu} & & \\ & & \vdots & & \vdots & \searrow & \\ \dots & & \phi^n & & \phi^{n-1} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & \longrightarrow & {}^n_{\lambda}P_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}^n_{\mu}P_{\mu} & \xrightarrow{pr_n \otimes pr_n} & {}^{n-1}_{\lambda}P_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}^{n-1}_{\mu}P_{\mu} & \longrightarrow & {}_{\lambda}L_{\mu} \end{array} \quad (2.10)$$

Verschiebung zum singulären Punkt liefert dann eine nichttriviale Abbildung  $\theta_{(\lambda, \mu)}^{(\lambda, -\rho)} f_{\lambda, \mu}$ . Wir können sie auf einen geeigneten direkten Summanden  ${}^1_{\lambda}P_{-\rho}$  zu einer nichttrivialen Abbildung  $f_{\lambda, -\rho} : {}^1_{\lambda}P_{-\rho} \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(-\rho), \Delta(\lambda))$  einschränken und erhalten eine nichttriviale Abbildung  ${}^1_{\lambda}P_{\mu} \otimes_{\mathcal{U}} {}^1_{\mu}P_{-\rho} \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(-\rho), \Delta(\lambda))$ . Aufgrund der Projektivität und der Gestalt des Sockels von  $\mathcal{L}(\Delta(-\rho), \Delta(\lambda))$  liefert das wiederum eine Abbildung  $\phi^1(\lambda, \mu, -\rho)$ , so daß ein (2.9) entsprechendes Diagramm kommutiert. Analog zu (2.10) liefert das dann auch Morphismen  $\phi^n(\lambda, \mu, -\rho)$ .

Für den allgemeinen Fall definieren wir

$$\phi^n(\lambda, \mu, \nu) := \theta_{(\lambda, -\rho)}^{(\lambda, \nu)} \phi^n(\lambda, \mu, -\rho).$$

Insgesamt liefert das für  $X \in {}_{\lambda}\mathcal{H}_{\mu}$  und  $Y \in {}_{\mu}\mathcal{H}_{\nu}$  eine natürliche Transformation  $\phi_{X, Y}$  durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(X) \otimes \mathbb{V}(Y) & \xrightarrow{\phi_{X, Y}} & \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) \\ \{f_n\} \otimes \{g_n\} & \mapsto & \{f_n \otimes g_n \circ \phi^n(\lambda, \mu, \nu)\}. \end{array} \quad (2.11)$$

Die dafür notwendigen kommutativen Diagramme folgen direkt aus den Definitionen. Die Verträglichkeit mit der Operation des Zentrums überprüft man ebenfalls direkt ohne größere Mühe.

Nun bleibt noch die Bijektivität zu zeigen.

Surjektivität: Für die Surjektivität können wir uns auf einfache Bimoduln beschränken. Denn sei  $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$  exakt, dann erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{V}(X') \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}(Y) & \xrightarrow{\mathbb{V}(f) \otimes id} & \mathbb{V}(X) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}(Y) & \xrightarrow{\mathbb{V}(g) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}(id)} & \mathbb{V}(X'') \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}(Y) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \phi_{X,Y} & & \downarrow \phi_{X,Y} & & \downarrow \phi_{X,Y} & & \\
\mathbb{V}(X' \otimes_{\mathcal{U}} Y) & \xrightarrow{\mathbb{V}(f \otimes id)} & \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) & \xrightarrow{\mathbb{V}(g \otimes id)} & \mathbb{V}(X'' \otimes_{\mathcal{U}} Y) & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.12}$$

mit exakten Zeilen. Nehmen wir nun an, daß die beiden äußeren vertikalen Abbildungen surjektiv sind, erhalten wir mit dem Fünferlemma die Surjektivität der mittleren Abbildung. Analoges gilt natürlich für Tensorieren von der anderen Seite.

Für  $(X, Y) \neq (\lambda L_{\mu}, \mu L_{\nu})$  liefert Lemma 2.6.10 die Behauptung. Für  $(X, Y) = (\lambda L_{\mu}, \mu L_{\nu})$  folgt sie mit Lemma 2.6.12.

Injektivität: Für die Injektivität nehmen wir zuerst an, daß  $X \in {}_{\lambda} \mathcal{H}_{\mu}^i$  projektiv ist. Es sei  $J = (\ker \chi_{\mu})^i \subseteq \mathcal{Z}$ . Dann ist  $X$  nach Satz 2.2.1 ein projektiver  $\mathcal{U}/\mathcal{U}J$ -Rechtsmodul. Damit ist also der Funktor  $\mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} \bullet)$  exakt. Wir werden nun mit Induktion über die Länge von  $Y$  argumentieren. Wir überprüfen daher zuerst die Aussage für einfache Moduln  $Y$ . Wir unterscheiden die beiden Fälle:

$Y \neq {}_{\mu} L_{\nu}$ : Dann ist  $\mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) = 0$  nach Lemma 2.6.10 und  $\mathbb{V}(X) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}(Y)$  ist offensichtlich ebenfalls trivial.

$Y = {}_{\mu} L_{\nu}$ : Sei zuerst  $\mu = \nu$ . Für  $\kappa = \ker \chi_{\mu}$  gilt dann  $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(\mathcal{U}/\kappa\mathcal{U})$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y) &= \dim \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} \mathcal{U}/(\kappa\mathcal{U})) \\
&= \dim \mathbb{V}(X/X\kappa) \\
&= \dim \mathbb{V}X - \dim \mathbb{V}(X\kappa) \\
&= \dim \mathbb{V}X - \dim((\mathbb{V}X)\kappa) \\
&= \dim \mathbb{V}X/((\mathbb{V}X)\kappa) \\
&= \dim \mathbb{V}X \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}/\kappa \\
&= \dim \mathbb{V}X \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}Y,
\end{aligned}$$

wobei wir für die erste Gleichung das Lemma 2.6.10 und für die vierte Gleichheit nur die Operation des Zentrums auf  $\mathbb{V}X$  verwendet haben. Für  $\nu = -\rho$  folgt die Gleichheit der Dimensionen durch Verschieben (von rechts). Damit folgt dann auch einfach die Aussage für beliebiges ganzes  $\nu$ .

Nun ist der Funktor  $\mathbb{V}X \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}(\bullet)$  zumindest rechtsexakt. Sei  $M \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow N$  eine kurze exakte Sequenz mit  $M, N \neq 0$ . Somit stimmt nach Induktionsannahme die Behauptung

für  $M$  und  $N$  und wir erhalten

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{V}X \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}Y) &\leq \dim(\mathbb{V}X \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}M) + \dim(\mathbb{V}X \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbb{V}N) \\ &= \dim \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} M) + \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} N) \\ &= \dim \mathbb{V}(X \otimes_{\mathcal{U}} Y)\end{aligned}$$

Da alle Räume endlichdimensional sind, folgt damit die Bijektivität. Für beliebiges  $X$  wähle man eine projektive Präsentation von  $X$ .

◇

## KAPITEL

### 3

# Hauptserien, Vervollständigung und Dualität

*In diesem Kapitel führen wir die sogenannten Hauptserien ein und wiederholen die wichtigsten Resultate über Vervollständigung im Sinne von [Jo5].*

*Mit Hilfe dieser Ergebnisse erhalten wir als erstes Resultat, daß das Duale einer Hauptserie wiederum eine solche ist. Das Hauptresultat dieses Kapitels beschreibt die Homomorphismen und Erweiterungen zwischen Hauptserien. Insbesondere erhalten wir die Unzerlegbarkeit aller Hauptserien. Diese kann jedoch auch ohne Verwendung der Vervollständigungsverfaktoren gezeigt werden (siehe Lemma 3.3.1). Als Folgerung daraus erhalten wir die Existenz sogenannter „getwisteter Kippmoduln“ und ihre Charakterformeln.*

*Alle Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich ohne Probleme auch auf singuläre ganze Gewichte übertragen.*

## 3.1 Hauptserien und Josephs Vervollständigungsverfaktoren

Wir wollen im folgenden Abschnitt kurz die Zusammenhänge zwischen Josephs Vervollständigungsverfaktoren und unseren Hauptserien beschreiben.

Wir fassen zuerst die für uns wesentlichen Aussagen von [Jo5] und [Jo4] nochmals zusammen. Wir bezeichnen für Weylgruppenelemente  $x$  und  $y$  und ein dominantes Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\mathcal{P}_{(x \cdot \lambda, y \cdot \lambda)}$  die Hauptserie  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot \lambda), \nabla(y \cdot \lambda))$ . Falls  $\lambda = 0$  schreiben wir einfach  $\mathcal{P}_{(x, y)}$  und statt  $\mathcal{P}_{(x, x)}$  einfach  $\mathcal{P}_x$ .

**Definition 3.1.1.** Für  $x \in W$  ist Josephs Vervollständigungsverfaktor  $\mathbf{C}_x$  auf  $\mathcal{O}_0$  definiert durch

$$\mathbf{C}_x(M) := \mathcal{L}(\Delta(x^{-1} \cdot 0), M) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0).$$

Statt  $\mathbf{C}_{s_\alpha}$  schreiben wir meist einfach  $\mathbf{C}_\alpha$ .

Für  $M$  einen dualen Vermamodul bezeichnen wir solche Objekte aus  $\mathcal{O}$  ebenfalls als *Hauptserien*.

### Eigenschaften

1. ([Jo4, 2.2]) Der Funktor  $\mathbf{C}_x$  ist kovariant und linksexakt.
2. ([Jo5, 2.9]) Es gibt eine natürliche Äquivalenz von Funktoren  $\mathbf{C}_x \cong \mathbf{C}_{s_1} \cdots \mathbf{C}_{s_r}$ , wobei  $x = s_1 \cdots s_r$  eine reduzierte Zerlegung von  $x$  ist.
3. ([Jo5, Lemma 2.10]) Es gilt  $\mathbf{C}_x \nabla(0) \cong \nabla(x \cdot 0)$  für alle  $x \in W$ .
4. Nach Definition entspricht  $\mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(y \cdot 0)$  gerade der Hauptserie  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) = \mathcal{P}_{(x,y)}$  unter der Äquivalenz von Kategorien aus [BG]. In der Grothendieckgruppe gilt (nach [Jo5, 3.1])

$$[\mathbf{C}_x \nabla(y \cdot 0)] = [\Delta(xy \cdot 0)]$$

für alle  $x, y \in W$ . Einen Beweis dieser Tatsache findet man in [Di, 9.6.2].

5. ([Jo4, Lemma 2.5]) Für eine einfache Wurzel  $\alpha$  ist

$$\mathbf{C}_\alpha \Delta(x \cdot 0) \cong \begin{cases} \Delta(s_\alpha x \cdot 0) & \text{falls } s_\alpha x < x \\ \Delta(x \cdot 0) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Auf Vermamoduln stimmt somit Josephs Vervollständigungsverfahren mit dem von Enright definierten (siehe [E]) überein. Zusammen mit den bereits genannten Eigenschaften gilt insbesondere für alle  $y \in W$

$$\mathcal{L}(\Delta(w_\alpha \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0) \cong \Delta(w_\alpha y \cdot 0).$$

6. Die Inklusion  $\Delta(s_\alpha \cdot 0) \hookrightarrow \Delta(0)$  liefert für jede einfache Wurzel  $\alpha$  und jeden Modul  $M$  in  $\mathcal{O}_0$  eine kanonische Abbildung  $\phi_M^\alpha : M \rightarrow \mathbf{C}_{s_\alpha} M$ .
  - Wir bezeichnen mit  $\mathbf{D}_\alpha^- M$  ihr Bild. Der Kern dieser Abbildung ist (nach [Jo4, Lemma 2.4]) der größte  $\alpha$ -endliche Untermodul von  $M$ , das heißt der größte Untermodul, der nur Kompositionsfaktoren der Form  $L(x \cdot 0)$  mit  $\langle x \cdot 0, \check{\alpha} \rangle > 0$  besitzt. Wir bezeichnen  $M$  als  $\alpha$ -frei, falls die Abbildung  $\phi_M^\alpha$  injektiv ist. Insbesondere ist also jeder Vermamodul  $\alpha$ -frei.  
Man beachte, daß diese Definition nicht mit der in [Ja2] übereinstimmt.
  - Wir nennen  $M$   $\alpha$ -cofrei, falls  $M^*$   $\alpha$ -frei ist und setzen  $\mathbf{D}_\alpha^+ M := (\mathbf{D}_\alpha^-(M^*))^*$ . Insbesondere ist also jeder duale Vermamodul  $\alpha$ -cofrei.
7. Der Vektorraumisomorphismus  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N^*) \cong (N \otimes M)^*$  induziert (vgl. [Ja2, 6.8 (11)]) einen Isomorphismus  $\mathcal{L}(M, N)^\eta \cong \mathcal{L}(N^*, M^*)$  für alle Moduln  $M$  und  $N$  aus  $\mathcal{O}$ .

## 3.2 Hauptserien und ihre dualen Hauptserien

Wir wollen nun zeigen, daß das Duale einer Hauptserie wiederum eine Hauptserie ist. Genauer gilt der folgende

### Hauptsatz 3.2.1 (Dualitätssatz).

Für alle Weylgruppenelemente  $x$  gibt es einen Isomorphismus von Harish-Chandra-Bimoduln

$$\mathcal{P}_{(x,y)}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{(w_\alpha x, w_\alpha y)}.$$

*Beweis:* Der Beweis läuft durch Induktion über die Länge von  $x$ .

Sei nun  $x = e$  und  $z = w_o y$ . Außerdem definieren wir  $a$  und  $b \in W$  durch  $w_o = az$  und  $b = aw_o$ . Dann erhalten wir die folgenden Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(w_o, w_o y)} &= \mathcal{L}(\Delta(w_o \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0)) \\ &\cong \mathcal{L}(\Delta(a^{-1}b \cdot 0), \nabla(z \cdot 0)) \cong \mathcal{L}(\Delta(0), \mathbf{C}_{b^{-1}} \mathbf{C}_a \nabla(z \cdot 0)) \\ &\cong \mathcal{L}(\Delta(0), \mathbf{C}_{b^{-1}} \nabla(az \cdot 0)) \cong \mathcal{L}(\Delta(0), \mathbf{C}_{b^{-1}} \Delta(w_o \cdot 0)) \\ &\cong \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(b^{-1}w_o \cdot 0)) \cong \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(y \cdot 0)) \\ &= \mathcal{P}_{(e, y)}^* \end{aligned}$$

da  $b^{-1}w_o = w_o^{-1}a^{-1}w_o = w_o^{-1}z = y$  gilt. Das liefert den Induktionsanfang.

Für eine einfache Spiegelung  $s$  mit  $xs > x$  liefert die exakte Sequenz

$$\Delta(x \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s \Delta(x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(xs \cdot 0)$$

für alle  $y \in W$  (wegen Eigenschaft 4 des vorherigen Abschnitts) eine exakte Sequenz

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))}_{:=A} \xleftarrow{\text{can}} \underbrace{\theta_s^r \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))}_{:=B} \leftarrow \underbrace{\mathcal{L}(\Delta(xs \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))}_{:=\mathcal{P}_{(xs, y)}} \leftarrow 0. \quad (3.2)$$

(Für den mittleren Term siehe man Lemma 2.6.5.) Andererseits liefert die exakte Sequenz

$$\Delta(w_o xs \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s \Delta(w_o x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(w_o x \cdot 0)$$

die exakte Sequenz

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathcal{L}(\Delta(w_o xs \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0))}_{\mathcal{P}_{(w_o xs, w_o y)}} \leftarrow \underbrace{\theta_s^r \mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0))}_{:=D} \xleftarrow{\text{can}} \underbrace{\mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0))}_{:=C} \leftarrow 0.$$

Nach Induktionsannahme existiert ein Isomorphismus  $\psi : C^* \xrightarrow{\sim} A$ . Nun vertauscht (mit [Ja2, 6.8 und 4.12]) die Dualisierung mit der Verschiebung, das heißt wir können einen Isomorphismus  $\beta : D^* = (\theta_s C)^* \cong \theta_s C^*$  wählen. Das liefert einen Isomorphismus  $\tilde{\psi} = \theta_s \psi \circ \beta : D^* \xrightarrow{\sim} \theta_s^r A = B$ . Wir erhalten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & A & \xleftarrow{\text{can}} & B & \longleftarrow & \mathcal{P}_{(xs, y)} \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow \psi & & \uparrow \tilde{\psi} & & \\ 0 & \longleftarrow & C^* & \xleftarrow{\text{can}^*} & D^* & \longleftarrow & \mathcal{P}_{(w_o xs, w_o y)}^* \longleftarrow 0 \end{array} \quad (3.3)$$

Man kann durch etwas aufwendige Rechnungen zeigen, daß dieses Diagramm sogar kommutiert und einen Isomorphismus zwischen den Kernen liefert. Für unseren Fall reicht es jedoch aus, daß auf der rechten Seite jeweils Kerne der kanonischen Abbildung stehen, diese also isomorph sind. (Siehe auch Bemerkung 3.2.3 b.)  $\diamond$

Das folgende Lemma ist eigentlich ein Korollar aus dem Hauptsatz. Es ist allerdings das zentrale Hilfsmittel zum Beweis des Homomorphismensatzes.

Wir geben zwei Argumente an, die dieses Lemma beweisen. Das erste ist rein kombinatorisch und unabhängig vom Hauptsatz, aber läßt wohl den eigentlichen Grund der Aussage nicht erkennen. Das zweite geht eher auf die Definitionen zurück und verwendet neben dem Hauptsatz, daß ein durch  $\mathbf{C}_\alpha$  vervollständigter Modul stets  $\alpha$ -frei ist.

**Lemma 3.2.2.** *Seien  $x, y \in W$  und  $M := \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0) \in \mathcal{O}_0$  die zugehörige Hauptserie. Dann ist für jede einfache Spiegelung  $s = s_\alpha$  mit  $xs > x$  der Modul  $M$  stets  $\alpha$ -cofrei.*

*Beweis:* Das folgt direkt aus [Jo5, 2.2] unter Verwendung der Charakterformeln für Hauptserien. Denn mit den Bezeichnungen aus [Jo5] gilt für  $M := \mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(y \cdot 0)$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_\alpha^+ M] &= -[\mathbf{C}_\alpha M] + [M] + s[M] \\ &= -[\Delta(sx^{-1}y \cdot 0)] + [\Delta(x^{-1}y \cdot 0)] + [\Delta(s(x^{-1}y) \cdot 0)] \\ &= [\Delta(x^{-1}y \cdot 0)] \\ &= [M] \end{aligned}$$

und nach Definition von  $\mathbf{D}_\alpha^+$  ist  $M$  somit  $\alpha$ -cofrei. Also ist die Aussage bewiesen.

Man kann es aber auch wie folgt sehen:

Wir betrachten den dualen Modul  $M^* \cong \mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0))$ . Es sei  $x < xs_1$ , also  $w_o x > w_o xs_1$ . Wir wählen eine reduzierte Zerlegung  $w_o x = s_r \cdots s_1$  mit  $s_i = s_{\alpha_i}$ . Nach Definition gilt  $M^* = \mathbf{C}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{C}_{\alpha_r} \nabla(w_o y \cdot 0)$ . Insbesondere (siehe [Jo5, 3.2]) ist dieser Modul  $\alpha_1$ -frei, also ist  $M$  selbst  $\alpha_1$ -cofrei. Das ist gerade die Behauptung.  $\diamond$

**Bemerkung 3.2.3.**

- a.) Wir können mit einem Isomorphismus von  $\mathcal{P}_{w_o xs, w_o z}$  in das Duale von  $\mathcal{P}_{xs, z}$  einen entsprechenden Isomorphismus von  $\mathcal{P}_{w_o x, w_o z}$  in das Duale von  $\mathcal{P}_{x, z}$  für  $xs > x$  auch expliziter angeben. Aufgrund der Definitionen gilt:

$$\left( \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(z \cdot 0)) \right)^* \cong \left( \mathcal{L}(\Delta(0), \mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(z \cdot 0)) \right)^* \cong \mathcal{L}(\Delta(0), (\mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(z \cdot 0))^*)$$

Definieren wir nun  $y = w_o x$ , dann erhalten wir mit [Jo5, 2.6] und Lemma 3.2.2

$$\mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(z \cdot 0) \cong (\mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s \mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(z \cdot 0))^*)^*,$$

also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta(0), (\mathbf{C}_{x^{-1}} \nabla(z \cdot 0))^*) &\cong \mathcal{L}(\Delta(0), \mathbf{C}_s (\mathbf{C}_{xs^{-1}} \nabla(z \cdot 0))^*) \\ &\cong \mathcal{L}(\Delta(s \cdot 0), \mathbf{C}_{(w_o xs)^{-1}} \nabla(w_o z \cdot 0)) \\ &\cong \mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o z \cdot 0)). \end{aligned}$$

- b.) Im nächsten Kapitel wird unabhängig von Hauptsatz 3.2.1 gezeigt, daß das Diagramm (3.3) im Beweis des Hauptsatzes 3.2.1 (bis auf einen Skalar) kommutiert, da der entsprechende Morphismenraum eindimensional ist.
- c.) Die Art des Beweises von Hauptsatz 3.2.1 zeigt, daß die Aussage des Hauptsatzes nicht direkt auf der Definition der Vervollständigungsfunktoren basiert, sondern vielmehr auf der Existenz einer exakten Sequenz der Form (3.2). Der entsprechende abstrakte Kontext

wird schön in [AL] beschrieben. Andererseits ermöglicht es die Beschreibung der Hauptserien als semiinduzierte Moduln (siehe ebenfalls [AL]) oder auch als geometrische Objekte. Dabei bedeutet letzteres die Beschreibung der Hauptserien als lokale Kohomologiegruppen von Linienbündeln auf der Fahnenmannigfaltigkeit (siehe [AL]) oder auch direkt als  $\mathcal{D}$ -Moduln unter Verwendung der geometrischen Beschreibung der Verschiebungsfunktoren, wie sie beispielsweise in [BGi] zu finden ist.

d.) Die Argumente gelten völlig entsprechend auch für singuläre ganze Gewichte.

### 3.3 Endomorphismenringe und Selbsterweiterungen der Hauptserien

In diesem Abschnitt wollen wir einige Endomorphismenringe und Selbsterweiterungen von Hauptserien bestimmen. Ein erster Schritt in diese Richtung ist die Unzerlegbarkeit der Hauptserien. Obwohl dies anscheinend eine wohlbekannte Tatsache ist, war ein Beweis in der Literatur nicht aufzufinden.

Deshalb zeigen wir zuerst folgendes

**Lemma 3.3.1.** *Alle Hauptserien  $\mathcal{P}_{x,y}$  (mit  $x, y \in W$ ) sind unzerlegbar.*

*Beweis:* Betrachten wir wiederum zu  $x \in W$  eine Sequenz der Form (3.2), vertauschen via  $\eta$  die Links- und Rechtsstruktur und wenden darauf unseren Funktor nach  $\mathcal{O}$  an. Schließlich schreiben wir die erhaltene Sequenz einfach als  $A \hookrightarrow \theta_s A \twoheadrightarrow B$ .

Nehmen wir nun an,  $A$  sei zerlegbar, dann ist es auch  $B$ . Denn sei  $A = C \oplus D$ . Da die Inklusion der Identität auf dem auf die Wand geschobenen Modul  $A$  entspricht, liefert diese direkte Summenzerlegung zwei exakten Sequenzen der Form

$$\begin{aligned} C &\hookrightarrow \theta_s C &\twoheadrightarrow \text{coker}_1 \\ D &\hookrightarrow \theta_s D &\twoheadrightarrow \text{coker}_2. \end{aligned}$$

mit  $\text{coker}_1 \oplus \text{coker}_2 \cong B$ . Nehmen wir nun an,  $B$  sei unzerlegbar und sei  $\text{coker}_1 = 0$ . Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

- I.) Es gibt kein  $x \in W$  mit  $xs > x$  und  $[C : L(xs \cdot 0)] \neq 0$ . Dann ist aber  $\theta_s C = 0$ , was zum Widerspruch führt.
- II.) Es gibt ein  $x \in W$  mit  $xs > x$  und  $[C : L(xs \cdot 0)] \neq 0$ . Der Einfachheit halber wählen wir  $x$  maximal. Dann gilt aber  $[\theta_s C : L(xs \cdot 0)] = 2[C : L(xs \cdot 0)]$ .

Damit folgt die Zerlegbarkeit von  $B$ . Induktiv erhalten wir (da alle Vermamoduln unzerlegbar sind) die gesuchte Aussage.  $\diamond$

Eine stärkere Aussage als die Lokalität der Endomorphismenringe liefert der folgende Hauptsatz. Zu dessen Beweis benötigen wir das zentrale

**Lemma 3.3.2.** *Sei  $\alpha$  eine einfache Spiegelung. Sei  $f : M \rightarrow N$  ein Morphismus ungleich Null in  $\mathcal{O}_0$ , wobei  $M$  ein  $\alpha$ -cofreier Modul ist. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\mathbf{C}_\alpha f : \mathbf{C}_\alpha M \rightarrow \mathbf{C}_\alpha N$$

*nicht trivial.*

*Beweis:* Der Vervollständigungsfunktor ist linksexakt. Deshalb liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker f \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \operatorname{im} f \rightarrow 0$$

(unter Verwendung von [Jo4, 3.4]) eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbf{C}_\alpha \ker f \hookrightarrow \mathbf{C}_\alpha M \xrightarrow{\mathbf{C}_\alpha f} \mathbf{C}_\alpha \operatorname{im} f \twoheadrightarrow X \rightarrow 0.$$

Wir müssen zeigen, daß  $\mathbf{C}_\alpha \ker f \neq \mathbf{C}_\alpha M$  gilt. Nehmen wir Gleichheit an, also

$$\mathbf{C}_\alpha \ker f = \mathbf{C}_\alpha M, \tag{3.4}$$

und betrachten wir (siehe [Jo5, 3.2]) die folgenden zwei exakte Sequenzen:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{C}_\alpha \ker f \hookrightarrow \mathbf{C}_\alpha^2 \ker f &\longrightarrow \mathbf{D}_\alpha^+ \ker f \twoheadrightarrow \mathbf{D}_\alpha \ker f \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbf{C}_\alpha M \hookrightarrow \mathbf{C}_\alpha^2 M &\longrightarrow \mathbf{D}_\alpha^+ M \twoheadrightarrow \mathbf{D}_\alpha M \rightarrow 0, \end{aligned}$$

wobei der Funktor  $\mathbf{D}_\alpha$  die Komposition der Funktoren  $\mathbf{D}_\alpha^+ \mathbf{C}_\alpha$  nach [Jo4, 3.6] ist. Somit erhalten wir aufgrund unserer Annahme (3.4) die folgende Gleichheit:  $\mathbf{D}_\alpha^+ \ker f = \mathbf{D}_\alpha^+ M$ . Andererseits ist  $M$  aber  $\alpha$ -cofrei, also  $M = \mathbf{D}_\alpha^+ M$ , und  $\mathbf{D}_\alpha^+ \ker f$  ist nach Definition eine Teilmenge von  $\ker f$ . Weil  $f$  nichttrivial ist, ist die Teilmenge echt in  $M$  enthalten. Damit erhalten wir aber einen Widerspruch und somit ist  $\mathbf{C}_\alpha f$  nicht die Nullabbildung.  $\diamond$

Das Lemma 3.2.2 sichert die Existenz „genügend vieler“  $\alpha$ -cofreier Moduln und macht das vorhergehende Lemma zu einem starken Hilfsmittel.

Mit diesen Ergebnissen können wir nun Endomorphismen und einige spezielle Homomorphismenräume von Hauptserien bestimmen. Es stellt sich insbesondere heraus, daß sie sich in diesen Fällen in der Tat wie Vermamoduln verhalten.

### Hauptsatz 3.3.3 (Homomorphismensatz).

Seien  $x, y \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung, so daß  $y > ys$ . Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A &:= \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)), \\ B &:= \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0)). \end{aligned}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

a.)  $\operatorname{End}_{\mathcal{H}}(A) = \operatorname{End}_{\mathcal{H}}(B) = \mathbb{C}$ .

*Inbesondere haben alle Hauptserien eindimensionale Endomorphismenringe.*

b.)  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$ .

*Für  $x = w_o$  bedeutet das gerade  $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(w_o y \cdot 0), \Delta(w_o ys \cdot 0)) = 0$ .*

c.)  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, \theta_s A) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, \theta_s B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(B, \theta_s A) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(B, \theta_s B) = \mathbb{C}$ .

d.)  $\dim \operatorname{End}_{\mathcal{H}}(\theta_s A) = \dim \operatorname{End}_{\mathcal{H}}(\theta_s B) = 2$ .

e.)  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(B, A) = \mathbb{C}$ .

*Für  $x = w_o$  bedeutet das gerade  $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(w_o ys \cdot 0), \Delta(w_o y \cdot 0)) = \mathbb{C}$ .*

f.) Die Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{can}} \theta_s A \xrightarrow{\text{can}} B \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

spaltet nicht in  $\mathcal{H}$ .

g.) Für  $tx < x$  mit einer einfachen Spiegelung  $t$  gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_{tx}) = \mathbb{C}.$$

*Beweis:* a.) Ist  $x = w_o$ , dann entsprechen  $A$  und  $B$  nach Eigenschaft 5 in Abschnitt 3.1 einem Vermamodul und die Aussagen sind wohlbekannt. Andernfalls gilt nach (eventuell mehrmaligem Anwenden von) Lemma 3.3.2 für beliebiges  $z \in W$

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(z \cdot 0))) &\hookrightarrow \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathcal{L}(\Delta(w_o \cdot 0), \nabla(z \cdot 0))) \\ &= \text{End}_{\mathcal{O}}(\Delta(w_o z \cdot 0)) = \mathbb{C} \end{aligned}$$

Das ergibt die Behauptung.

b.) Wäre die Aussage falsch, erhielten wir mit einer Schlußweise wie oben eine nichttriviale Abbildung vom Vermamodul  $\Delta(w_o y \cdot 0)$  in den Vermamodul  $\Delta(w_o y s \cdot 0)$ . Mit der Bedingung  $ys < y$ , also  $w_o y < w_o y s$ , erhalten wir einen Widerspruch. Deswegen besteht der fragliche Morphismenraum nur aus der Nullabbildung.

c.) Wir erhalten aus (3.5) die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \underbrace{\text{End}_{\mathcal{H}}(A)}_{\cong \mathbb{C}} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(A, \theta_s A) \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{H}}(A, B)}_{=0}$$

wobei wir bereits die beiden äußeren Terme bestimmt haben. Damit gilt die erste Aussage. Die übrigen Behauptungen folgen direkt aus  $\theta_s A \cong \theta_s B$  und der Selbstadjungiertheit der Verschiebung  $\theta_s$ .

d.) Diese Aussage ist nun offensichtlich, da  $\theta_s$  selbstadjungiert ist und die Eigenschaft  $\theta_s^2 \cong \theta_s \oplus \theta_s$  erfüllt.

e.) Betrachten wir einen (bis auf Skalar eindeutigen) Morphismus

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_{(e, ys)}, \mathcal{P}_{(e, y)}) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\nabla(ys \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)).$$

Dieser induziert mit Lemma 3.3.2 einen nichttrivialen Morphismus von  $B$  nach  $A$ . Andererseits liefert die Sequenz (3.5) auch eine Inklusion

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, A) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, \theta_s A)$$

und somit ist  $\dim \text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, A) = 1$ .

f.) Wenden wir den Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, \bullet)$  auf die gegebene Sequenz (3.5) an, liefert das mit dem bereits Bewiesenen die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, \theta_s A) \xrightarrow{\text{can}^{\circ}} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, B).$$

Damit hat aber die Identität  $\text{id} \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(B, B)$  kein Urbild unter der letzten Abbildung. Somit spaltet die Sequenz nicht.

g.) Für  $x = w_o$  entspricht das Urbild einem dominanten Vermamodul und die Aussage ist aufgrund der Charakterformeln für Hauptserien klar.

Ansonsten induziert jede nichttriviale Abbildung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_{tx})$  einen von Null verschiedenen Morphismus in  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_{(xz,x)}, \mathcal{P}_{(txz,tx)})$  für jede einfache Spiegelung  $z$  mit der Eigenschaft  $xz > x$ . Vertauscht man die Links- und Rechtsoperation von  $\mathfrak{g}$ , erhält man also  $f_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_{(x,xz)}, \mathcal{P}_{(tx,txz)})$  das nicht die Nullabbildung ist.

Wiederholt man dieses gesamte Verfahren, erhält man schließlich

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_{tx}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}_{w_o}, \mathcal{P}_{w_o a}) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(0), \mathbf{C}_{aw_o} \nabla(w_o a \cdot 0)) = \mathbb{C}$$

für eine geeignete einfache Spiegelung  $a$ . Daß es aber eine nichttriviale Abbildung zwischen den beiden besagten Räumen gibt, ist bereits bekannt ([Jo4, 4.7]).

◇

Mit Hilfe des vorangehenden Hauptsatzes erhalten wir ein neues Ergebnis, das bestätigt, daß sich die Hauptserien wie Vermamoduln verhalten. Genauer zeigen wir das Verschwinden der Selbsterweiterungen und gewisser Erweiterungen „benachbarter“ Hauptserien.

Dennoch ändert das nichts an der Tatsache, daß es gravierende Unterschiede geben kann. Zu nennen wären da beispielsweise höherdimensionale Morphismenräume zwischen einer Hauptserie und ihrer dualen oder auch die Nichtrigidität (siehe dazu Kapitel 5.2.2).

**Satz 3.3.4 (Erweiterungen von Hauptserien).**

Seien  $x$  und  $y \in W$  beliebig. Sei  $A = \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$  und  $B = \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0))$  für  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $y > ys$ .

Dann gilt für  $\tilde{A} := A \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0)$  und  $\tilde{B} := B \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0)$  bezüglich Erweiterungen in  $\mathcal{O}_0$  :

a.)  $\text{Ext}^1(\tilde{A}, \tilde{A}) = \text{Ext}^1(\tilde{B}, \tilde{B}) = 0.$

b.)  $\text{Ext}^1(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.$

c.)  $\text{Ext}^1(\tilde{A}, \theta_s \tilde{A}) = \text{Ext}^1(\tilde{B}, \theta_s \tilde{B}) = 0.$

d.)  $\text{Ext}^1(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mathbb{C}.$

Für  $x = w_o$  sind das gerade die bekannten Aussagen für Vermamoduln.

*Beweis:* a.) Sei  $A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A$  eine Erweiterung mit trivialem zentralen Charakter von rechts. Für  $x = w_o$  das längste Element ist  $\tilde{A}$  ein Vermamodul und die obige Sequenz spaltet. Sei also  $x \neq w_o$  und die Behauptung stimme für alle Weylgruppenelemente mit größerer Länge. Wir wählen eine einfache Spiegelung  $t$ , so daß  $xt > x$  und erhalten folgendes kommutierende Diagramm in  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{can} & & \uparrow & & \uparrow \text{can} & & \\ 0 & \longrightarrow & \theta_t^r A & \xrightarrow{\theta_t^r f} & \theta_t^r E & \xrightarrow{\theta_t^r g} & \theta_t^r A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die (kanonische) Abbildung in der Mitte ist surjektiv nach dem Fünferlemma. Mit dem Schlangenlemma erhalten wir die Kernsequenz

$$C := \mathcal{L}(\Delta(xt \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow \mathcal{L}(\Delta(xt \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$$

mit  $\theta_t^r E' \cong \theta_t^r E$ .

Wir bestimmen zuerst die Dimension einiger Morphismenräume. Die Kernsequenz spaltet nach Induktionsvoraussetzung. Diese Informationen liefern

$$\begin{aligned}
 \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t^r A, E) &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t^r C, E) \\
 &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(C, \theta_t^r E) \\
 &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(C, \theta_t^r E') \\
 &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t^r C, E') \\
 &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t^r C, C \oplus C) \\
 &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t \eta(C), \eta(C) \oplus \eta(C)) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

nach Hauptsatz 3.3.3 c.

Andererseits gilt  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(C, E) = 0$ , denn jeder nichttriviale Morphismus hätte sein Bild entweder im Bild von  $f$ , oder aber die Komposition mit  $g$  wäre nichttrivial. Insgesamt gäbe es also eine Abbildung von  $C$  nach  $A$ , was (nach Vertauschung der Links- und Rechtsoperation von  $\mathfrak{g}$ ) ein Widerspruch zu Hauptsatz 3.3.3 b darstellte.

Betrachten wir nun die exakte Sequenz

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, E) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t^r A, E) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(C, E),$$

so folgt insbesondere aus unseren berechneten Dimensionsformeln

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, E) = 2.$$

Kehren wir zurück zur ursprünglichen Sequenz, liefert das die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, A) \xrightarrow{f \circ} \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, E) \xrightarrow{g \circ} \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, A).$$

Betrachten wir die Dimensionen (1-2-1), so erhalten wir die Surjektivität der rechten Abbildung. Ein Urbild der Identität liefert somit den geforderten Spalt. Somit gilt die erste Behauptung.

b.) Sei

$$B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \tag{3.6}$$

eine Erweiterung mit trivialem zentralen Charakter von rechts. Sei  $0 \neq h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A, E)$ . Gilt im  $h \subseteq$  im  $f$ , erhalten wir einen Widerspruch zu Hauptsatz 3.3.3 b, also ist  $g \circ h \neq 0$  und mit Hauptsatz 3.3.3 a somit  $h$  bis auf einen Skalar der gesuchte Spalt. Wir müssen also nur noch begründen, warum es ein solches nichttriviales  $h$  gibt.

Wir wählen dazu  $t$  wie oben, wenden  $\theta_t^r$  auf (3.6) an und erhalten eine spaltende Kernsequenz

$$B' \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow A'.$$

Wir wählen einen Spalt  $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(A', E')$  und erhalten  $\theta_t^r \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\theta_t^r A', \theta_t^r E')$ . Mit einem entsprechenden Diagramm wie in Teil a.) liefert das eine nichttriviale Abbildung in  $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(A, E)$ . Das ist aber dann gerade eine Abbildung der geforderten Art.

c.) Die exakte Sequenz (3.5) liefert die exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\tilde{A}, \tilde{A}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\tilde{A}, \theta_s \tilde{A}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\tilde{A}, \tilde{B}) \rightarrow \dots,$$

wobei wir bereits wissen, daß die beiden äußeren Räume trivial sind, also ist es auch der in der Mitte. Das liefert die erste Aussage. Die zweite folgt direkt aus  $\theta_s \tilde{A} \cong \theta_s \tilde{B}$  und der Selbstadjungiertheit von  $\theta_s$ .

d.) Wir betrachten wiederum die exakte Sequenz (3.5). Das liefert die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\tilde{B}, \theta_s \tilde{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\tilde{B}, \tilde{B}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\tilde{B}, \tilde{A}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\tilde{B}, \theta_s \tilde{B}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Durch Dimensionsvergleich (1-1-1-?-0), erhalten wir  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\tilde{B}, \tilde{A}) = 1$ . Das ist aber gerade die Behauptung.  $\diamond$

### 3.4 Getwistete Kippmoduln

In diesem Abschnitt wollen wir getwistete Kippmoduln definieren. Diese Moduln sind unzerlegbar und haben eine Filtrierung, deren Subquotienten getwistete Vermamoduln sind. Im folgenden schreiben wir als Abkürzung  $\Delta^x(y)$  anstatt  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0)$ . Wir nennen diese Moduln auch „ $w_o x$ -getwistete“ Vermamoduln. Insbesondere liefert das unter der Äquivalenz zu  $\mathcal{O}$  für  $x = w_o$  (mit dem neutralen Element getwistete) Vermamoduln und für  $x = e$  duale Vermamoduln.

Die grundlegende Eigenschaft der getwisteten Vermamoduln, die zur Existenz getwisteter Kippmoduln führt, formulieren wir in dem folgenden

**Lemma 3.4.1.** *Seien  $x, y, z \in W$ . Es gilt*

1.  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta^x(y), \Delta^x(z)) \neq 0 \implies y \leq z$ .
2.  $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Delta^x(y), \Delta^x(z)) \neq 0 \implies y < z$ .

*Beweis:* Angenommen es existiere eine nichttriviale Abbildung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\Delta^x(y), \Delta^x(z))$ , dann induziert diese (wie im Beweis von Hauptsatz 3.3.3) induktiv eine nichttriviale Abbildung  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\Delta^{w_o}(y), \Delta^{w_o}(z))$ . So eine Abbildung existiert aber nur, falls  $w_o y \geq w_o z$ , also  $y \leq z$  ist. Das ist die erste Behauptung.

Für die zweite Aussage sei  $y \not\leq z$ , denn wir wissen bereits, daß Hauptserien keine nichttrivialen Selbsterweiterungen besitzen. Für  $x = e$  ist die Aussage klar aufgrund der bekannten Erweiterungen von dualen Vermamoduln. Für eine Sequenz der Form

$$\Delta^x(z) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \Delta^x(y) \tag{3.7}$$

erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta^x(y), \Delta^x(z)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta^x(y), E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta^x(y), \Delta^x(y)).$$

Der erste Ausdruck der Sequenz ist nach dem bereits bewiesenen Teil trivial, und der Raum auf der rechten Seite ist als Endomorphismenring einer Hauptserie eindimensional. Somit reicht es aus zu zeigen, daß  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta^x(y), E) \neq 0$  ist. Denn dann liefert ein Urbild der Identität  $\text{id} \in \text{End}_{\mathfrak{g}}(\Delta^x(y))$  einen Spalt für die Sequenz (3.7). Mit einer entsprechenden Argumentation wie in Satz 3.3.4 b erhalten wir eine Abbildung der geforderten Art.  $\diamond$

Mit einigen Standardargumenten (siehe bspw. [So7]) liefert das die Existenz getwisteter Kippmoduln:

**Satz 3.4.2 (Existenz und Charakter getwisteter Kippmoduln).**

1. Für alle  $y \in W$  existiert ein (bis auf Isomorphismus eindeutiger) unzerlegbarer Modul  $T^x(y) \in \mathcal{O}_0$ , für den die folgenden Eigenschaften gelten:

- a.)  $\text{Ext}^1(\Delta^x(z), T^x(y)) = 0$  für alle  $z \in W$
- b.)  $T^x(y) \in \mathcal{O}_0$  hat eine  $\Delta^x$ -Fahne, (d.h. eine Fahne, deren Subquotienten zu gewissen  $\Delta^x(z)$  isomorph sind) die mit  $\Delta^x(y) \subseteq T^x(y) \in \mathcal{O}_0$  beginnt.

2. Die Charaktere sind gegeben durch die folgende Formel:

$$[T^x(y)] = \sum_{z \in W} [T(w_0 y \cdot 0) : \Delta(w_0 z \cdot 0)] [\Delta^x(z)],$$

wobei  $T^{w_0}(y) = T(w_0 y \cdot 0)$  den „gewöhnlichen“ Kippmodul zum Gewicht  $w_0 y \cdot 0$  bezeichnet.

*Beweis:* Der erste Teil des Satzes folgt mit Standardargumenten.

Für den zweiten Teil konstruieren wir Moduln mit den entsprechenden Charakterformeln und zeigen dann, daß sie die charakterisierende Eigenschaften der Kippmoduln erfüllen.

Wir wählen zu einem festen  $x \in W$  eine einfache Spiegelung  $s$  mit  $xs < x$ . Wir nehmen an, die Charakterformel gelte bereits für  $T^x$ . (Der Induktionsanfang ist trivial.)

Die exakte Sequenz

$$\Delta^x(y) \hookrightarrow T^x(y) \twoheadrightarrow \text{coker}$$

liefert ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta^x(y) & \xhookrightarrow{f} & T^x(y) & \twoheadrightarrow^g & \text{coker} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} & & \\ 0 & \longrightarrow & \theta_s^r \Delta^x(y) & \xhookrightarrow{\theta_s^r f} & \theta_s^r T^x(y) & \twoheadrightarrow^{\theta_s^r g} & \theta_s^r \text{coker} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind alles Injektionen. Die linke Injektion ist klar. Die rechte erhalten wir mit Induktion über die Länge der Fahne unter Verwendung des Fünferlemmas. Damit erhalten wir dann auch die Injektion in der Mitte.

Die Kokernsequenz ist dann von der Form

$$\Delta^{xs}(y) \hookrightarrow T \twoheadrightarrow K.$$

Dabei ist wiederum leicht zu sehen, daß  $K$  eine  $\Delta^{xs}$ -Fahne hat. Analog zum Beweis von Lemma 3.3.1 erhalten wir die Unzerlegbarkeit von  $T$ .

Wir werden nun noch zeigen, daß  $T$  die Eigenschaft 1a.) erfüllt.

Angenommen, es existiere eine nichttriviale Erweiterung

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \Delta^{xs}(z) \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Die Verschiebung (von rechts) durch die  $s$ -Wand liefert eine Kernsequenz der Form

$$0 \rightarrow T^x(y) \rightarrow E' \twoheadrightarrow \Delta^x(z) \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Angenommen,  $E$  ist unzerlegbar, dann ist es (analog zu Lemma 3.3.1) auch  $E'$ . Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß  $T^x$  ein  $x$ -getwisteter Kippmodul ist und deshalb (3.9) spaltet. Also ist  $E \cong A \oplus B$  für gewisse Moduln  $A$  und  $B$  in  $\mathcal{O}_0$ . Da  $T$  unzerlegbar ist, liegt das Bild unter  $f$  bereits in einem der Summanden, sagen wir  $f(T) \subseteq A$ . Dann ist  $A/f(T) \oplus B \cong \Delta^{xs}(z)$ . Wegen der Unzerlegbarkeit der Hauptserie muß also  $f(T) = A$  sein und  $B \cong \Delta^{xs}(z)$ . Vermöge dieses Isomorphismus können wir eine nichttriviale Abbildung von  $\Delta^{xs}(z)$  nach  $E$  konstruieren, deren Bild trivialen Schnitt mit  $f(T)$  hat, also nach Anwendung von  $g$  immer noch nicht Null ist. Das liefert aber wegen der Eindimensionalität des Endomorphismenringes von  $\Delta^{xs}(z)$  bis auf einen Skalar einen Spalt zu  $g$ .

Also gilt  $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Delta^{xs}(z \cdot 0), T) = 0$ .

Somit ist  $T$  ein Modul, der gerade die charakterisierenden Bedingungen des getwisteten Kippmoduls  $T^{xs}(y)$  erfüllt. Die Konstruktion von  $T$  liefert dann aber induktiv für alle  $x \in W$  gerade die gewünschte Charakterformel

$$\begin{aligned} [T(w_0 y) : \Delta(w_0 z)] &= [T^{w_0}(y) : \Delta^{w_0}(z)] \\ &= [T^{w_0 s}(y) : \Delta^{w_0 s}(z)] \\ &= [T^x(y) : \Delta^x(z)]. \end{aligned}$$

◇

### Bemerkung 3.4.3.

- Der antidominante Projektive ist stets ein  $x$ -getwisteter Kippmodul für alle Weylgruppenelemente  $x$ . Dies folgt direkt aus der Konstruktion im Beweis, da dieser Modul, wenn man ihn durch die Wand schiebt, gerade die direkte Summe mit sich selbst ergibt (vgl. [Jo4, Lemma 3.16]). Insbesondere liefert das also eine Fülle unterschiedlicher Filtrierungen.
- Diese getwisteten Moduln haben (im Gegensatz zu den „normalen“ Kippmoduln) im allgemeinen keine duale  $\Delta^x$ -Fahne bzw.  $\Delta^{w_0 x}$ -Fahne. Der Morphismenraum zwischen  $\Delta^x(z)$  und seinem dualen ist in vielen Fällen nicht eindimensional, wie man in den Beispielen in Abschnitt 5.2.2 erkennen kann. Das liefert dann auch, daß sie nichttrivial erweitern können.
- Es gilt stets  $T^x(e) = \Delta^x(0) \cong \nabla(x^{-1} \cdot 0)$ .
- Für  $\mathfrak{sl}_2$  sind die gewöhnlichen Kippmoduln  $T^s(s) = T(0) = P(s \cdot 0)$  und  $T^s(e) = T(s \cdot 0) = \Delta(s \cdot 0)$ . Andererseits erhalten wir die  $s$ -getwisteten Kippmoduln  $T^e(e) = \nabla(0)$  und den antidominanten Projektiven mit der Fahne  $\Delta^e(s) = \Delta(s \cdot 0) \hookrightarrow T^e(s) \twoheadrightarrow \nabla(0)$ . Ohne Schwierigkeiten können wir die Charakterformeln überprüfen:

$$\begin{aligned} T^e(e) &= \sum_{z \in W} [T(s \cdot 0) : \Delta(w_0 z \cdot 0)] [\Delta^e(z)] \\ &= [\Delta(s \cdot 0) : \Delta(s \cdot 0)] [\Delta^e(e)] \\ &= [\nabla(0)]. \end{aligned}$$

Für den zweiten getwisteten Kippmodul erhalten wir

$$\begin{aligned}
 T^e(s) &= \sum_{z \in W} [T(0) : \Delta(w_0 z \cdot 0)] [\Delta^e(z)] \\
 &= \sum_{z \in W} [P(s \cdot 0) : \Delta(w_0 z \cdot 0)] [\Delta^e(z)] \\
 &= [\Delta^e(e)] + [\Delta^e(s)] \\
 &= [P(s \cdot 0)].
 \end{aligned}$$

- Die Fahne des antidominanten Projektiven als  $x$ -getwisteter Kippmodul endet jeweils mit  $\nabla(x^{-1}w_0 \cdot 0)$  und beginnt mit dem Vermamodul  $\Delta(x^{-1} \cdot 0)$ .

## KAPITEL

---

### 4

---

# Kategorie $\mathcal{O}$ und Graduierungen

---

---

*Im folgenden wollen wir reguläre Blöcke der Kategorie  $\mathcal{O}$  in gewissem Sinne „graduieren“. Das bedeutet, daß die Grothendieckgruppe eines solchen Blocks zu einer  $\mathbb{Z}$ -graduierten Gruppe wird, die isomorph zur Heckealgebra ist. Vermöge dieses Isomorphismus können wir Verschiebungsfunktoren als graduierte Funktoren auffassen und kombinatorisch beschreiben. Das liefert uns induktiv graduierte Versionen der projektiven, injektiven und einfachen Objekte, sowie der Vermamoduln und ihrer dualen. Wir zeigen, daß die Dualität in gewisser Weise mit der Graduierung verträglich ist und gewinnen eine graduierte Reziprozitätsformel. Soweit verwenden wir nicht die Ergebnisse der Kazhdan-Lusztig-Theorie.*

*Mit Hilfe von Kazhdan-Lusztig-Polynomen erhalten wir jedoch Aussagen über graduierte Multiplizitäten. Insbesondere können wir in dem graduierten Kontext die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome deuten.*

*Dieses Kapitel soll außerdem als Vorarbeit zur Graduierung der Hauptserien dienen, mit deren Hilfe wir im Verlauf der Arbeit primitive Quotienten untersuchen wollen.*

Wir beginnen mit wohlbekanntem Tatsachen über die Grothendieckgruppe von  $\mathcal{O}_0$  und über graduierte Moduln.

Für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  und  $x$  einem Weylgruppenelement bezeichnen wir im folgenden mit

$\Delta(x \cdot \lambda)$  den Vermamodul zum höchsten Gewicht  $x \cdot \lambda$  und mit

$\nabla(x \cdot \lambda)$  den entsprechenden dualen Vermamodul.

Für  $M, N \in \mathcal{O}$  sei  $\mathcal{L}(M, N)$  die abkürzende Schreibweise für  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)^{adf}$ .

Für eine Modulkategorie  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir mit  $[\mathcal{A}]$  die zugehörige Grothendieckgruppe. Das ist also die freie Gruppe, die von den Isomorphieklassen der Objekte in  $\mathcal{A}$  erzeugt wird mit der zusätzlichen Relation  $A + B = C$ , falls es eine kurze exakte Sequenz  $A \hookrightarrow C \twoheadrightarrow B$  gibt.

Soll diese Relation jeweils nur im Fall einer spaltenden Sequenz gelten, sprechen wir von der *spaltenden Grothendieckgruppe* und bezeichnen sie mit  $\langle \mathcal{A} \rangle$ .

## 4.1 Die Grothendieckgruppe, Verschiebungsfunktoren und der Funktor $\mathbb{V}$

Die im folgenden Lemma formulierte Aussage ist zwar offensichtlich, jedoch für das folgende Kapitel von zentraler Bedeutung.

**Lemma 4.1.1.** *Wir haben einen Isomorphismus von abelschen Gruppen*

$$\begin{array}{ccccccc} [{}^1_0\mathcal{H}_0] & \longrightarrow & [{}_0\mathcal{H}_0^1] & \longrightarrow & [\mathcal{O}_0] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathcal{W}] \\ [\mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x^{-1} \cdot 0))] & \mapsto & [\mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x \cdot 0))] & \mapsto & [\Delta(x \cdot 0)] & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

Das Bild von  $[P(x \cdot 0)]$  ist  $\sum_{y \in \mathcal{W}} [P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)] y^{-1}$ .

*Beweis:* Hierbei wurde nur verwendet, daß die Isomorphieklassen der Vermamoduln mit trivialem zentralen Charakter eine Basis der Grothendieckgruppe des trivialen Blocks von  $\mathcal{O}$  bilden und die Projektiven eine Vermafahne haben.  $\diamond$

Das liefert uns das bereits implizit in [So2] enthaltene Resultat:

**Satz 4.1.2.** 1. *Wir erhalten eine beidseitige Operation der Weylgruppe auf  $[\mathcal{O}_0]$  durch*

$$sM := \theta_s M - M \quad \text{bzw.} \quad Ms := \theta_s^r M - M.$$

2. *Wir erhalten eine beidseitige Operation der Weylgruppe auf  $\langle S - \text{mof} - S \rangle$  durch*

$$sM := S \otimes_{S^s} M \quad \text{bzw.} \quad Ms := M \otimes_{S^s} S.$$

3. *Der Funktor  $\mathbb{V}$  induziert eine  $W$ -äquivariante Abbildung auf den Grothendieckgruppen.*

*Beweis:* Da  $\theta_s$  exakt ist, liefert er einen Gruppenhomomorphismus auf der Grothendieckgruppe. Die Operation ist natürlich durch ihre Wirkung auf Isomorphieklassen der Vermamoduln festgelegt. Die Linksmultiplikation in der Weylgruppe liefert via Lemma 4.1.1 eine Linksoperation der Weylgruppe auf  $[\mathcal{O}_0]$ . Dort gilt aber  $\theta_s \Delta(x \cdot 0) = \Delta(x \cdot 0) + \Delta(xs \cdot 0) = \Delta(x \cdot 0) + \Delta((sx^{-1})^{-1} \cdot 0)$ .

Für die Rechtsoperation verwenden wir den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{O}_0] & \longrightarrow & [\mathcal{O}_0] \\ [\Delta(x \cdot 0)] & \mapsto & [\Delta(x^{-1} \cdot 0)]. \end{array}$$

(Auf der Bimodulnseite entspricht das gerade dem Vertauschen der Links- mit der Rechtsoperation der Liealgebra.)

Die Rechtsmultiplikation der Weylgruppe liefert analog zur Linksmultiplikation die gewünschte Operation. Mit Hilfe von [Jo4, 3.2] kann man auch direkt einsehen, daß  $\theta_s^r \Delta(x \cdot 0) = \Delta(x \cdot 0) + \Delta(sx \cdot 0)$  in  $[\mathcal{O}_0]$  gilt, da der Vermamodul und seine Dualisierung in der Grothendieckgruppe dasselbe Element repräsentieren.

Die letzten beiden Aussagen folgen direkt aus Lemma 2.6.7.  $\diamond$

### Übertragung in die Kombinatorik der Heckealgebra

Wir bezeichnen nun mit  $H$  die Heckealgebra zur Weylgruppe  $W$ . Das ist nach Definition der freie  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -Modul mit Basis  $\{H_x \mid x \in \mathcal{W}\}$  zusammen mit den Relationen

$$\begin{aligned} H_s^2 &= H_e + (v^{-1} - v)H_s \text{ für jede einfache Spiegelung } s \text{ und} \\ H_x H_y &= H_{xy}, \text{ falls } l(x) + l(y) = l(xy). \end{aligned}$$

(Zur Existenz einer solchen Algebra siehe [Bo3, IV,2, Ex.22].)

Die bereits in diesem Abschnitt angeführten Aussagen hängen eng mit der Heckealgebra zusammen. Wir fassen sie zusammen in dem folgenden

**Korollar 4.1.3.** *Die folgenden Diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow[v=1]{H_x \mapsto x^{-1}} & \mathbb{Z}[\mathcal{W}] & \xrightarrow{x^{-1} \mapsto \Delta(x \cdot 0)} & [\mathcal{O}_0] & \xrightarrow{\mathcal{L}(\Delta(0), \bullet)} & [{}_0\mathcal{H}_0^1] \xrightarrow{\mathbb{V}} \langle S - \text{mof} - S \rangle \\ \cdot(H_s + v) \downarrow & & \downarrow \cdot(s+1) & & \downarrow \theta_s & & \downarrow \theta_s \quad \downarrow M \mapsto S \otimes_{S^s} M \\ H & \xrightarrow[v=1]{H_x \mapsto x^{-1}} & \mathbb{Z}[\mathcal{W}] & \xrightarrow{x^{-1} \mapsto \Delta(x \cdot 0)} & [\mathcal{O}_0] & \xrightarrow{\mathcal{L}(\Delta(0), \bullet)} & [{}_0\mathcal{H}_0^1] \xrightarrow{\mathbb{V}} \langle S - \text{mof} - S \rangle \\ \\ H & \xrightarrow[v=1]{H_x \mapsto x^{-1}} & \mathbb{Z}[\mathcal{W}] & \xrightarrow{x^{-1} \mapsto \Delta(x \cdot 0)} & [\mathcal{O}_0] & \xrightarrow{\mathcal{L}(\Delta(0), \bullet)} & [{}_0^1\mathcal{H}_0^1] \xrightarrow{\mathbb{V}} \langle S - \text{mof} - S \rangle \\ (H_s + v) \downarrow & & \downarrow \cdot(s+1) & & \downarrow \theta_s^r & & \downarrow \theta_s^r \quad \downarrow M \mapsto M \otimes_{S^s} S \\ H & \xrightarrow[v=1]{H_x \mapsto x^{-1}} & \mathbb{Z}[\mathcal{W}] & \xrightarrow{x^{-1} \mapsto \Delta(x \cdot 0)} & [\mathcal{O}_0] & \xrightarrow{\mathcal{L}(\Delta(0), \bullet)} & [{}_0\mathcal{H}_0^1] \xrightarrow{\mathbb{V}} \langle S - \text{mof} - S \rangle \end{array}$$

kommutieren.

## 4.2 Allgemeines über Graduierungen

### 4.2.1 Graduierte Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Definitionen und Aussagen über graduierte Moduln bereitstellen. Im folgenden sei „graduiert“ stets  $\mathbb{Z}$ -graduiert.

Sei  $A$  ein graduierter Ring und  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  ein graduierter  $A$ -Modul.

Für  $m \in \mathbb{Z}$  definieren wir den im Grad verschobenen Modul  $M\langle m \rangle$  durch  $M\langle m \rangle_n := M_{n-m}$ .

Die Modulstruktur dabei ist dieselbe wie die von  $M$ . Für zwei graduierte  $A$ -Moduln  $M$  und  $N$  verwenden wir die folgenden Bezeichnungen. Es sei

$$\text{Hom}_A(M, N) = \{A\text{-lineare Abbildungen von } M \text{ nach } N\}.$$

Darin enthalten ist die Menge

$$\text{hom}_A(M, N) = \{\text{graderhaltende } A\text{-lineare Abbildungen von } M \text{ nach } N\}.$$

Allgemeiner sei

$$\text{Hom}_A(M, N)_i = \{\phi \in \text{Hom}_A(M, N) \mid \phi(M_j) \subseteq N_{j+i}, \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

die Menge aller Morphismen vom Grad  $i$ . Es gilt also  $\text{hom}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)_0$ . Wir bezeichnen mit

$$\text{gHom}_A(M, N) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M, N)_i$$

die zugehörige graduierte Gruppe. Diese ist kanonisch in  $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M, N)_i$  eingebettet. Falls  $M$  endlich erzeugter  $A$ -Modul ist, induziert das einen Isomorphismus

$$\text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{gHom}_A(M, N). \quad (4.1)$$

Direkt aus den Definitionen erhalten wir

$$\text{hom}_A(M\langle i \rangle, N) = \text{gHom}_A(M, N)_i = \text{hom}_A(M, N\langle -i \rangle). \quad (4.2)$$

Wir erhalten insbesondere eine Graduierung auf  $\text{End}_A(M)$ . Wir bezeichnen mit  $\text{gmof} - A$  die Kategorie aller graduierten endlichdimensionalen Rechts- $A$ -Moduln mit graderhaltenden Morphismen.

### 4.2.2 Graduierte Kategorien

Wir wollen nun als Verallgemeinerung Graduierungen auf Kategorien definieren. Als Spezialfall davon erhalten wir die Kategorie von graduierten Moduln über einem festen graduierten Ring. Als Referenz diene hierbei [AJS].

**Definition 4.2.1.** Eine  $\mathbb{Z}$ -graduierte Kategorie (oder auch  $\mathbb{Z}$ -Kategorie) besteht aus einem Tupel  $(\mathcal{C}, \{\langle n \rangle\}_n, \{\phi_{n,m}\}_{n,m})$ , wobei  $n, m \in \mathbb{Z}$  und

- $\mathcal{C}$  eine additive Kategorie,
- $\langle n \rangle$  ein additiver Funktor auf  $\mathcal{C}$  ist und
- $\phi_{n,m}$  eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren  $\langle n \rangle \circ \langle m \rangle$  und  $\langle n + m \rangle$  darstellt.

Dabei sollen die nachstehenden Bedingungen [GRAD] erfüllt sein.

Da (wie man sich leicht überzeugen kann) die Kategorie aller graduierten Moduln über einem festen graduierten Ring mit den oben definierten Gradverschiebungen als die wichtigsten Beispiele einer solchen graduierten Kategorie dienen, schreiben wir statt  $\langle n \rangle(M)$  eher  $M\langle n \rangle$ . Da wir den Begriff „Verschiebungsfunktoren“ bereits in einem völlig anderen Sinn verwenden, nennen wir diese Funktoren hier *Shiftfunktoren*.

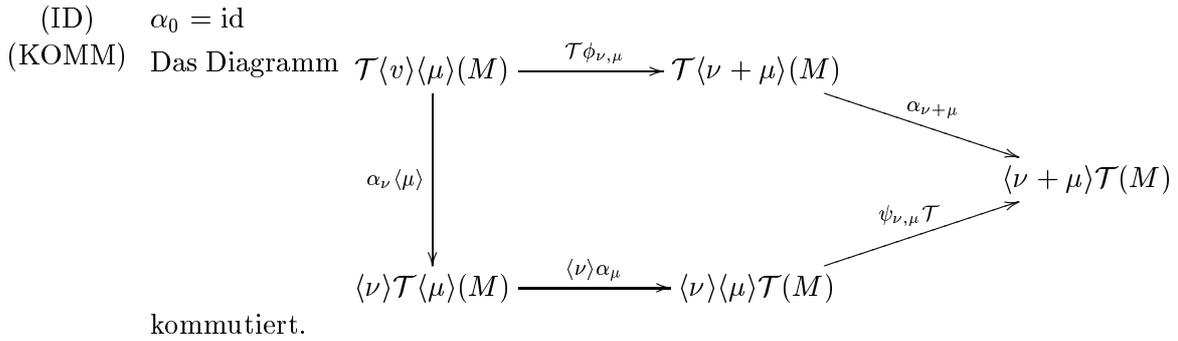
#### Die Bedingungen (GRAD)

- (ID) Für alle Objekte  $M$  in  $\mathcal{C}$  gilt  $M\langle 0 \rangle = M$ , das heißt  $\langle 0 \rangle$  ist der Identitätsfunktor.
- (ASS) Die natürlichen Transformationen  $\phi_{\nu, \mu + \tau}(\langle \nu \rangle(\phi_{\mu, \tau}))$  und  $\phi_{\nu + \mu, \tau} \circ (\phi_{\nu, \mu}\langle \tau \rangle)$  zwischen  $\langle \nu \rangle \circ \langle \mu \rangle \circ \langle \tau \rangle$  nach  $\langle \nu + \mu + \tau \rangle$  stimmen überein.

Die Funktoren  $\langle v \rangle$  und  $\langle -v \rangle$  (mit  $v \in \mathbb{Z}$ ) definieren eine Äquivalenz von Kategorien. Graduierte  $A$ -Moduln bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Kategorie mit den üblichen Shiftfunktoren (vergleiche Kapitel 4.2.1) und den offensichtlichen natürlichen Transformationen.

**Definition 4.2.2.** Seien  $(\mathcal{A}, \{\langle m \rangle\}_m, \{\phi_{i,j}\}_{i,j})$  und  $(\mathcal{C}, \{\langle n \rangle\}_n, \{\psi_{n,m}\}_{n,m})$  jeweils  $\mathbb{Z}$ -Kategorien. Ein *Funktor von  $\mathbb{Z}$ -Kategorien* ist ein System  $(\mathcal{T}, \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ , wobei  $\mathcal{T}$  ein additiver Funktor von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{C}$  ist und  $\alpha_n$  eine natürliche Transformation von  $\mathcal{T} \circ \langle n \rangle$  nach  $\langle n \rangle \circ \mathcal{T}$  sein soll, so daß die Bedingungen (FUNKTOR) erfüllt sind.

**Die Bedingungen (FUNKTOR)**



Das für uns zentrale Beispiel eines solchen Funktors findet man im nächsten Abschnitt (Beispiel 4.3.2).

Wir definieren zu einer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie  $\tilde{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \langle n \rangle, \phi_{n,m})$  mit Objekten  $M$  und  $N$  aus  $\mathcal{C}$  die graduierte Gruppe

$$\text{gHom}_{\mathcal{C}}(M, N) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M \langle i \rangle, N). \tag{4.3}$$

Die Eigenschaften der Shiftfunktoren liefern (vgl. 4.2)

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M \langle i \rangle, N) = \text{gHom}_{\mathcal{C}}(M, N)_i = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N \langle -i \rangle). \tag{4.4}$$

Betrachten wir nun die Verallgemeinerung von (4.2), so erhalten wir für  $L, M, N \in \mathcal{C}$  eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}
 \text{gHom}(L, M) \times \text{gHom}(M, N) &\longrightarrow \text{gHom}(L, N) \\
 (f, g) &\mapsto g \circ f,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei wir noch erklären müssen, was  $g \circ f$  heißen soll. Dazu sei  $f$  vom Grad  $i$ , also  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L \langle i \rangle, M)$  und  $g$  vom Grad  $j$ . Wir betrachten nun die Komposition

$$h := g \circ f : L \langle i + j \rangle \xrightarrow{\phi_{i,j}(L)^{-1}} L \langle i \rangle \langle j \rangle \xrightarrow{\langle j \rangle f} M \langle j \rangle \xrightarrow{g} N. \tag{4.6}$$

Dann ist  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L \langle i + j \rangle, N)$ , also vom Grad  $i + j$ .

Man kann nun nachprüfen, daß die durch (4.5) definierte Verknüpfung assoziativ ist und  $\tilde{\mathcal{C}}$  mit diesen Morphismen eine additive Kategorie bildet. Die Endomorphismenräume werden dadurch zu graduierten Ringen.

### 4.3 Graduierbarkeit von Moduln und Funktoren

Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, inwiefern man die Kategorie  $\mathcal{O}$  und Verschiebungsfunktoren „graduieren“ kann.

### 4.3.1 Kategorie $\mathcal{O}$ als Modulkategorie über einem graduierbaren Ring

Wir betrachten für einen regulären ganzen Block (oBdA. sei es  $\mathcal{O}_0$ ) in  $\mathcal{O}$  mit projektivem Erzeuger  $P$  die Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0 &\xrightarrow{\sim} \text{mof-End}_{\mathfrak{g}}(P) \\ M &\mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, M) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Unser Ziel ist es, eine Unterkategorie dieses Blocks zu graduieren. Wir beschränken uns auf den regulären Fall, um unnötige Verwirrung zu vermeiden. Die Aussagen gelten allerdings mit leicht modifizierten Beweisen auch für singuläre Blöcke.

Wir kürzen

$$A := \text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$$

ab. Außerdem seien  $A$ -Moduln, wenn nicht anders gesagt, immer Rechts- $A$ -Moduln.

Wir erinnern zuerst noch an eine allgemein gültige Aussage über Tensorprodukte von graduieren Moduln.

**Lemma 4.3.1.** *Seien  $R, S$  graduierte Ringe,  $M$  ein graduiertes  $R$ - $S$ -Bimodul und  $N$  ein graduiertes  $S$ -Modul.*

*Dann ist  $M \otimes_S N$  ein graduiertes  $R$ -Modul.*

*Beweis:* Offensichtlich kann man den  $R$ -Modul  $M \otimes N$  graduieren, indem man setzt

$$(M \otimes N)_i := \sum_k M_k \otimes N_{i-k} \subseteq M \otimes N.$$

Dabei bezeichne  $M_k \otimes N_{i-k}$  den Teilraum von  $M \otimes N$ , der von den Elementen der Form  $m \otimes n$  mit  $m \in M_k$  und  $n \in N_{i-k}$  erzeugt wird. Dies ist offensichtlich verträglich mit der  $R$ -Modulstruktur. Wir betrachten die kanonische Surjektion von  $R$ -Moduln  $M \otimes N \twoheadrightarrow M \otimes_S N$ . Der Kern wird erzeugt von Elementen der Form  $ms \otimes n - m \otimes sn$ , wird also von homogenen Elementen erzeugt. Das ergibt die Behauptung.  $\diamond$

Das liefert nun das Standardbeispiel eines Funktors graduierter Kategorien:

**Beispiel 4.3.2.** *Seien  $R$  und  $S$  graduierte Ringe und  $X$  ein endlichdimensionaler graduiertes  $R$ - $S$ -Bimodul. Dann definiert*

$$\bullet \otimes_R X : \text{gmof-}R \rightarrow \text{gmof-}S$$

*einen Funktor graduierter Kategorien mit den natürlichen Transformationen gegeben durch die natürlichen Isomorphismen*

$$M\langle n \rangle \otimes_R X \cong (M \otimes_R X)\langle n \rangle.$$

Für den folgenden zentralen Satz benötigen wir noch eine Aussage über Graduierbarkeit von direkten Summanden.

**Lemma 4.3.3.** *Seien  $M$  und  $N$  endlichdimensionale Moduln über einem graduierten Ring  $S$ . Sei  $N$  unzerlegbar und seien  $N$  und  $M \oplus N$  graduiert. Dann ist auch  $M$  graduiert.*

*Beweis:* Seien  $i : N \hookrightarrow N \oplus M$  und  $p : N \oplus M \rightarrow N$  die kanonischen Abbildungen Inklusion und Projektion. Seien  $i = \sum_j i_j$  beziehungsweise  $p = \sum_j p_j$  die entsprechenden Zerlegungen nach der Graduierung. Nun ist aber  $p \circ i = \sum_n p_n \circ i_{-n}$  die Identität auf  $N$ . Da nach Voraussetzung  $\text{End}_A(N)$  lokal ist, muß aber mindestens einer der Summanden, sagen wir  $p_{n_0} \circ i_{-n_0}$  invertierbar sein. Sei  $\phi$  das Inverse. Damit spaltet aber  $\phi \circ p_{n_0} : M \oplus N \rightarrow N \langle -n_0 \rangle$  durch  $i_{-n_0}$ . Der Kern dieser Abbildung ist der gesuchte Lift für  $M$ . Genauer gilt sogar, daß die direkte Summe der Lifts von  $M$  und  $N$  gerade der Lift von  $M \oplus N$  ist.  $\diamond$

### 4.3.2 Projektive und Einfache als graduierbare Objekte

Im folgenden wollen wir eine Graduierung auf  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$  erklären.

**Satz 4.3.4.** *Für projektive Objekte  $Q, Q' \in \mathcal{O}_0$  kann man durch den Funktor  $\mathbb{V}$  eine Graduierung auf  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(Q, Q')$  erklären. Insbesondere wird  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$  dadurch zu einem graduerten Ring.*

*Beweis:* Einen Beweis findet man in [BGS]. Da wir aber eigentlich weniger benötigen, als dort gezeigt wird, geben wir hier nochmals einen Beweis an.

Da die Operation der Weylgruppe mit der Graduierung auf der symmetrischen Algebra bezüglich der Cartanschen verträglich ist, ist der Endomorphismenring  $C$  des antidominanten Projektiven ein graduierter Ring. Für eine einfache Spiegelung  $s$  ist  $C^s \subset C$  ein graduierter Teilring, also ist die Koinvariantenalgebra ein graduierter  $C^s$ -Modul. Ebenso ist der triviale Modul  $\mathbb{C}$  ein graduierter  $C^s$ -Modul. Nach Lemma 4.3.1 ist also  $C \otimes_{C^s} \mathbb{C}$  ein graduierter  $C$ -Modul. Nun erhalten wir aber alle Projektiven aus unserem Block durch direkte Summen von direkten Summanden sukzessiver Tensorprodukte. Somit sind nach Lemma 4.3.3 alle  $\mathbb{V}Q$  für projektive Moduln  $Q$  graduert. Nach (4.1) ist für projektive  $Q, Q'$  damit auch  $\text{Hom}_C(\mathbb{V}Q, \mathbb{V}Q')$  graduert. Mit Hilfe der Volltreue unseres Funktors (siehe Satz 1.1.3) liefert das eine Graduierung auf  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(Q, Q')$ . Insbesondere wird  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$  wegen (4.2) zu einem graduerten Ring.  $\diamond$

Das obige Verfahren liefert somit eine Graduierung auf den projektiven endlichdimensionalen  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$ -Rechtsmoduln. Sie ist in gewissem Sinne eindeutig, denn es gilt das

**Lemma 4.3.5 („Eindeutigkeit der Graduierung“).**

*Sei  $B$  ein graduierter Ring und  $N \in \text{mod} - B$  unzerlegbar und von endlicher Länge. Außerdem existiere ein Lift  $M \in \text{gmod} - B$  von  $N$ . Dann ist dieser Lift eindeutig bis auf Isomorphie und Shift, das heißt für  $M' \in \text{gmod} - B$  mit  $v(M) \cong v(M') \cong N$  gilt stets  $M \cong M' \langle n \rangle$  als graduerte Moduln für passendes  $n \in \mathbb{Z}$ .*

In diesem Fall sagen wir dann etwas salopp, „die Graduierung ist eindeutig bis auf einen Shift“.

*Beweis:* (siehe [BGS, Lemma 2.5.3]). Da  $M$  unzerlegbar ist, ist sein Endomorphismenring lokal. Sei nun  $M'$  ein weiterer graduierter Modul, der nach dem Vergessen der Graduierung zu  $M$  isomorph ist. Dann gilt

$$\text{Hom}_B(M, M) = \text{Hom}_B(M', M) = \bigoplus_n \text{hom}_B(M', M \langle n \rangle).$$

Sei nun  $\text{id} = \sum \text{id}_i$  die entsprechende Zerlegung der Identität. Wenn nun keines dieser  $\text{id}_i$  ein Isomorphismus wäre, so wäre es auch die Summe nicht, da die Nichtautomorphismen nach

Voraussetzung ein Ideal bilden. Somit liefert uns das einen graderhaltenden Isomorphismus zwischen  $M'$  und einem gewissen  $M\langle n \rangle$ . Das ist gerade die Behauptung.  $\diamond$

**Konvention 4.3.6.** Wir wählen  $P := \bigoplus_{x \in W} P(x \cdot 0)$  minimal. Um mit der Literatur in Einklang zu stehen, betrachten wir  $S = S(\mathfrak{h})$  als (gerade) graduierte Algebra, so daß  $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S^{2i}$  mit  $S^2 = \mathfrak{h}$  gilt. Die Koinvariantenalgebra  $C$  erbt wiederum eine Graduierung. Wie im Beweis von Satz 4.3.4 gezeigt, können wir für  $x \in W$  den Modul  $\mathbb{V}P(x \cdot 0)$  als graduierten  $C$ -Modul auffassen. Wir betrachten im folgenden für beliebiges ganzes Gewicht  $\lambda$  den Modul  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  als graduierten Modul, wobei sein höchster auftretende Grad gerade  $l(x)$  sein soll. Für den singulären Fall sei  $x$  von minimaler Länge gewählt.

Für die „Endomorphismenringe“  $\mathbb{V}P(w_o \cdot \lambda)$  und  $\mathbb{V}P(w_o \cdot 0)$  des semiregulären bzw. regulären antidominanten Projektiven definiert das dann eine kanonische graderhaltende Inklusion  $\mathbb{V}P(w_o \cdot \lambda)(-1) \hookrightarrow \mathbb{V}P(w_o \cdot 0)$ .

Der Endomorphismenring  $\text{End}_g(P)$  wird durch diese Vereinbarungen sogar zu einem nichtnegativ graduierten Ring. Details dazu findet man in [So6] und [BGS, Theorem 1.1.3].

#### Definition 4.3.7 (Graduierbare Moduln).

Sei  $B$  ein graduierter Ring. Wir nennen einen Modul  $M$  in  $\text{mof} - B$  *graduierbar*, falls es einen graduierten Modul  $\tilde{M}$  gibt, der nach dem Vergessen der Graduierung zu  $M$  isomorph ist. Wir nennen  $\tilde{M}$  dann einen *Lift* von  $M$ .

Ein Modul  $M \in \mathcal{O}_0$  soll graduierbar heißen, falls  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, M)$  ein graduierbarer  $A$ -Modul ist. Dabei sei  $A = \text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$  mit der durch Konvention 4.3.6 definierten Graduierung versehen. Einen entsprechenden Lift nennen wir oftmals auch einfach *Lift von  $M$* .

Insbesondere sind also die projektiven Objekte (wegen Satz 4.3.4) graduierbar und die Graduierung ist nach Lemma 4.3.5 eindeutig bis auf einen Shift. Durch die Konventionen 4.3.6 wird der Shift eindeutig festgelegt.

Für die einfachen Objekte sieht die Sache nun wirklich einfach aus:

**Lemma 4.3.8.** *Jeder einfache Modul in  $\mathcal{O}_0$  ist graduierbar. Ein entsprechender Lift ist rein, d.h. er lebt nur in einem Grad.*

*Beweis:* Wir betrachten in  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, P(x \cdot 0)) = \text{Hom}_C(\mathbb{V}(P), \mathbb{V}P(x \cdot 0))$  den eindimensionalen Untervektorraum  $L$ , der von der kanonischen Projektion auf den entsprechenden Summanden erzeugt wird. Wir wählen ein Vektorraumkomplement. Das ist aber dann auch ein  $A$ -Untermodule, da das Bild von  $g \circ f$  für  $g \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, P(x \cdot 0))$  und  $f \in A$  stets im Radikal von  $P(x \cdot 0)$  liegt. Offensichtlich ist aber dann die Projektion von  $\text{Hom}_C(\mathbb{V}P, \mathbb{V}P(x \cdot 0))$  nach  $L$  eine graderhaltende Abbildung, wobei der Quotient im Grad Null lebt.  $\diamond$

Allgemein sieht man leicht ein, daß ein einfacher graduierter Modul über einem nichtnegativ graduierten Ring rein ist, denn sonst wäre der Anteil im höchsten Grad ein Untermodule. Somit ist das vorausgehende Lemma eine einfache Folgerung aus der Positivität der Graduierung von  $A$ , die wir jedoch nicht voraussetzen wollen. (Siehe dazu auch die Bemerkung in Konvention 4.3.6.)

**Korollar 4.3.9.** *Die durch Lemma 4.3.8 und Konvention 4.3.6 definierten Lifts der einfachen Moduln sind alle vom Grad Null.*

Man beachte, daß der Lift von  $P(x \cdot 0)$  (bis auf Isomorphie) nicht von der reduzierten Darstellung von  $x$  abhängt, die zu seiner Konstruktion benutzt wurde.

*Warnung:* Im folgenden werden wir bezüglich der Notation nicht mehr zwischen einem projektiven Modul in  $\mathcal{O}_0$  und seinem durch die obigen Konventionen induktiv definierten Lift unterscheiden.

**Definition 4.3.10 (Lift eines graduierbaren Funktors).**

Seien  $B$  und  $C$  graduierte Ringe. Wir nennen einen Funktor  $F : \text{mof } -B \rightarrow \text{mof } -C$  *graduierbar*, falls es einen Funktor graduierter Kategorien  $\tilde{F} : \text{gmof } -B \rightarrow \text{gmof } -C$  gibt, der  $F$  induziert. Wir bezeichnen  $\tilde{F}$  wiederum als *Lift* von  $F$ .

Anders ausgedrückt ist also  $\tilde{F}$  ein Lift von  $F$ , falls er ein Funktor graduierter Kategorien ist und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{gmof } -B & \xrightarrow{\tilde{F}} & \text{gmof } -C \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ \text{mof } -B & \xrightarrow{F} & \text{mof } -C \end{array}$$

kommutiert, wobei  $v$  den Vergißfunktor bezeichnet. Ein Funktor auf  $\mathcal{O}_0$  soll graduierbar heißen, falls er einen graduierbaren Funktor auf  $\text{mof } -A$  induziert.

## 4.4 Verschiebungsfunktoren und Graduierung

Die Verschiebungsfunktoren auf  $\mathcal{O}$  sind exakt, also insbesondere rechtsexakt. Mit Hilfe des folgenden Lemmas können wir diese Funktoren auch anders beschreiben.

Zur Abkürzung schreiben wir nun  $A$  für den graduierten Ring  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$ .

**Lemma 4.4.1.** *Seien  $R$  und  $S$  Ringe. Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rechtsexakte Funktoren} \\ \text{mof } -R \rightarrow \text{mof } -S, \\ \text{die mit direkten Summen verträglich sind} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} R\text{-mof } -S$$

$$F \mapsto F(R)$$

$$\bullet \otimes_R X \leftarrow X.$$

Dabei ist  $F(R)$  nach Definition ein Rechts- $S$ -Modul. Andererseits liefert aber die Linksmultiplikation auf  $R$  jeweils Rechts- $S$ -Modulmorphismen, also eine Linksmodulstruktur auf  $F(R)$ .

*Beweis:* siehe [Ba, 2.2]. ◇

Sei nun  $\theta_s : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$  die Verschiebung durch die  $s$ -Wand. Das induziert mit Lemma 4.4.1 den Funktor  $\bullet \otimes_A \text{Hom}(P, \theta_s P)$  auf  $\text{mof } -A$ . Dieser ist aber (vgl. Beispiel 4.3.2) nach Satz 4.3.4 und Lemma 4.3.1 graduierbar. Mit unseren Konventionen wählen wir den Lift

$$\bullet \otimes_A \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle).$$

Wir bezeichnen die graduierte Version ebenfalls mit  $\theta_s$ .

**Bemerkung 4.4.2.** Die graduierte Version des Verschiebungsfunktors  $\theta_s$  ist mit der Konvention 4.3.6 insofern „verträglich“, daß beispielsweise  $\theta_s \Delta(0) \cong P(s \cdot 0)$  gilt. Allgemein ist ein Isomorphismus durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, \mathbb{V}P(x \cdot 0)) \otimes_A \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P(x \cdot 0)\langle -1 \rangle) \\ g \otimes f &\longmapsto (\mathrm{id} \otimes g) \circ f \end{aligned}$$

gegeben.

#### 4.4.1 Vermamoduln als graduirbare Objekte

Wir haben bereits gezeigt, daß die projektiven und die einfachen Objekte graduirbar sind. Da Verschiebung durch die Wand ein graduirbarer Funktor ist, sind also auch die durch die Wand geschobenen graduirbaren Moduln graduirbar.

Für  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$  liefert die exakte Sequenz

$$\Delta(x \cdot 0) \xrightarrow{j} \theta_s \Delta(x \cdot 0) \xrightarrow{k} \Delta(xs \cdot 0) \quad (4.8)$$

die exakte Sequenz von  $A$ -Moduln

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(x \cdot 0)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \theta_s \Delta(x \cdot 0)) \xrightarrow{k} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(xs \cdot 0)). \quad (4.9)$$

Da nun aber  $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(x \cdot 0), \theta_s \Delta(x \cdot 0)) = [\theta_s \Delta(x \cdot 0) : L(x \cdot 0)] = 1$  gilt, ist die Abbildung  $j$  für graduirbares  $\Delta(x \cdot 0)$  graduirbar. Damit ist der Kokern ebenfalls graduirbar. Wir erhalten somit induktiv, daß alle Vermamoduln graduirbar sind. Nach Lemma 4.3.5 wissen wir, daß diese Graduierung bis auf einen Shift eindeutig ist. Wir wählen mit  $\Delta(0) = P(0)$  einen Lift von  $\Delta(xs \cdot 0)$  so, daß die Surjektion in (4.9) graderhaltend ist. Damit ist die kanonische Surjektion  $P(x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(x \cdot 0)$  graderhaltend und somit hängt der Lift nicht von der reduzierten Darstellung von  $x$  ab.

*Warnung:* Wenn es aus dem Zusammenhang klar ist, werden wir der Einfachheit halber in der Notation nicht zwischen einem Projektiven oder einem Vermamodul und seinem induktiv definierten Lift unterscheiden. Ebenso werden wir mit den einfachen Moduln verfahren.

Wir wählen Isomorphismen  $\mathbb{V}P \cong \mathbb{V}P^* = \mathrm{gHom}_C(\mathbb{V}P, C)$  (vgl. [So6]) als graduierte  $C$ -Moduln. Insbesondere also einen graduierten Isomorphismus  $C \cong C^{opp}$ . Wir betrachten (unter Verwendung von ([So6, Lemma 2.9.2])) die folgenden Isomorphismen graduirter Vektorräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle) &\cong \mathrm{Hom}_C((C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle)^*, \mathbb{V}P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C((C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P)^*\langle 1 \rangle, \mathbb{V}P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C((C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P)\langle -1 \rangle, \mathbb{V}P). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die (graderhaltende) Multiplikation

$$\begin{aligned} (C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P) &\longrightarrow \mathbb{V}P \\ c \otimes m &\longmapsto cm \end{aligned}$$

liefert also eine  $C$ -lineare Abbildung

$$f : \mathbb{V}P \longrightarrow C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle \quad (4.11)$$

vom Grad 1. Diese induziert eine nichttriviale Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(x \cdot 0)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(x \cdot 0)) \otimes_A \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle) \\ \phi &\longmapsto \phi \otimes f. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sie ist also bis auf einen Skalar gerade die Abbildung  $j$  aus (4.9), also nach Definition graduiert vom Grad 1. Insgesamt liefert das die folgende graduierte Form von (4.8):

**Satz 4.4.3.** *Für  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$  haben wir eine exakte Sequenz von graduierten Moduln*

$$\Delta(x \cdot 0)\langle 1 \rangle \hookrightarrow \theta_s \Delta(x \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(xs \cdot 0).$$

*Beweis:* bereits gegeben. ◇

**Korollar 4.4.4.** *Für alle  $x \in W$  gilt:*

$$[\Delta(x \cdot 0) : L(x \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* Die (bis auf einen Skalar eindeutige) Surjektion  $P(y \cdot 0) \twoheadrightarrow \Delta(y \cdot 0)$  ist für jedes  $y \in W$  graderhaltend. Andererseits ist aber  $P(y \cdot 0)$  projektive Decke von  $L(y \cdot 0)$ . ◇

### Anmerkungen

- a.) Man kann einen graduierten Lift der Vermamoduln auch dadurch erhalten, daß man die Vermamoduln als projektive Moduln in „gestutzten“ Unterkategorien von  $\mathcal{O}$  betrachtet. Näheres dazu findet man in [BGS] oder auch in [St]. Es wird sich noch herausstellen, daß diese Graduierung mit unserer übereinstimmt.
- b.) Unter den Isomorphismen graduierter Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle) &\cong \mathrm{Hom}_C((C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P)\langle -1 \rangle, \mathbb{V}P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{C^s}(\mathbb{V}P, \mathrm{Hom}_C(C, \mathbb{V}P))\langle 1 \rangle \\ &\cong \mathrm{Hom}_{C^s}(\mathbb{V}P, \mathbb{V}P)\langle 1 \rangle \end{aligned}$$

entsprechen sich die Abbildung  $f$ , die Multiplikationsabbildung und die Identität (als Abbildung vom Grad 1). Diese Gradverschiebung um 1 erscheint hier etwas künstlich. Es wird aber im Verlauf der Arbeit deutlich werden, warum sie eingeführt wurde. Sie entspricht der Inklusion  $\mathrm{End}_{C^s}(\mathbb{V}P(w_o \cdot \lambda)) \hookrightarrow \mathrm{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))$  mit  $W_\lambda = \{e, s\}$ .

#### 4.4.2 Duale Vermamoduln und Injektive als graduierbare Objekte

Wir haben bereits gezeigt, daß die Vermamoduln graduierbar sind. Wir wollen nun mit Hilfe von Verschiebungsfunktoren beweisen, daß auch die dualen Vermamoduln graduierbar sind.

**Lemma 4.4.5.** *Für alle  $x \in W$  ist der duale Vermamodul  $\nabla(x \cdot 0)$  sowie der injektive unzerlegbare Modul  $I(x \cdot 0)$  graduierbar.*

*Beweis:* Bekanntlich gibt es eine exakte Sequenz der Form

$$\nabla(xs \cdot 0) \xrightarrow{k} \theta_s \nabla(xs \cdot 0) \xrightarrow{j} \nabla(x \cdot 0). \quad (4.13)$$

für  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$ . Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\nabla(xs \cdot 0), \theta_s \nabla(xs \cdot 0)) &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\nabla(xs \cdot 0), \theta_s \nabla(x \cdot 0)) \\ &= \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\theta_s \nabla(xs \cdot 0), \nabla(x \cdot 0)) \\ &= [\theta_s \nabla(xs \cdot 0) : L(x \cdot 0)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Für graduierbares  $\nabla(xs \cdot 0)$  ist also auch  $\theta_s \nabla(xs \cdot 0)$  graduierbar mit graduierbarer Abbildung  $k$ . Beginnend mit dem graduierten einfachen Vermamodul  $\Delta(w_o \cdot 0) = \nabla(w_o \cdot 0)$  erhalten wir dadurch induktiv die Graduierbarkeit aller dualen Vermamoduln. Dabei wird die Graduierung eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß die Abbildung  $j$  jeweils graderhaltend sein soll. Die Graduierbarkeit der Injektiven erhalten wir nun induktiv, indem wir beginnend mit  $\nabla(0)$  sukzessive durch die Wände schieben. Die Argumente sind genau analog zu denen für die Projektiven. Daß dies jeweils unabhängig von der gewählten reduzierten Zerlegung von  $x$  ist, prüfe man direkt nach oder verwende Satz 4.4.8, der (unabhängig von den bisherigen Resultaten) im nächsten Kapitel gezeigt wird.  $\diamond$

Analog zu Satz 4.4.3 erhalten wir

**Satz 4.4.6.** *Sei  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$ . Dann erhalten wir die folgende exakte Sequenz graduierter Moduln*

$$\nabla(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle \xrightarrow{k} \theta_s \nabla(xs \cdot 0) \xrightarrow{j} \nabla(x \cdot 0).$$

*Beweis:* Mit  $f$  wie in (4.11) erhalten wir wiederum die nichttriviale Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \nabla(xs \cdot 0)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \nabla(xs \cdot 0)) \otimes_A \operatorname{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle) \\ \phi &\longmapsto \phi \otimes f, \end{aligned}$$

die also bis auf einen Skalar gerade der Abbildung  $k$  aus (4.13) entspricht. Die Surjektion ist nach Definition vom Grad Null. Daraus folgt die Behauptung.  $\diamond$

#### 4.4.3 Nichtgraduierbare Objekte

Wir sollten hier noch als Bemerkung einfügen, daß es keinesfalls richtig ist, daß alle Objekte in  $\mathcal{O}_0$  graduierbar sind. Allerdings ist es nicht einfach, einen solchen nichtgraduierbaren Modul explizit anzugeben. Es reicht jedoch aufgrund des nachfolgenden Satzes aus, ein Ideal der Koinvariantenalgebra anzugeben, das nicht homogen ist.

**Satz 4.4.7 (Nichtgraduierbarkeit).**

Sei  $I \triangleleft \mathbb{V}P(w_o \cdot 0) = C$  ein Ideal und  $Q \in \mathcal{O}_0$  graduierbar mit  $\mathbb{V}Q \cong C/I$ . Dann ist  $I$  homogen.

*Beweis:* Umformulierung mit Hilfe des Annihilators:

Sei also der Modul  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, Q)$  mit einer Graduierung als  $A = \text{End}_C(\mathbb{V}P) = \text{End}_{\mathfrak{g}}(P)$ -Rechtsmodul versehen. Dabei trage  $A$  die vereinbarte Graduierung. Schränken wir die Operation ein, wird  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot 0), Q)$  zu einem graduierten  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot 0))$ -Rechtsmodul. Nun ist (siehe bspw. [CR, 2.19])

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot 0), Q) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot 0) \otimes_C \mathbb{V}P(w_o \cdot 0), Q) = \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0), C/I),$$

also wird  $X := \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0), \mathbb{V}P(w_o \cdot 0)/I)$  zu einem graduierten  $\text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))$ -Rechtsmodul, wobei  $\text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0)) = \text{End}_{\mathfrak{g}}(P(w_o \cdot 0)) \subset A$  die induzierte Graduierung trägt. (An dieser Stelle muß  $X$  ausnahmsweise nicht unbedingt die durch unsere Konventionen erklärte Graduierung haben!)

Sei nun  $I$  nicht homogen. Wir behaupten, daß  $\text{Ann}_{\text{End}(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))} X$  nicht homogen ist. Das liefert dann den gewünschten Widerspruch (siehe [Bo2, II, 11.3, Proposition 4]).

Die Bestimmung des Annihilators:

Für den Annihilator gilt

$$\text{Ann} := \text{Ann}_{\text{End}(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))} X = \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0), I) \subseteq \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0), \mathbb{V}P(w_o \cdot 0)).$$

Sei dazu  $g \in \text{Ann}$ , also  $f \circ g = 0$  für alle  $f \in X$ . Insbesondere folgt damit  $\text{im } g \subseteq I$ , wenn wir für  $f$  die kanonische Projektion wählen.

Sei umgekehrt  $g \in \text{Hom}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0), I)$  und  $f \in X$  beliebig. Nun wird  $X$  von der kanonischen Projektion erzeugt, also existiert ein  $h \in \text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))$  mit  $f = \text{can} \circ h$  und  $h$  läßt  $I$  invariant. Also gilt  $f \circ g = \text{can} \circ h \circ g = 0$  und somit  $g \in \text{Ann}$ .

Die Nichthomogenität des Annihilators:

Wir erhalten einen Isomorphismus von  $\text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))$ -Rechtsmoduln

$$\begin{aligned} \text{Ann} &\xrightarrow{\sim} I \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned}$$

Dabei ist die Wohldefiniertheit und die Bijektivität klar, da  $\mathbb{V}P(w_o \cdot 0) = C$  kommutativ und zyklisch als Modul über sich selbst ist. Außerdem gilt für  $f \in \text{Ann}$  und  $g \in \text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))$  mit  $g(1) = i$

$$(f \cdot g)(1) = f(g(1)) = f(i) = if(1) = g(1)f(1) = f(1) \cdot g,$$

wobei mit  $\cdot g$  jeweils die Rechtsoperation von  $g$  bezeichnet wurde. Das liefert die Verträglichkeit mit der  $\text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0))$ -Rechtsoperation. Also ist der besagte Annihilator nur dann homogen, falls es auch  $I \subseteq \text{End}_C(\mathbb{V}P(w_o \cdot 0)) = C$  ist.  $\diamond$

Falls nun ein solches inhomogene Ideal der Koinvariantenalgebra existiert, liefert das uns via des zu  $\mathbb{V}$  linksadjungierten rechtsexakten Funktors  $P(w_o \cdot 0) \otimes_C \bullet$  einen nichtgraduierbaren Quotienten des antidominanten Projektiven. Für Wurzelsysteme vom Rang 2 existiert kein solches Ideal. Für Typ  $A_3$  können wir beispielsweise (mit den Bezeichnungen aus [St]) das von  $x + yz$  erzeugte Ideal wählen. Es bleibt jedoch die Frage offen, ob im Fall einfacher Multiplizitäten in der Tat alle Moduln graduierbar sind.

#### 4.4.4 Verschiebungen „nach oben“ und „nach unten“: Einige kurze exakte Sequenzen

In den vorherigen Abschnitten haben wir untersucht, wie sich Vermamoduln  $\Delta(x \cdot 0)$  und duale Vermamoduln  $\nabla(xs \cdot 0)$  für  $xs > x$  unter Verschiebungen durch die  $s$ -Wand verhalten. Verißt man die Graduierung, so gilt  $\theta_s \Delta(x \cdot 0) \cong \theta_s \Delta(xs \cdot 0)$  und analog  $\theta_s \nabla(x \cdot 0) \cong \theta_s \nabla(xs \cdot 0)$ . Somit ist es nicht erforderlich, zu unterscheiden, ob man „von oben“ oder „von unten“ durch die Wand schiebt.

Im graduierten Fall ist die Situation eine andere. Sie birgt aber zusätzlich den Vorteil, daß man einem durch die Wand geschobenen Vermamodul ansieht, „von wo er her kommt“.

Um diese Aussagen zu präzisieren, müssen wir zuerst einige Notationen einführen. Für einen  $C$ -Modul  $M$  liefert die Multiplikation eine Abbildung  $\text{mult} : C \otimes_{C^s} M \rightarrow M$ . Wir erhalten somit insbesondere einen Morphismus

$$m : \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P(-1)) \xrightarrow{\text{mult}^\circ} \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, \mathbb{V}P) = \text{End}_{\mathfrak{g}}(P). \quad (4.14)$$

vom Grad  $-1$ .

Bei Verschiebungen von Einfachen „von oben durch die Wand“ (siehe [Ja2]) wird alles annihilert. Für Verschiebungen „von unten durch die Wand“ ist die Situation nicht so einfach, jedoch können wir die folgenden Multiplizitäten bestimmen. (Siehe auch Korollar 4.4.11.)

**Satz 4.4.8.** *Sei  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$ . Dann gilt:*

$$[\theta_s L(xs \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \pm 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist  $L(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle$  ein Untermodul und  $L(xs \cdot 0)\langle -1 \rangle$  ein Quotient.

*Beweis:* Wir wissen (siehe bspw. [Ja2, 4.13 (3')]), daß nach dem Vergessen der Graduierung  $[\theta_s L(xs \cdot 0) : L(xs \cdot 0)] = 2$  gilt. Somit reicht es aus, zwei Shifts zu finden, für die obige Multiplizität nicht Null ist.

Nun liefert aber  $\bullet \otimes f$  wie in (4.11) eine Inklusion  $L(xs \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s L(xs \cdot 0)$  vom Grad 1. Andererseits definiert

$$\begin{aligned} h : \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, L(xs \cdot 0)) \otimes_A \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, L(xs \cdot 0)) \\ f \otimes g &\mapsto f \circ m(g), \end{aligned}$$

mit  $m$  wie in (4.14) eine Surjektion vom Grad 1 in die andere Richtung. Insgesamt ist das gerade die Behauptung.  $\diamond$

Insbesondere liefert das die Unabhängigkeit (bis auf Isomorphie) des induktiv definierten graduierten Lifts von  $\nabla(x \cdot 0)$  von der reduzierten Darstellung von  $x$ . Für diese Lifts gilt das

**Korollar 4.4.9.** *Für alle  $x \in W$  gilt*

$$[\nabla(x \cdot 0) : L(x \cdot 0)\langle i \rangle] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq 0 \\ 1 & \text{falls } i = 0. \end{cases}$$

*Beweis:* Die Aussage folgt induktiv, beginnend mit  $x = w_o$ , aus dem Satz unter Verwendung der Aussage des Satzes 4.4.6.  $\diamond$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir nun den folgenden

**Satz 4.4.10.** *Für  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$  erhalten wir folgende exakte Sequenzen von graduierten Moduln:*

$$\Delta(x \cdot 0) \xrightarrow{j} \theta_s \Delta(xs \cdot 0) \xrightarrow{k} \Delta(xs \cdot 0)\langle -1 \rangle, \quad (4.15)$$

$$\nabla(xs \cdot 0) \xrightarrow{k} \theta_s \nabla(x \cdot 0) \xrightarrow{j} \nabla(x \cdot 0)\langle -1 \rangle. \quad (4.16)$$

*Beweis:* Es gilt  $\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\theta_s \Delta(xs \cdot 0), \Delta(xs \cdot 0)) = 1$ . Somit ist jede solche Abbildung homogen. Wir wollen zeigen, daß sie mit unseren Konventionen eine homogene Abbildung vom Grad 1 ist, indem wir sie explizit konstruieren.

Wir betrachten nun die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} h : \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(xs \cdot 0)) \otimes_A \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(xs \cdot 0)) \\ f \otimes g &\mapsto f \circ m(g), \end{aligned}$$

wobei  $m$  wie in (4.14) definiert sei. Diese Abbildung ist ein Rechts- $A$ -Modulmorphismus vom Grad 1 und nichttrivial, also bis auf einen Skalar genau die gesuchte Abbildung. Somit erhalten wir eine Sequenz graduierter Moduln

$$\Delta(x \cdot 0) \xrightarrow{j} \theta_s \Delta(xs \cdot 0) \xrightarrow{k} \Delta(xs \cdot 0)\langle -1 \rangle,$$

wobei noch zu klären ist, ob  $j$  graderhaltend ist.

Wir wissen aber, daß  $v(\theta_s \Delta(xs \cdot 0)) \cong v(\theta_s \Delta(x \cdot 0))$  und unzerlegbar ist. Mit Satz 4.4.3 folgt die Behauptung. Für die dualen Vermamoduln läuft das Argument völlig analog.  $\diamond$

Falls wir auf die Benutzung der Kazhdan-Lusztig-Theorie verzichten, erhalten wir dennoch das folgende

**Korollar 4.4.11.** *Mit den Voraussetzungen des Satzes gilt:*

$$[\theta_s L(xs \cdot 0) : L(x \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.17)$$

*Beweis:* folgt direkt aus der Sequenz (4.15) und Korollar 4.4.4.  $\diamond$

**Korollar 4.4.12.** *Für  $x \in W$  und eine einfache Spiegelung  $s$  mit  $xs > x$  gelten die folgenden Isomorphismen graduierter Moduln:*

$$\theta_s \Delta(x \cdot 0) \cong \theta_s \Delta(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle \quad (4.18)$$

$$\theta_s \nabla(x \cdot 0) \cong \theta_s \nabla(xs \cdot 0)\langle -1 \rangle. \quad (4.19)$$

*Beweis:* Die Behauptung folgt direkt mit den Sätzen 4.4.3 und 4.4.6.  $\diamond$

**Korollar 4.4.13.** *Für  $x \in W$  ist  $I(x \cdot 0)$  injektive Hülle von  $L(x \cdot 0)$ .*

*Beweis:* Nach Definition ist  $I(x \cdot 0)$  unzerlegbar und injektiv. Durch die induktive Konstruktion (siehe 4.13) erhalten wir mit vorigem Korollar und Satz 4.4.6 eine graderhaltende Injektion  $\nabla(x \cdot 0) \hookrightarrow I(x \cdot 0)$ . Also folgt die Behauptung aus Korollar 4.4.9.  $\diamond$

**Korollar 4.4.14.** *Mit den Voraussetzungen des Satzes gilt für die Multiplizitäten:*

$$[\Delta(x \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* Angenommen, es gelte  $[\Delta(x \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] \neq 0$ . Nach Satz 4.4.8 gilt

$$[\theta_s \Delta(x \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle k \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j \pm 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also

$$[\theta_s \Delta(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle : L(xs \cdot 0)\langle k \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j \pm 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Funktorialität also

$$[\Delta(x \cdot 0)\langle 1 \rangle : L(xs \cdot 0)\langle j + 1 \rangle] = 1 \text{ und } [\Delta(xs \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle j - 1 \rangle] = 1.$$

Andererseits ist nach Korollar 4.4.4 aber  $L(xs \cdot 0)$  der Kopf von  $\Delta(xs \cdot 0)$ , also  $j = 1$  und die Behauptung folgt.  $\diamond$

**Korollar 4.4.15.**

$$[\nabla(x \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* läuft analog zu (oder durch Dualisierung von) Korollar 4.4.14.  $\diamond$

## 4.5 Graduierung und Dualität

Wir wollen nun einen Lift des Dualitätsfunktors auf  $\mathcal{O}_0$  definieren. Mit dessen Hilfe können wir dann zeigen, daß duale Moduln von graduierbaren Moduln ebenfalls graduierbar sind. Der Dualitätsfunktors  $\star$  (zur Definition siehe Abschnitt 1.5) ist exakt, deswegen reicht es aus, einen Lift auf Projektiven zu erklären, da  $\text{gmod} - A$  genügend Projektive hat. Die Projektiven Decken von Einfachen werden unter  $\star$  zu injektiven Hüllen. Die einfachen Moduln bleiben fix.

### 4.5.1 Eigenschaften der „graduierten Dualität“

Wir stellen nun die Forderung an unseren Lift, daß er den (Lift des) einfachen Vermamodul (im Grad Null) fix lassen und mit Verschiebungen vertauschen soll.

Dadurch ist diese „graduierte Dualität“ bereits eindeutig durch ihre Wirkung auf dem dominanten Vermamodul festgelegt. (Denn dadurch erhält man die Wirkung auf allen Projektiven. Für einen beliebigen Modul wähle man eine projektive Auflösung und dualisiere.)

Die gesamte Information liefert das folgende

**Lemma 4.5.1.** Falls ein Lift  $d$  der Dualität existiert, muß für  $x \in W$  und  $j \in \mathbb{Z}$  gelten:

$$\begin{aligned} d \Delta(x \cdot 0)\langle j \rangle &\cong \nabla(x \cdot 0)\langle -j \rangle, \\ d L(x \cdot 0)\langle j \rangle &\cong L(x \cdot 0)\langle -j \rangle \text{ und} \\ d P(x \cdot 0) &\cong I(x \cdot 0). \end{aligned}$$

*Beweis:* Dualisieren wir die Sequenz (4.15) für  $xs = w_o$ , erhalten wir

$$d(\Delta(w_o \cdot 0)\langle -1 \rangle) \hookrightarrow \theta_s \nabla(w_o \cdot 0) \twoheadrightarrow \nabla(w_o s \cdot 0)\langle j \rangle$$

für ein bestimmtes  $j$ . Damit muß nach Satz 4.4.10 und Korollar 4.4.12 aber  $j = 0$  sein und wir erhalten  $d(\Delta(w_o s \cdot 0)) \cong \nabla(w_o s \cdot 0)$  und  $d(\Delta(w_o \cdot 0)\langle -1 \rangle) \cong \nabla(w_o \cdot 0)\langle 1 \rangle$ . Induktiv erhalten wir daraus die erste Behauptung.

Aufgrund der Lemmata 4.4.9 und 4.4.4 gilt dann aber auch die zweite Behauptung.

Für die letzte Aussage reicht es damit aus, zu zeigen, daß  $I(x \cdot 0)$  injektive Hülle von  $L(x \cdot 0)$  ist, da  $P(x \cdot 0)$  dessen projektive Decke ist. Das ist gerade Korollar 4.4.13.  $\diamond$

### 4.5.2 Existenz einer „graduierten Dualität“

Für einen  $C$ -Modul können wir durch  $M^* := \text{Hom}_C(M, \mathbb{C}) = \text{Hom}_C(M, \mathbb{C})$  eine Dualität auf  $C - \text{gmof}$  definieren, da  $C$  kommutativ ist. Nach [So6] sind die Bilder  $\mathbb{V}P(x \cdot 0)$  der Projektiven unter  $\mathbb{V}$  selbstdual. Dies gilt mit unseren Konventionen an den Grad sogar als graduierte  $C$ -Moduln. Mit geeigneten Isomorphismen (eindeutig bis auf Skalar) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathfrak{g}}(P) &= \text{End}_{\mathfrak{g}}\left(\bigoplus_{x \in W} P(x \cdot 0)\right) \\ &= \text{End}_{\mathfrak{g}}\left(\bigoplus_{x \in W} \mathbb{V}P(x \cdot 0)\right) \\ &= \text{End}_{\mathfrak{g}}\left(\bigoplus_{x \in W} d \mathbb{V}P(x \cdot 0)\right) \\ &= \text{End}_{\mathfrak{g}}(P)^{opp}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Damit erhalten wir eine Dualität  $*$  auf  $\text{mof} - A$  durch  $M^* := \text{Hom}_A(M, A)$  für  $M \in \text{mof} - A$  und sogar eine Dualität  $\otimes$  auf  $\text{gmof} - A$  durch  $(M^{\otimes})_{-i} := M_i^*$ .

Diese Dualität hat die Eigenschaft, daß sie kontravariant und exakt ist. Sie bildet einen einfachen Modul  $L\langle j \rangle$  im Grad  $j$  auf  $L\langle -j \rangle$  ab. Dadurch wird seine projektive Decke auf die injektive Hülle von  $L\langle -j \rangle$ , also des einfachen Moduls im Grad  $-j$  abgebildet. Man kann nachprüfen, daß sie außerdem mit Verschiebung vertauscht. Dazu sei  $M \in \text{gmof} - A$  und

$V := \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P\langle -1 \rangle)$  der graduierte  $A$ -Bimodul, der die Verschiebung  $\theta_s$  durch die Wand beschreibt. Dann erhalten wir folgende Isomorphismen graduerter  $A$ -Rechtsmoduln:

$$\begin{aligned} (\theta_s M^\otimes)^\otimes &\cong \text{Hom}_A(M^\otimes \otimes_A V, A) \\ &\cong \text{Hom}_A(M^\otimes, \text{Hom}_A(V, A)) \\ &\cong \text{Hom}_A(A, M \otimes_A V^\otimes) \\ &\cong M \otimes_A V^\otimes \\ &\cong M \otimes_A V \\ &\cong \theta_s M. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Isomorphie  $V \cong V^\otimes$  benutzt, welche sich durch die Wahlen in (4.20) ergibt.

## 4.6 Graduierung, Kombinatorik und Heckealgebra

Im folgenden Abschnitt wollen wir die graduierten Verschiebungsfunktoren mit Hilfe der Heckealgebra kombinatorisch beschreiben. Dafür führen wir eine „graduierte Grothendieckgruppe“ von  $\mathcal{O}_0$  ein.

Durch die Festlegung der Lifts von Projektiven bilden die graduierbaren Objekte eine graduierte Kategorie im Sinne von Abschnitt 4.2.2. Das liefert die Motivation zur Einführung dieser „graduierten Grothendieckgruppe“.

**Definition 4.6.1.** a) Für einen graduierten Ring  $B$  betrachten wir die graduierte Kategorie  $\text{gmof } -B$  aller endlichdimensionaler graduerter  $B$ -Rechtsmoduln. Ihre Grothendieckgruppe  $[\text{gmof } -B]$  wird zur graduierten Gruppe durch  $\langle n \rangle [M] := [M \langle n \rangle]$ .

b) Ist insbesondere  $B = A$  der Endomorphismenring des projektiven Erzeugers  $P$  von  $\mathcal{O}_0$ , so bezeichnen wir auch mit  $[\mathcal{O}_0^\mathbb{Z}] = [\text{gmof } -A]$  die zugehörige Grothendieckgruppe und nennen sie die *graduierte Grothendieckgruppe* von  $\mathcal{O}_0$ .

Für einen graduierten  $A$ -Modul  $M$  gilt  $[M] = \bigoplus_{i=1}^n [L_i \langle m_i \rangle]$  mit einfachen Moduln  $L_i$  im Grad  $m_i$ . Genauer gilt die Gleichung

$$[M] = \bigoplus_{x \in W} [M : L(x \cdot 0) \langle i \rangle] [L(x \cdot 0) \langle i \rangle]. \quad (4.21)$$

Es ist also  $[M : L(x \cdot 0) \langle i \rangle] = \dim \text{Hom}(P(x \cdot 0) \langle i \rangle, M)$ . Es gilt insbesondere (da es auch nach dem Vergessen der Graduierung der Fall ist)

$$[\Delta(x \cdot 0) : L(y \cdot 0) \langle i \rangle] \neq 0 \implies y \geq x.$$

Außerdem ist

$$[\Delta(x \cdot 0) : L(x \cdot 0) \langle i \rangle] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq 0 \\ 1 & \text{falls } i = 0. \end{cases}$$

Das bedeutet, daß  $\{[\Delta(x \cdot 0) \langle n \rangle] \mid x \in W, n \in \mathbb{Z}\}$  und  $\{[L(x \cdot 0) \langle n \rangle] \mid x \in W, n \in \mathbb{Z}\}$  jeweils eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $[\mathcal{O}_0^\mathbb{Z}]$  bilden. Durch  $v^n [M] := [M \langle n \rangle]$  wird  $[\mathcal{O}_0^\mathbb{Z}]$  zu einem  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -Modul.

Das liefert uns nun eine graduierte Form von Lemma 4.1.1:

**Lemma 4.6.2.** *Wir erhalten folgende Isomorphismen von abelschen Gruppen*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & [\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}] & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[W] \\ v^n H_x & \mapsto & [\Delta(x \cdot 0)\langle n \rangle] & \mapsto & v^n x^{-1} \end{array}$$

*Beweis:* folgt mit Lemma 4.1.1 direkt aus den Definitionen. In der Tat sind das sogar  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -Modulmorphisismen.  $\diamond$

Wir können nun die wichtigsten Ergebnisse zusammenfassen in dem folgenden

**Hauptsatz 4.6.3 (Graduierte Kombinatorik).**

*Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{v^n H_x \mapsto [\Delta(x \cdot 0)\langle n \rangle]} & [\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}] \\ \cdot(H_s + v) \downarrow & & \downarrow \theta_s \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{v^n H_x \mapsto [\Delta(x \cdot 0)\langle n \rangle]} & [\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}]. \end{array} \quad (4.22)$$

*Beweis:* folgt aus Lemma 4.6.2, den Sätzen 4.4.3 und 4.4.10.  $\diamond$

Unser Ziel ist es natürlich nun, die den projektiven und einfachen Moduln entsprechenden Elemente in der Heckealgebra zu beschreiben.

Wir definieren die „Vermamultiplizitäten“  $[M : \Delta(x \cdot 0)\langle i \rangle]$  durch die Gleichung

$$[M] = \bigoplus_{x \in W} [M : \Delta(x \cdot 0)\langle i \rangle][\Delta(x \cdot 0)\langle i \rangle]. \quad (4.23)$$

**Definition 4.6.4.** Wir sagen, ein Modul  $M \in \text{gmof} - A$  besitzt eine *graduierte Vermafabne*, falls es eine Filtrierung graduierter  $A$ -Moduln von  $M$  gibt, deren Subquotienten alle isomorph zu Lifts von gewissen  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \Delta(x \cdot 0))$  sind.

Die in (4.23) definierten Multiplizitäten geben für Projektive in der Tat die Vermamultiplizitäten wieder. Denn es gilt die folgende Aussage

**Satz 4.6.5.** (vgl. [Ja3]) *Sei  $\tilde{M}$  ein graduierbarer Modul in  $\mathcal{O}_0$  mit Lift  $M$ . Es gelte für alle  $x \in W$  und  $j \in \mathbb{Z}$*

$$\text{Ext}_{\text{gmof} - A}^1(M, \nabla(x \cdot 0)\langle j \rangle) = 0.$$

*Dann besitzt  $M$  eine graduierte Vermafabne.*

*Beweis:* Sei  $y \in W$  maximal, so daß ein  $i \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $\text{Hom}_{\text{gmof} - A}(M, L(y \cdot 0)\langle i \rangle) \neq 0$ . Sei nun  $x \geq y$  ein beliebiges Element der Weylgruppe. Die exakte Sequenz

$$L(x \cdot 0)\langle j \rangle \hookrightarrow \nabla(x \cdot 0)\langle j \rangle \twoheadrightarrow K$$

induziert die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof}-A}(M, L(x \cdot 0)\langle j \rangle) &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof}-A}(M, \nabla(x \cdot 0)\langle j \rangle) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof}-A}(M, K) \rightarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathrm{gmof}-A}^1(M, L(x \cdot 0)\langle j \rangle) &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{gmof}-A}^1(M, \nabla(x \cdot 0)\langle j \rangle) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{gmof}-A}^1(M, K) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nun hat aber  $K$  bis auf Shift nur Kompositionsfaktoren der Form  $L(z \cdot 0)$  mit  $z > y$ , also gilt  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof}-A}(M, K) = 0$ . Mit der Voraussetzung folgt also  $\mathrm{Ext}_{\mathrm{gmof}-A}^1(M, L(x \cdot 0)\langle j \rangle) = 0$  für alle  $j$ . Insbesondere liefert das  $\mathrm{Ext}_{\mathrm{gmof}-A}^1(M, \mathrm{rad} \Delta(y \cdot 0)\langle j \rangle) = 0$  für alle  $j$ . Damit induziert die exakte Sequenz

$$\mathrm{rad} \Delta(y \cdot 0) \hookrightarrow \Delta(y \cdot 0) \twoheadrightarrow L(y \cdot 0)$$

eine Surjektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof}-A}(M, \Delta(y \cdot 0)\langle j \rangle) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof}-A}(M, L(y \cdot 0)\langle j \rangle).$$

Somit liftet jeder Morphismus von  $M$  nach  $L(y \cdot 0)$  zu einer Abbildung nach  $\Delta(y \cdot 0)$ . Nach Definition des Vermamoduls ist diese aber surjektiv. Der Kern dieser Abbildung erfüllt wiederum die Voraussetzungen des Satzes und wir können sukzessive eine graduierte Vermafabne basteln.  $\diamond$

**Korollar 4.6.6.** *Alle Projektiven besitzen eine graduierte Vermafabne.*

*Beweis:* Für zwei graduierte  $A$ -Moduln  $M$  und  $N$  gibt es einen Vektorraumisomorphismus

$$\bigoplus_j \mathrm{Ext}_{\mathrm{gmof}-A}^1(M\langle j \rangle, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathrm{mof}-A}^1(\mathrm{v} M, \mathrm{v} N).$$

Also erfüllen die Projektiven die Voraussetzung des Satzes.  $\diamond$

**Korollar 4.6.7.** *Alle Injektiven besitzen eine graduierte Nablafabne, d.h. eine (graduierte) Filtrierung mit graduierten dualen Vermamoduln als Subquotienten. Genauer gilt für  $x, y \in W$  und  $j \in \mathbb{Z}$  sogar*

$$[P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)\langle j \rangle] = [I(x \cdot 0) : \nabla(y \cdot 0)\langle -j \rangle].$$

*Beweis:* folgt aus der Dualisierung der obigen Aussagen.  $\diamond$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch einige Standardaussagen erwähnen, auf die wir später noch zurückgreifen werden.

**Lemma 4.6.8.** *Für  $x, y \in W$  und  $i \in \mathbb{Z}$  gilt*

$$\dim \mathrm{hom}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)\langle i \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \text{ und } i = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* Mit Standardargumenten (siehe bspw. [KK]) erhalten wir, daß nur dann ein nicht-trivialer Morphismus existiert, falls  $y \leq x$  und  $x \leq y$  gilt. Dann gilt aber aufgrund der Lemmata 4.4.4 und 4.4.9 auch  $i = 0$ .  $\diamond$

Daraus erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den verschiedenen Multiplizitäten:

**Lemma 4.6.9 (Reziprozität).**

Für  $x, y \in W$  und  $i \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\begin{aligned} [P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)\langle i \rangle] &\stackrel{(a)}{=} [\nabla(y \cdot 0) : L(x \cdot 0)\langle -i \rangle] \\ &\stackrel{(b)}{=} [\Delta(y \cdot 0) : L(x \cdot 0)\langle i \rangle] \end{aligned}$$

*Beweis:* Für  $y > x$  ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also  $y \leq x$ . Dann gilt mit Lemma 4.6.8

$$\begin{aligned} \dim \text{hom}(P(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)\langle i \rangle) &= \sum_{z, j} [P(x \cdot 0) : \Delta(z \cdot 0)\langle j \rangle] \dim \text{hom}(\Delta(z \cdot 0)\langle j \rangle, \nabla(y \cdot 0)\langle i \rangle) \\ &= [P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)\langle i \rangle]. \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} [P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)\langle i \rangle] &= \dim \text{hom}(P(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)\langle i \rangle) \\ &= [\nabla(y \cdot 0)\langle i \rangle : L(x \cdot 0)] \\ &= [\nabla(y \cdot 0) : L(x \cdot 0)\langle -i \rangle]. \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung (a). Die zweite Behauptung ist nach Lemma 4.5.1 gerade die duale Aussage.  $\diamond$

Verwenden wir nun die Ergebnisse der Kazhdan-Lusztig-Theorie, so erhalten wir die folgende Aussage: (Mit der Beschreibung des Endomorphismenringes  $A$  als Koszulring (vgl. [BGS]) ist diese Aussage natürlich direkt ablesbar.)

**Lemma 4.6.10.** *Die Vermamoduln  $\Delta(x \cdot 0)$  und die Projektiven  $P(x \cdot 0)$  sind nichtnegativ graduiert. Insbesondere ist also der Endomorphismenring  $A$  des projektiven Erzeugers nichtnegativ graduiert.*

*Beweis:* Aufgrund der Kazhdan-Lusztig-Theorie wissen wir, daß, für  $x = s_1 \cdot \dots \cdot s_r$  eine reduzierte Zerlegung, die Koeffizienten von  $(H_{s_1} + v) \cdot \dots \cdot (H_{s_r} + v)$  in der Standardbasis Polynome, d.h. Elemente aus  $\mathbb{Z}[v]$  sind. Mit Lemma 4.6.9 sind somit alle Vermamoduln nichtnegativ graduiert und damit erst recht alle Projektiven.  $\diamond$

Kazhdan und Lusztig definierten eine schieflineare Dualität auf der Heckealgebra. Mit den Bezeichnungen aus [So4] ist sie gegeben durch  $H_x \mapsto \overline{H_x} := (H_{x^{-1}})^{-1}$ . Zu jedem  $x \in W$  erhält man dann ein selbstduales Element  $\underline{H}_x$ . Wir wollen nun zeigen, daß diese Elemente gerade unseren Projektiven entsprechen.

**Satz 4.6.11.** *Sei  $x = s_1 \cdot \dots \cdot s_r$  eine reduzierte Zerlegung. Dann entspricht die Isomorphieklasse  $[P(x \cdot 0)] \in [\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}]$  des projektiven Moduls  $P(x \cdot 0)$  dem Heckealgebraelement  $\underline{H}_x$ .*

*Beweis:* Der Modul  $P(x \cdot 0)$  ist nach Konstruktion ein direkter Summand  $N$  von  $M := \theta_{s_r} \cdot \dots \cdot \theta_{s_1} \Delta(0)$ . Nach Satz 4.22 entspricht nun  $[M]$  dem Heckealgebrenenelement  $(H_{s_1} + v) \cdot \dots \cdot (H_{s_r} + v)$ . Wir wissen, daß  $N$  eine graduierte Vermafahne besitzt. Angenommen  $H_y$  tritt in dem  $N$  entsprechenden Element in der Heckealgebra im Grad Null auf. Dann wäre also nach Lemma 4.6.10  $[P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)] \neq 0$ . Mit der Reziprozitätsformel also  $0 \neq [P(x \cdot 0) : \Delta(y \cdot 0)] = [\Delta(y \cdot 0) : L(x \cdot 0)] = \dim \text{hom}(\Delta(y \cdot 0), \nabla(x \cdot 0))$ , was im Widerspruch zu Lemma 4.6.8 steht, falls  $x \neq y$ . Ein Induktionsargument liefert, daß  $N$  genau dem Element  $\underline{H}_x$  entspricht.  $\diamond$

Das dem einfachen Modul  $L(x \cdot 0)$  entsprechende Element in der Heckealgebra ist mit den Bezeichnungen von [Lu] gerade  $D'_x$ . Um dies nachzuprüfen verwende man die Definition der selbstdualen  $C'_x$  mit der Gleichung [Lu, 5.1.7].

## 4.7 Verschiebungen „auf die Wand und aus der Wand“

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch kurz erläutern, wie man auch Verschiebungen zwischen verschiedenen Blöcken graduieren kann. Wir verzichten allerdings auf die Ausführung einiger Details.

Vermöge der Einschränkung auf die Invarianten der Koinvarianten erhalten wir analog zum regulären Fall auch eine Graduierung des Endomorphismenringes des minimalen projektiven Erzeugers von singulären Blöcken. Es soll wiederum die Konvention gelten, daß der Lift von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  (mit den Bezeichnungen aus Satz 1.1.1) als höchsten auftretenden Grad  $l(x)$  hat. Wir wählen dabei  $x$  stets als kürzesten Repräsentanten aus  $W^\lambda$ . Dann sind wiederum alle Projektiven graduierbar. Der Kopf  $L(x \cdot \lambda)$  des „graduierten Moduls“  $P(x \cdot \lambda)$  ist wiederum vom Grad Null.

Sei nun  $\lambda$  ein semireguläres ganzes Gewicht, also  $|W_\lambda| = \{1, s\} = 2$ . Seien  $P$  und  $P_\lambda$  die minimalen projektiven Erzeuger des trivialen Blocks beziehungsweise des Blockes  $\mathcal{O}_\lambda$ . Der Modul  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_\lambda, \theta_0^\lambda P) = \text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \text{res } \mathbb{V}P)$  wird via Komposition zu einem graduierten Links- $A$ -Modul.

Wir erhalten den folgenden

### Satz 4.7.1 (Verschiebung auf die Wand).

1. Mit den obigen Bezeichnungen ist der Funktor  $\theta_0^\lambda$  graduierbar mit Lift

$$\bullet \otimes_A \text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \text{res } \mathbb{V}P).$$

2. Die einfachen Moduln werden unter diesem Funktor annihiliert oder auf im Grad um  $-1$  geshiftete Einfache abgebildet.

3. Mit  $xs > x$  gilt für die Vermamoduln:

$$\begin{aligned} \theta_0^\lambda \Delta(x \cdot 0) &\cong \Delta(x \cdot \lambda) \quad \text{und} \\ \theta_0^\lambda \Delta(xs \cdot 0) &\cong \Delta(xs \cdot \lambda)\langle -1 \rangle \cong \Delta(x \cdot \lambda)\langle -1 \rangle \end{aligned}$$

*Beweis:* Die erste Aussage folgt wiederum aus Lemma 4.4.1.

Für die zweite Aussage können wir uns auf den Fall beschränken, in dem der einfache Modul nicht annihiliert wird. Sei also  $xs > x$ . Nach Konstruktion der Projektiven ist  $P(xs \cdot 0)$  ein direkter Summand von  $\theta_s P(x \cdot 0)$ . Genauer gibt es mit unserer Konvention an die Graduierung eine Zerlegung als graduierte  $C$ -Moduln

$$\mathbb{V}P(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{V}\text{REST} = C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P(x \cdot 0)$$

für einen geeigneten REST. Somit ergibt die Einschränkung auf  $C^\lambda$ -Moduln eine Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbb{V}P(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{V}\text{REST} &= \mathbb{V}P(x \cdot 0) \oplus \mathbb{V}P(x \cdot 0)\langle 2 \rangle \\ &= \mathbb{V}P(x \cdot \lambda) \oplus \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)\langle 2 \rangle \oplus N. \end{aligned} \tag{4.24}$$

für passendes  $N$ . Wir erhalten nun mit dieser Zerlegung einen Morphismus von  $C^\lambda$ -Moduln

$$\tilde{h} : \mathbb{V}P_\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{V}P(x \cdot \lambda) \rightarrow P(x \cdot \lambda)\langle 2 \rangle \rightarrow \mathbb{V}P(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle.$$

Die Komposition mit der kanonischen Inklusion liefert dann eine homogene Abbildung  $h : \mathbb{V}P_\lambda \rightarrow \mathbb{V}P$  vom Grad  $-1$ .

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, \mathbb{V}P(xs \cdot 0)) \otimes_A \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathrm{res} \mathbb{V}P) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)\langle 1 \rangle) \\ f \otimes g &\longmapsto p_2 \circ (\mathrm{res}(f) \circ g), \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei  $p_2$  die Projektion auf den zweiten Summanden in (4.24) bezeichnet. Diese Abbildung ist wohldefiniert und mit der Graduierung verträglich. Nimmt man für  $f$  die kanonische Projektion auf den direkten Summanden  $\mathbb{V}P(xs \cdot 0)$ , so ist das Bild von  $f \otimes h$  nichttrivial, genauer ist es die kanonische Projektion  $P_\lambda \twoheadrightarrow P(x \cdot \lambda)$  im Grad  $-1$ . Das liefert die zweite Behauptung.

Vergessen wir die Graduierung, sind die Aussagen in Punkt 3 klar. Wir müssen uns also nur noch um die entsprechenden Shifts bemühen. Nun gilt aber

$$[\Delta(x \cdot 0) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.26)$$

also aufgrund des vorher Bewiesenen

$$[\theta_0^\lambda \Delta(x \cdot 0) : L(x \cdot \lambda)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.27)$$

Das liefert somit den ersten Isomorphismus. Den zweiten zeigt man entsprechend.

Wir können auch eine entsprechende Abbildung wie in (4.25) wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, \mathbb{V}P(x \cdot 0)) \otimes_A \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathrm{res} \mathbb{V}P) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathbb{V}P(x \cdot \lambda)) \\ f \otimes g &\longmapsto p_1 \circ (\mathrm{res}(f) \circ g), \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $p_1$  die Projektion auf den ersten Summanden in 4.24. Die Abbildung ist mit der Graduierung verträglich. Wir wählen nun für  $f$  die Abbildung

$$\mathbb{V}P \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbb{V}P(xs \cdot 0) \rightarrow C \otimes_{C^s} \mathbb{V}P(x \cdot 0)\langle -1 \rangle \xrightarrow{\mathrm{mult}} \mathbb{V}P(x \cdot 0)\langle -1 \rangle \rightarrow \mathbb{V}P(x \cdot 0).$$

Sie ist homogen vom Grad 1. Für  $g$  nehmen wir die Abbildung

$$\mathbb{V}P_\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{V}P(x \cdot \lambda) \rightarrow \mathbb{V}P(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbb{V}P \quad (4.28)$$

vom Grad  $-1$ . Dann ist das Bild von  $f \otimes g$  nicht trivial und graderhaltend und liefert nach Definition gerade den einfachen Kopf des projektiven Moduls. Das bestätigt also die Behauptung.  $\diamond$

Nun ist aber andererseits auch  $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \theta_\lambda^0 P_\lambda) = \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda)$  graduiert und wir erhalten den folgenden

**Satz 4.7.2 (Verschiebung aus der Wand).**

1. Mit den obigen Bezeichnungen ist der Funktor  $\theta_\lambda^0$  graduerbar mit Lift

$$\bullet \otimes_{A_\lambda} \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda\langle -1 \rangle).$$

2. Für  $xs > x$  haben wir natürliche Isomorphismen graduerter Moduln

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^0 \Delta(x \cdot \lambda) &\cong \theta_s \Delta(x \cdot 0) && \text{und} \\ \theta_\lambda^0 \Delta(xs \cdot \lambda)\langle -1 \rangle &\cong \theta_s \Delta(xs \cdot 0). \end{aligned}$$

3. Für  $xs > x$  gilt:  $\theta_\lambda^0 P(x \cdot \lambda) \cong P(xs \cdot 0)$  als graduierte Moduln.

4. Für die einfachen Moduln gilt für  $xs > x$ :

$$[\theta_\lambda^0 L(x \cdot \lambda) : L(x \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

beziehungsweise

$$[\theta_\lambda^0 L(x \cdot \lambda) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in \{0, 2\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* Die erste Aussage folgt wiederum aus den Vorbemerkungen und Lemma 4.4.1. Die zweite Aussage zeigen wir mit Induktion über die Länge von  $x$ . Für  $x = e$  ist der natürliche Isomorphismus gegeben durch die Komposition der Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathbb{V}\Delta(\lambda)) \otimes_{A_\lambda} \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda\langle -1 \rangle) & & f \otimes g \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}\Delta(\lambda)\langle -1 \rangle) & & (\text{id} \otimes f) \circ g \\ \parallel \wr & & \\ \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}\Delta(0)\langle -1 \rangle) & & (\text{id} \otimes f) \circ g \\ \uparrow \wr & & \uparrow \\ \text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathbb{V}\Delta(0)) \otimes_{A_\lambda} \text{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda\langle -1 \rangle) & & f \otimes g \end{array}$$

Der zweite Isomorphismus des Diagramms gilt, da  $\mathbb{V}\Delta(\lambda) \cong \mathbb{C}_{triv} \cong \mathbb{V}\Delta(0)$ .

Nun unterscheiden wir für  $x \in W$  mit  $xs > x$  und  $t$  eine einfache Spiegelung mit  $xt > x$  die beiden Fälle:

$t \neq s$ : Dann existieren die kanonischen Inklusionen  $\Delta(xt \cdot 0)\langle 1 \rangle \hookrightarrow \Delta(x \cdot 0)$  und entsprechend  $\Delta(xt \cdot \lambda)\langle 1 \rangle \hookrightarrow \Delta(x \cdot \lambda)$ . Somit ist der induzierte natürliche Isomorphismus  $\theta_s \Delta(xt \cdot 0) \cong \theta_\lambda^0 \Delta(xt \cdot \lambda)$  graderhaltend.

$t = s$ : In diesem Fall erhalten wir einen induzierten graderhaltenden Isomorphismus

$$\theta_s \Delta(xt \cdot 0)\langle 1 \rangle \cong \theta_\lambda^0 \Delta(xt \cdot \lambda).$$

Induktiv liefert das somit die zweite Aussage.

Die Behauptung für die Projektiven gilt, wenn man die Graduierung ignoriert. Mit Punkt 2 folgt aber auch, daß diese Isomorphismen graderhaltend sind.

Für die einfachen folgt daraus mit Satz 4.7.1

$$\begin{aligned} [\theta_\lambda^0 L(x \cdot \lambda) : L(x \cdot 0)\langle j \rangle] &= [\theta_s L(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle : L(x \cdot 0)\langle j \rangle] \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } j = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [\theta_\lambda^0 L(x \cdot \lambda) : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] &= [\theta_s L(xs \cdot 0)\langle 1 \rangle : L(xs \cdot 0)\langle j \rangle] \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in \{0, 2\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit sind alle Behauptungen gezeigt.  $\diamond$

Es besteht folgende Zusammenhang zur graduierten Verschiebung „durch die Wand“:

**Korollar 4.7.3.** *Es gibt eine natürliche Äquivalenz von (graduierten) Funktoren*

$$\theta_s \cong \theta_\lambda^0 \theta_0^\lambda.$$

*Beweis:* Aufgrund des Satzes sind die natürlichen Isomorphismen mit der Graduierung verträglich.  $\diamond$

Ein sehr nützliches Hilfsmittel liefert der folgende Satz über die Adjungiertheit der graduierten Versionen der Verschiebungsfunktoren. Einerseits stellt er eine Verallgemeinerung des nichtgraduierten Falls dar, andererseits sind die graduierten Versionen eben nur bis auf einen Shift adjungiert zueinander.

**Satz 4.7.4 (Adjungiertheit).**

*Die graduierten Formen der Verschiebungen auf und aus der Wand sind bis auf einen Shift zueinander adjungiert. Genauer gelten die Adjunktionen*

$$\left( \theta_0^\lambda, \theta_\lambda^0 \langle -1 \rangle \right) \quad \text{und} \quad \left( \theta_\lambda^0, \theta_0^\lambda \langle 1 \rangle \right).$$

*Beweis:* Sei  $M \in \text{gmof} - A$  und  $N \in \text{gmof} - A_\lambda$ . Wir erhalten folgende Kette von Isomorphismen graduiertes Vektorräume:

$$\text{Hom}_{\text{gmof} - A_\lambda} (M \otimes_A \text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \text{res } \mathbb{V}P), N) \cong \text{Hom}_{\text{gmof} - A} (M, X)$$

mit  $X = \text{Hom}_{\text{gmof} - A_\lambda} \left( \underbrace{\text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \text{res } \mathbb{V}P)}_{:=Y}, N \right)$ . Nun gilt mit  $Y = \text{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \text{res } \mathbb{V}P)$

$$\begin{aligned} X &\cong \text{Hom}_{A_\lambda - \text{gmof}} (N^\otimes, Y^\otimes) \\ &\cong \text{Hom}_{A_\lambda - \text{gmof}} (N^\otimes, \text{Hom}_{\text{gmof} - A_\lambda} (Y, A_\lambda)) \\ &\cong \text{Hom}_{A_\lambda - \text{gmof}} (Y \otimes_{A_\lambda} N^\otimes, A_\lambda) \\ &\cong (Y \otimes_{A_\lambda} N^\otimes)^\otimes \\ &\cong N \otimes_{A_\lambda} Y^\otimes. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Andererseits haben wir aber nach einer Wahl von Isomorphismen  $\mathbb{V}Q \cong d\mathbb{V}Q$  für projektives  $Q$  auch graderhaltende Isomorphismen

$$\begin{aligned} Y^{\otimes} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(Y, A_\lambda) &\cong \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathrm{res} \mathbb{V}P, \mathbb{V}P_\lambda) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \widetilde{\mathrm{res} \mathbb{V}P}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda, \mathbb{V}P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda \langle -2 \rangle) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda \langle -1 \rangle \langle 1 \rangle), \end{aligned}$$

für einen geeigneten direkten Summanden  $\widetilde{\mathrm{res} \mathbb{V}P}$  von  $\mathrm{res} \mathbb{V}P$ . Insgesamt liefert das also

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A_\lambda}(\theta_0^\lambda M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(M, \theta_\lambda^0 N \langle -1 \rangle).$$

Für die andere Adjunktion betrachten wir graduierte Moduln  $M \in \mathrm{gmof} - A_\lambda$  und  $N \in \mathrm{gmof} - A$ . Es gilt nach dem Adjointness Theorem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A} \left( M \otimes_A \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda \langle -1 \rangle), N \right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(M, X)$$

mit  $X = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A_\lambda} \left( \underbrace{\mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda \langle -1 \rangle)}_{:=W}, N \right)$ . Nun gilt aber mit

$W = \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}P, C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda \langle -1 \rangle)$  analog zu (4.29)

$$X \cong N \otimes_A W^{\otimes}.$$

Andererseits erhalten wir

$$\begin{aligned} W^{\otimes} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(W, A) &\cong \mathrm{Hom}_C(C \otimes_{C^\lambda} \mathbb{V}P_\lambda \langle -1 \rangle, \mathbb{V}P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda \langle -1 \rangle, \mathrm{res} \mathbb{V}P) = \mathrm{Hom}_{C^\lambda}(\mathbb{V}P_\lambda, \mathrm{res} \mathbb{V}P) \langle -1 \rangle. \end{aligned}$$

Das liefert den graduierten Isomorphismus  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(\theta_\lambda^0 M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A_\lambda}(M, \theta_0^\lambda N \langle 1 \rangle)$ .  $\diamond$

**Korollar 4.7.5.** *Die graduierte Verschiebung  $\theta_s$  ist selbstadjungiert.*

*Beweis:* Der Satz impliziert unter Benutzung von Korollar 4.7.3

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(\theta_s M, N) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(\theta_0^\lambda M, \theta_0^\lambda N \langle 1 \rangle) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gmof} - A}(M, \theta_s N) \end{aligned}$$

$\diamond$

## 4.8 Harish-Chandra-Bimoduln und Graduierung

Die Ausführungen zur „graduierten“ Kategorie  $\mathcal{O}_0$  liefern mit der Äquivalenz von Kategorien aus [BG] auch eine Graduierung auf den Bimoduln mit trivialem zentralem Charakter von rechts. Ebenso liefert die graduierte Version des Verschiebungsfunktors  $\theta_s$  auf  $\mathcal{O}_0$  eine graduierte Form des unter der Äquivalenz induzierten Funktors, den wir ebenfalls mit  $\theta_s$  bezeichnen.

Andererseits erhalten wir aber auch eine Graduierung auf den Bimoduln mit trivialem zentralem Charakter von links. Der Funktor  $\theta_s$  auf  $\mathcal{O}_0$  induziert ebenfalls einen graduibaren Funktor  $\theta_s^r$  auf  ${}^1\mathcal{H}_0$ .

In diesem Kapitel untersuchen wir, inwiefern diese beiden Ansätze miteinander verträglich sind, und geben jeweils eine Kombinatorik für die graduierten Verschiebungsfunktoren  $\theta_s$  bzw.  $\theta_s^r$  an.

Insbesondere werden wir die Ergebnisse im folgenden Kapitel auf die Hauptserien  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \in {}^1\mathcal{H}_0^1$  anwenden.

Wir betrachten für jede natürliche Zahl  $n$  und  $I^n = \mathcal{U}(\ker \chi_0)^n$  die Unterkategorie  ${}^n\mathcal{H}_0$  bzw.  ${}^0\mathcal{H}_0^n$  von  ${}^0\mathcal{H}_0$  mit verallgemeinertem trivialem zentralem Charakter  $I^n$  von links bzw. von rechts.

Diese Blöcke haben jeweils genügend Projektive. Deren unzerlegbare stehen in Bijektion zu den Elementen der Weylgruppe. Wir bezeichnen die entsprechenden projektiven Decken von  $\mathcal{L}(\Delta(0), L(x \cdot 0))$  mit  ${}^nP(x \cdot 0)$  bzw.  $P^n(x \cdot 0)$ .

Damit ist

$$\mathbf{P}^n := \bigoplus_{x \in W} P^n(x \cdot 0)$$

ein minimaler projektiver Erzeuger von  ${}^0\mathcal{H}_0^n$ . Wir erhalten somit (analog zu 4.7) eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{aligned} {}^0\mathcal{H}_0^n &\xrightarrow{\sim} \text{mof} - \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n) \\ X &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n, X). \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für  ${}^n\mathcal{H}_0$  mit projektivem Erzeuger  ${}^n\mathbf{P} := \bigoplus_{x \in W} {}^nP(x \cdot 0)$ .

Wir betrachten den Kombinatorikfunktor  $\mathbb{V} : {}^0\mathcal{H}_0 \rightarrow S - \text{mof} - S$ . Sei  $S$  mit der in Konvention 4.3.6 definierten Graduierung versehen. Wir wählen für  $x = s_1 \cdot \dots \cdot s_r$  als Lift von  $\mathbb{V}\theta_{s_r} \cdot \dots \cdot \theta_{s_1}(\mathcal{U}/I^n)$  dann

$$S \otimes_{S^{s_r}} S \cdot \dots \cdot S \otimes_{S^{s_1}} S / ((S^+)^n) \langle -l(x) - (n-1) \rangle, \quad (4.30)$$

wobei  $2(n-1)$  genau der maximale Grad von  $S/(S^+)^n$  ist. Als Spezialfall erhalten wir für  $n=1$  gerade die Konvention aus Abschnitt 4.3.

Entsprechend definieren wir einen Lift von  $\mathbb{V}\theta_{s_r}^r \cdot \dots \cdot \theta_{s_1}^r(\mathcal{U}/I^n)$ .

Das liefert uns mit Lemma 4.3.3 induktiv für alle Weylgruppenelemente  $x \in W$  graduierte Lifts von  $\mathbb{V}P^n(x \cdot 0)$  und  $\mathbb{V}({}^nP(x \cdot 0))$ .

Mit Hilfe von Lemma 2.3.4 erhalten wir dann die folgende Zerlegung graduierter Vektorräume

$$\mathbb{V}({}^n P(x \cdot 0)) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} a_i \mathbb{V}P(x \cdot 0)\langle i \rangle$$

mit  $a_i = \dim S/((S^+)^n)_i$ .

Sei  $\eta$  definiert wie in Kapitel 2. Außerdem bezeichnen wir den entsprechenden Funktor (wie im Beweis von Lemma 2.6.6) auf den  $S$ -Bimoduln mit  $\tilde{\eta}$ .

Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen den graduerten Lifts

**Lemma 4.8.1.** *Für  $x \in W$  gilt*

$$\tilde{\eta} \circ \mathbb{V}(P^n(x \cdot 0)) \cong \mathbb{V} \circ \eta({}^n P(x^{-1} \cdot 0))$$

als graduierte  $S$ -Bimoduln.

*Beweis:* Für  $x = e$  ist die Aussage trivial. Sei  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $xs > x$ . Wir nehmen an, die Aussage sei richtig für  $y \leq x$ . Nun ist (siehe [Ja2, 6.34])

$$\eta(\mathcal{L}(\Delta(0), L(x \cdot 0))) \cong \mathcal{L}(\Delta(0), L(x^{-1} \cdot 0)),$$

und wir erhalten mit Lemma 2.6.2

$$P^n(x \cdot 0) \cong \eta({}^n P(x^{-1} \cdot 0))$$

für alle  $x \in W$ .

Es gilt  $\mathbb{V}\theta_s P^n(x \cdot 0) = S \otimes_{S^s} \mathbb{V}P^n(x \cdot 0) = \mathbb{V}P^n(xs \cdot 0) \oplus R$ , wobei  $R$  eine direkte Summe von Moduln der Form  $\mathbb{V}P^n(y \cdot 0)$  mit  $y < xs$  ist. Andererseits gilt aufgrund der Definition von  $\mathbb{V}$  und Lemma 2.6.7 als graduierte  $S$ -Bimoduln

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\mathbb{V}\theta_s P^n(x \cdot 0)) &= \tilde{\eta}(\mathbb{V}P^n(x \cdot 0)) \otimes_{S^s} S \\ &= \mathbb{V}(\eta P^n(x \cdot 0)) \otimes_{S^s} S \\ &\cong \mathbb{V}\theta_s^r \eta(P^n(x \cdot 0)) \\ &\cong \mathbb{V}\theta_s^r ({}^n P(x^{-1} \cdot 0)) \end{aligned}$$

und  $\mathbb{V}({}^n P(xs^{-1} \cdot 0))$  ist der entsprechende Summand mit maximalem höchstem Grad, der unter den Isomorphismen gerade  $\tilde{\eta}\mathbb{V}P^n(xs \cdot 0)$  entspricht. Das liefert die Behauptung.  $\diamond$

Wir bezeichnen wiederum mit  $*$  die Dualität (unter Verwendung von  $S \cong S^{opp}$ ) auf den graduerten  $S$ -Bimoduln und erhalten analog zu [So6] das folgende

**Lemma 4.8.2.** *Für einen graduerten  $S$ -Bimodul und eine einfache Spiegelung  $s$  gilt*

$$(S \otimes_{S^s} M)^* \cong S \otimes_{S^s} M^* \langle -2 \rangle$$

*Beweis:* Sei  $X_0, X_1$  eine Basis des freien  $S^s$ -Moduls  $S$ , wobei  $X_i$  homogen vom Grad  $2i$  sei. Völlig analog zu [So6] existiert eine nichtausgeartete Paarung, welche auf homogenen Komponenten gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S \otimes_{S^s} M \times S \otimes_{S^s} M^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (X_0 \otimes m + X_1 \otimes n, X_0 \otimes f + X_1 \otimes g) &\longmapsto g(m) + f(n). \end{aligned}$$

Man kann ohne große Mühe einsehen, daß diese Paarung sich mit der  $S$ -Struktur verträgt. Somit induziert das einen Isomorphismus  $S \otimes_{S^s} M^* \longrightarrow (S \otimes_{S^s} M)^*$  vom Grad  $-2$ .  $\diamond$

Allerdings sind die Bilder der Projektiven aus  ${}_0\mathcal{H}_0^n$  unter  $\mathbb{V}$  im allgemeinen nicht selbstdual. Insbesondere läßt sich der graduierte Ringisomorphismus  $A \cong A^{opp}$  aus (4.20) nicht einfach auf die verallgemeinerte Situation übertragen. Damit ist auch apriori nicht klar, ob es einen graduierten Lift der Dualität (wie in Abschnitt 4.5) für  $n > 1$  gibt.

Wir erhalten jedoch mit  $J := S^+$  als Verallgemeinerung von Satz 4.3.5 das folgende

**Lemma 4.8.3.** *Der Funktor  $\mathbb{V}$  induziert für projektive Objekte  $Q, Q' \in {}_0\mathcal{H}_0^n$  eine Graduierung auf  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(Q, Q')$ . Insbesondere wird  $\text{End}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n)$  dadurch zu einem graduierten Ring. Eine entsprechende Aussage gilt für  ${}^n\mathcal{H}_0$  und  $\text{End}_{\mathcal{H}}({}^n\mathbf{P})$ .*

*Beweis:* Es gilt  $\mathbb{V}({}^n P(0)) \cong \mathbb{V}(\mathcal{U}/I^n) \cong S/J^n$  als  $S$ -Bimodul. Nun ist aber  $J^n$  ein homogenes Ideal des graduierten Ringes  $S$  und wir erhalten den Rest völlig analog zu Satz 4.3.4 unter Verwendung der Lemmata 2.6.6 und 2.6.7.  $\diamond$

**Definition 4.8.4.** Wir bezeichnen mit  $A_n$  den graduierten Ring

$$A_n := \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n).$$

Ein Bimodul  $X \in {}_0\mathcal{H}_0^n$  soll *graduierbar* heißen, falls  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n, X)$  graduierbar ist als Rechts- $A_n$ -Modul. Einen Lift von  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n, X)$  bezeichnen wir auch einfach als Lift von  $X$ .

Einen Funktor auf  ${}_0\mathcal{H}_0^n$  bezeichnen wir als *graduierbar*, falls er einen graduierbaren Funktor (im Sinne von Definition 4.3.10) auf  $\text{mof} - A_n$  induziert.

Entsprechend seien  ${}^n A$  und graduierbare Moduln in  ${}^n\mathcal{H}_0$  definiert.

**Bemerkung 4.8.5.** Die kanonischen Surjektionen  $S/(S^+)^{n+1} \twoheadrightarrow S/(S^+)^n$  sind mit der Graduierung verträglich. Das liefert eine Inklusion  $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$  graduierten Ringe (siehe dazu auch die Ausführungen in [So3]). Man kann damit einsehen, daß für einen graduierbaren Modul  $X \in {}_0\mathcal{H}_0^{n+1}$  mit Lift  $\tilde{X}$ , wobei sogar  $X \in \mathcal{H}^n$  ist, die Einschränkung  $\tilde{X} \in \text{gmof} - A_n$  einen Lift für  $X \in \mathcal{H}^n$  liefert.

Mit Lemma 4.8.1 erhalten wir einen Isomorphismus graduierten Ringe

$$\eta : \text{End}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{P}^n) \cong \text{End}_{\mathfrak{g}}({}^n\mathbf{P})$$

Damit ist  $X \in {}_0\mathcal{H}_0^n$  graduierbar, genau dann wenn  $\eta(X) \in {}^n\mathcal{H}_0$  graduierbar ist. Der dafür notwendige Isomorphismus ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathbf{P}^n, X) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{H}}({}^n\mathbf{P}, \eta(X)) \\ f &\mapsto \eta(f). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Insbesondere ist  $\eta$  graduierbar im Sinne von 4.3.10.

*Warnung:* Wir unterscheiden von nun an in der Notation nicht mehr zwischen den Projektiven und den durch Satz 4.8.3 mit den Konventionen (4.30) definierten Lifts.

Die Lifts sind eindeutig bis auf einen Shift. Sie wurden (siehe auch Kapitel 4) so gewählt, daß der einfache Kopf im Grad Null sitzt.

**Definition 4.8.6.** Wir bezeichnen für  $n \in \mathbb{N}$  die *graduierte Grothendieckgruppe*  $[\text{gmof } -A_n]$  zu  ${}_0\mathcal{H}_0^n$  mit  $[({}_0\mathcal{H}_0^n)^{\mathbb{Z}}]$ . Entsprechend soll  $[({}^n\mathcal{H}_0)^{\mathbb{Z}}] = [\text{gmof } -{}_nA]$  die graduierte Grothendieckgruppe zu  ${}^n\mathcal{H}_0$  sein.

Sie ist isomorph zur graduierten Grothendieckgruppe von  $\mathcal{O}_0$ . Damit läßt sich beispielsweise der Modul  $P^n(0) = \mathcal{L}(M^n(0), M^n(0))$  in der graduierten Grothendieckgruppe schreiben als

$$[\mathcal{L}(M^n(0), M^n(0))] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i [\Delta(0)\langle i \rangle],$$

wobei  $\alpha_i = \dim(S/(S^+)^n)_i$  die Dimension des Anteils vom Grad  $i$  sein soll. Insbesondere ist dieser Modul positiv graduiert.

#### 4.8.1 Verschiebungen von „rechts“

In Kapitel 4.1 haben wir bereits eine Rechtsoperation der Weylgruppe auf der Grothendieckgruppe der Kategorie  $\mathcal{O}$  definiert. Wir geben nun einen graduierbaren Funktor auf  ${}^n\mathcal{H}_0$  an, der dieser Operation auf der Grothendieckgruppe entspricht.

Wir betrachten unseren Funktor  $\mathbb{V}$  von  ${}_0\mathcal{H}_0$  in die  $S$ -Bimoduln. Mit den oben beschriebenen Konventionen erhalten wir mit Lemma 4.4.1 einen Lift des Verschiebungsfunktors  $\theta_s^r$  auf  ${}^n\mathcal{H}_0$  durch

$$\bullet \otimes_{({}_nA)} \text{Hom}_{S \otimes S}(\mathbb{V}({}^n\mathbf{P}), \mathbb{V}({}^n\mathbf{P}) \otimes_{S^s} S\langle -1 \rangle).$$

Wir wählen wiederum Lifts von  $\mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x \cdot 0)) \in {}_0\mathcal{H}_0$ , so daß der einfache Kopf vom Grad Null ist.

Mit einer völlig analogen Schlußweise zu Satz 4.4.10 erhalten wir das folgende

**Lemma 4.8.7.** *Für  $x \in W$  und eine einfache Spiegelung  $s$  mit  $xs > x$  haben wir exakte Sequenzen von graduierten Moduln mit trivialem zentralen Charakter von links*

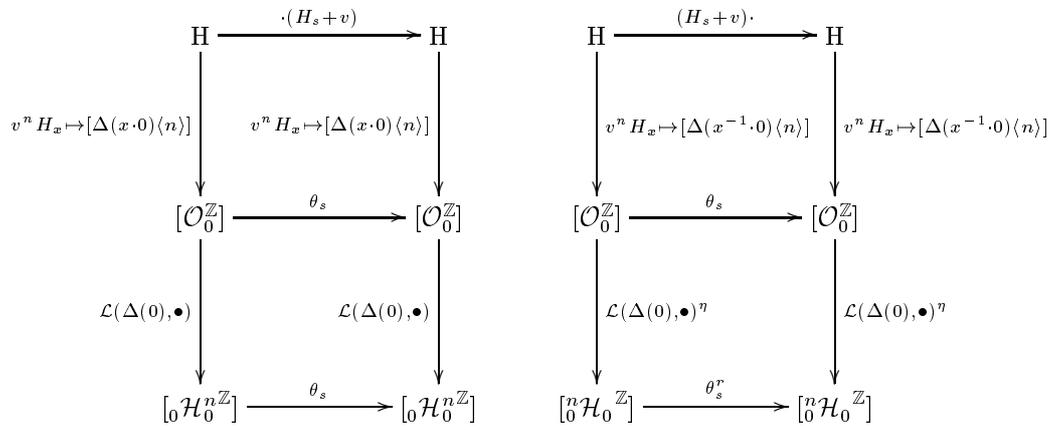
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x^{-1} \cdot 0))\langle 1 \rangle &\hookrightarrow \theta_s^r \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x^{-1} \cdot 0)) &\twoheadrightarrow \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(sx^{-1} \cdot 0)). \\ \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x^{-1} \cdot 0)) &\hookrightarrow \theta_s^r \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(sx^{-1} \cdot 0)) &\twoheadrightarrow \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(sx^{-1} \cdot 0))\langle -1 \rangle. \end{aligned}$$

*Beweis:* Für die erste Zeile müssen wir nur überprüfen, ob der Modul rechts in den richtigen Graden sitzt. Nun ist aber  $\Delta(sx^{-1} \cdot 0)\langle 1 \rangle \hookrightarrow \Delta(x^{-1} \cdot 0)$ . Also  $\theta_s^r \Delta(sx^{-1} \cdot 0)\langle 1 \rangle \cong \theta_s^r \Delta(x^{-1} \cdot 0)$ . Das liefert die erste Sequenz. Für die zweite Sequenz geht die Argumentation analog.  $\diamond$

Wir fassen nun die Ergebnisse dieses Kapitels in dem folgenden Hauptsatz zusammen.

**Hauptsatz 4.8.8 (Graduierte Bimodulnkombinatorik).**

Die folgenden Diagramme kommutieren:



*Beweis:* bereits gegeben.

◇

---

# Hauptserien und ihre Graduierung

---

*Das zentrale Ergebnis dieses Kapitels ist die Graduierbarkeit der Hauptserien. Wir sind schließlich in der Lage, induktiv diese Graduierung zu berechnen und die entsprechenden Elemente der Heckealgebra anzugeben. Als Ergänzung zeigen wir, wie man damit rein kombinatorisch sehen kann, daß alle Hauptserien dieselben Kompositionsfaktoren haben und inwiefern sich Hauptsatz 3.2.1 über die dualen Hauptserien in der graduierten Grothendieckgruppe widerspiegelt.*

*Außerdem geben wir noch einige Köcherdarstellungen von Hauptserien für Wurzelsysteme vom Rang 2 an. Insbesondere lassen sich dabei Radikal- und Sockelfiltrierungen ablesen. Sie verdeutlichen das am Ende des Kapitels angegebene Kriterium, wann die Sockel- und Radikalfiltrierung eines unzerlegbaren Moduls in  $\mathcal{O}_0$  übereinstimmen. Mit diesem Resultat sind wir auch in der Lage, ein Resultat von Irving [Ir] nochmals zu beweisen, das besagt, daß ein unzerlegbarer Projektiver genau dann rigid ist, wenn sein Sockel einfach ist.*

## 5.1 Hauptserien und ihre Graduierung

Der Hauptsatz dieses Kapitels besteht in der Angabe der den graduierten Hauptserien entsprechenden Elementen der Heckealgebra.

### 5.1.1 Hauptserien als graduierbare Objekte

Im folgenden Abschnitt werden wir zuerst zeigen, daß Hauptserien graduierbar sind.

**Satz 5.1.1.** *Für  $x, y \in W$  ist  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$  graduierbar.*

*Beweis:* Die kurze exakte Sequenz

$$\nabla(y \cdot 0) \hookrightarrow \theta_s \nabla(y \cdot 0) \twoheadrightarrow \nabla(ys \cdot 0)$$

mit  $ys < y$  in  $\mathcal{O}_0$  liefert (mit Eigenschaft 4 aus Kapitel 3.1) die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \xrightarrow{f} \theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \xrightarrow{g} \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0)) \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

in  $\mathcal{H}_0$ . Für  $y = w_o$  ist der linke Ausdruck isomorph zu  $\mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x^{-1}w_o \cdot 0))$  und somit für alle  $x$  graduierbar, also auch der durch die Wand geschobene. Mit denselben Argumenten wie in Abschnitt 4.4.1 ist die Abbildung  $f$  jeweils graduierbar vom Grad 1. (Oder man verwende Hauptsatz 3.3.3 und die Unzerlegbarkeit der auftretenden Moduln.) Damit ist also auch der Kokern graduierbar. Induktiv erhalten wir die Graduierbarkeit für beliebiges  $y$ . Somit sind alle Hauptserien graduierbar.  $\diamond$

Wir wählen die Graduierung stets so, daß die Surjektionen in (5.1) vom Grad Null sind. Apriori ist die Graduierung von der gewählten reduzierten Zerlegung von  $x$  abhängig. Man überzeugt sich jedoch schnell davon, daß dies nicht der Fall ist, indem man beispielsweise Lemma 4.4.8 auf den einfachen Vermamodul anwendet. Somit sind die graduierten Lifts durch die Forderung wohldefiniert und unabhängig von der gewählten Darstellung von  $x$  (siehe auch Satz 5.1.4). Dies ist auch mit den Ausführungen in Kapitel 4 kompatibel.

*Warnung:* Wir unterscheiden nun in der Notation nicht mehr zwischen den durch den vorherigen Satz definierten graduierten Lifts der Hauptserien und den Hauptserien selbst.

Wir erhalten den folgenden zentralen Satz zur kombinatorischen Beschreibung der Hauptserien:

**Satz 5.1.2.** *Für  $ys > y$  erhalten wir die folgenden kurzen exakten Sequenzen graduierter Moduln*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0)) \langle 1 \rangle &\hookrightarrow \theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0)) \twoheadrightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)). \\ \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0)) &\hookrightarrow \theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \twoheadrightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \langle -1 \rangle. \end{aligned}$$

*Beweis:* Aufgrund des Beweises von Satz 5.1.1 und der Definition der graduierten Lifts gilt die erste Behauptung.

Mit unserer Standardargumentation erhalten wir eine graderhaltende Surjektion

$$\theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \twoheadrightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \langle -1 \rangle.$$

Nun kommt der einfache Modul  $\mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(w_o \cdot 0))$  aber in  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$  genau einmal vor. Sein Grad sei  $i$ . Somit tritt er in  $\theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$  in den Graden  $i + 1$  und  $i - 1$  auf. Aufgrund der ersten Sequenz kommt er aber dann in  $\theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0))$  in den Graden  $i + 2$  und  $i$  vor und tritt daher in  $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0))$  im Grad  $i - 1$  auf. Somit ist die Injektion der zweiten Sequenz graderhaltend.  $\diamond$

**Korollar 5.1.3.** *Es gibt für  $ys > y$  eine Isomorphie graduierter Moduln*

$$\theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0)) \cong \theta_s \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(ys \cdot 0)) \langle -1 \rangle.$$

*Beweis:* folgt unmittelbar aus dem Satz und Lemma 3.3.1.  $\diamond$

### 5.1.2 Kombinatorik der Hauptserien

Wir können nun Hauptserien kombinatorisch beschreiben. Diese Beschreibung gibt uns die Möglichkeit, (mit der Kenntnis der graduierten Multiplizitäten für Vermamoduln) graduierte Multiplizitäten der Lifts der Hauptserien auf rein kombinatorische Weise zu bestimmen.

**Hauptsatz 5.1.4.** *Unter dem Isomorphismus aus Hauptsatz 4.8.8 entspricht*

$$[\mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0))] \in [({}_0 \mathcal{H}_0^1)^{\mathbb{Z}}]$$

dem Heckealgebrenelement

$$H_{x^{-1}} H_y.$$

*Beweis:* Für  $y = e$  gilt nach Abschnitt 3.1  $\mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o \cdot 0)) \cong \mathcal{L}(\Delta(0), \Delta(x^{-1} \cdot 0))$ , entspricht also dem Element  $H_{x^{-1}} = H_{x^{-1}} H_e$ .

Sei nun  $ys > y$  für eine einfache Spiegelung  $s$ . Nun liefert Satz 5.1.2 eine kurze exakte Sequenz graduierter Moduln

$$\mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0)) \langle 1 \rangle \longrightarrow \theta_s \mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o y \cdot 0)) \longrightarrow \mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o ys \cdot 0)).$$

Unter der Annahme, die Behauptung stimme für  $y$ , entspricht  $\mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o ys \cdot 0))$  dem Heckealgebraelement

$$(H_{x^{-1}} H_y)(H_s + v) - (v H_{x^{-1}} H_y) = H_{x^{-1}} H_y H_s = H_{x^{-1}} H_{ys}.$$

Das ist gerade die Behauptung.  $\diamond$

Man überzeuge sich, daß die Kombinatorik des zweiten Diagramms aus Satz 4.8.8 dasselbe Ergebnis liefert. Man erkennt ohne Mühe mit der Relation  $H_s^2 = H_e + (v^{-1} - v)H_s$ , daß der einfache Modul  $\mathcal{L}(\Delta(0), L(0))$  stets im Grad Null in dem graduierten Modul  $\mathcal{P}_x$  auftritt.

**Korollar 5.1.5.** *Alle Hauptserien  $\mathcal{P}_x$  haben ohne Berücksichtigung der Graduierung dieselben Kompositionsfaktoren.*

*Beweis:* Es gilt  $H_s^2 = H_e + (v^{-1} - v)H_s$  für jede einfache Spiegelung  $s$ . Auswerten an der Stelle 1 liefert dieselben Kompositionsfaktoren für  $\mathcal{P}_{w_o s}$  wie für den projektiven Vermamodul. Sei nun  $x \in \mathcal{W}$  und  $\alpha$  eine einfache Wurzel, so daß  $x = s_\alpha y$  mit  $l(y) = l(x) - 1$ . Dann gilt aber

$$\begin{aligned} H_{x^{-1}} H_x &= H_{y^{-1}} H_{s_\alpha}^2 H_y \\ &= H_{y^{-1}} H_e H_y + (v^{-1} - v) H_{y^{-1}} H_{s_\alpha} H_y. \end{aligned}$$

Damit hat also die Hauptserie  $\mathcal{P}_x$  dieselben Kompositionen wie die Hauptserie  $\mathcal{P}_y$ . Somit liefert Induktion die Behauptung.  $\diamond$

Die Motivation zum abschließenden Ergebnis dieses Kapitels über duale Hauptserien lieferte die Beobachtung in [Jo6], daß  $H_e$  und  $H_{w_o} H_{w_o}$  gerade die inversen Graduierungen liefern. Verallgemeinert man das dort verwendete Argument, erhält man folgendes rein kombinatorisches

**Lemma 5.1.6.** *Für  $x \in \mathcal{W}$  gilt in der graduierten Grothendieckgruppe  $[({}_0 \mathcal{H}_0^1)^{\mathbb{Z}}]$  die Gleichheit*

$$[\mathcal{P}_{(x,y)}]^{\mathbb{Z}} = [\mathbf{d} \mathcal{P}_{(w_o x, w_o y)}]^{\mathbb{Z}}. \quad (5.2)$$

*Beweis:* Wir führen einen Induktionsbeweis über die Länge von  $x$ . Wir wählen mit den Bezeichnungen aus [So4] Polynome  $p_y$ , so daß

$$H_e H_e = H_e = \sum_y p_y (\tilde{H}_{y w_o} H_{w_o}).$$

Nun entspricht  $\tilde{H}_y$  dem Element  $C_y$  in [KL]. Nach [Lu, (5.1.8)] gilt  $D'_x = C_{x w_o} H_{w_o}$ . Somit geben die Polynome gerade die (graduerten) Multiplizitäten der Einfachen wieder. Da  $H_e$  selbstdual ist, gilt

$$H_e H_e = H_e = \sum_y \overline{p_y} (\tilde{H}_{y w_o} H_{w_o}^{-1}).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $H_{w_o}^2$  von rechts, erhält man

$$H_{w_o} H_{w_o} = \sum_y \overline{p_y} (\tilde{H}_{y w_o} H_{w_o}).$$

Somit hat  $H_{w_o} H_{w_o}$  gerade die „inverse“ Graduierung zu  $H_e H_e$ . Das liefert die Aussage für  $x = y = e$ . Mit Hauptsatz 5.1.4 liefert das den Induktionsanfang.

Sei nun  $x = s_\alpha$  eine einfache Spiegelung. Dann sei

$$H_{s_\alpha} H_{s_\alpha} = \sum_{y \in \mathcal{W}} q_y C_{y w_o} H_{w_o}$$

Wenden wir unsere Dualität auf diese Gleichung an und multiplizieren anschließend mit  $H_{w_o}^2$  von rechts, liefert das

$$\begin{aligned} \sum_y \overline{q_y C_{y w_o} H_{w_o}} &= \overline{H_{s_\alpha}^2} H_{w_o}^2 \\ &= H_{s_\alpha}^{-1} H_{s_\alpha}^{-1} H_{w_o}^2 \\ &= H_{s_\alpha}^{-1} H_{s_\alpha}^{-1} H_{s_\alpha} H_z H_{w_o} \\ &= H_{s_\alpha}^{-1} H_z H_{s_\beta} H_{z^{-1}} \\ &= H_{s_\alpha}^{-1} H_{w_o} H_{z^{-1}} H_{s_\alpha} H_{s_\alpha}^{-1} \\ &= H_{s_\alpha}^{-1} H_{w_o}^2 H_{s_\alpha}^{-1}, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha, \beta$  und  $z$  durch  $w_o = s_\alpha z = z s_\beta$  bestimmt sind. Somit gilt die Gleichung

$$H_{s_\alpha}^{-1} H_{w_o}^2 = H_{w_o}^2 H_{s_\alpha}^{-1} \quad (5.3)$$

Sei nun  $x = s_1 s_2 \dots s_r$  eine reduzierte Zerlegung von  $x$ .

Außerdem definieren wir Laurentpolynome  $h_y$  durch die Gleichung

$$H_{x^{-1}} H_x = \sum_y h_y C_{y w_o} H_{w_o}.$$

Durch Dualisieren und Multiplizieren mit  $H_{w_o}^2$  von rechts erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_y \bar{h}_y C_{yw_o} H_{w_o} &= \bar{H}_{x^{-1}} \bar{H}_x H_{w_o}^2 \\
&= H_x^{-1} H_{x^{-1}}^{-1} H_{w_o}^2 \\
&= H_x^{-1} H_{s_1}^{-1} H_{s_2}^{-1} \dots H_{s_r}^{-1} H_{w_o}^2 \\
&= H_x^{-1} H_{s_1}^{-1} H_{s_2}^{-1} \dots H_{s_{r-1}}^{-1} H_{w_o}^2 H_{s_r}^{-1} \quad \text{wegen Gleichung (5.3)} \\
&\vdots \\
&= H_x^{-1} H_{w_o}^2 H_{s_1}^{-1} H_{s_2}^{-1} \dots H_{s_r}^{-1} \\
&= H_x^{-1} H_{w_o}^2 H_{x^{-1}}^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Andererseits gilt jedoch

$$H_{w_o}^2 = H_x H_{x^{-1}w_o} H_{w_o x} H_{x^{-1}}$$

Das liefert nun  $H_{(w_o x)^{-1}} H_{w_o x} = H_{x^{-1}w_o} H_{w_o x} = H_x^{-1} H_{w_o}^2 H_{x^{-1}}^{-1}$ .  
Der Vergleich mit Gleichung (5.4) liefert die Behauptung.  $\diamond$

Das vorhergehende Lemma war eine rein kombinatorische Aussage, die daher auch allein mit kombinatorischen Argumenten bewiesen wurde. Ohne diese Einschränkung erhalten wir sogar eine stärkere Aussage, eine Verallgemeinerung von Hauptsatz 3.2.1:

**Satz 5.1.7.** *Es gilt  $\mathcal{P}_{(x,y)} \cong \text{d} \mathcal{P}_{(w_o x, w_o y)}$  als graduierte Moduln für alle  $x, y \in W$ .*

*Beweis:* Unter Verwendung der graduierten exakten Sequenzen aus Satz 5.1.2 können wir (mit vertauschter Links- und Rechtsstruktur) wie im Beweis von Hauptsatz 3.2.1 argumentieren. Wir müssen nur den Induktionsanfang überprüfen.

Für  $y = e$  gilt  $\text{v}(\mathcal{P}_{(x,e)}) \cong \text{v}(\text{d} \mathcal{P}_{(w_o x, w_o)})$  nach dem Vergessen der Graduierung. Nun sind aber diese Isomorphismen eindeutig bis auf einen Skalar und somit mit der Graduierung verträglich. Da der einfache Sockel jeweils vom Grad Null ist, ist also der Isomorphismus homogen vom Grad Null.

Alternativ dazu können wir auch mit Hauptsatz 3.2.1 die graduierten Moduln  $\mathcal{P}_{(x,y)}$  und  $\text{d} \mathcal{P}_{(w_o x, w_o y)}$  als Lifts des unzerlegbaren Moduls  $\text{v}(\mathcal{P}_{x,y})$  betrachten. Der ist nach Lemma 4.3.5 bis auf Gradshift eindeutig. Mit dem vorhergehenden Lemma folgt die Behauptung.  $\diamond$

## 5.2 Köcherdarstellungen der Hauptserien

Im folgenden Abschnitt werden wir Köcherdarstellungen der Hauptserien angeben. Das ermöglicht eine genaue Beschreibung der Untermodulstruktur solcher Moduln. Insbesondere sind die Radikal- und Sockelfiltrierungen leicht ablesbar.

Es stellt sich dabei heraus, daß diese beiden Filtrierungen im allgemeinen nicht übereinstimmen müssen. Einige allgemeine Resultate über diese Filtrierungen findet man in Abschnitt 5.3.

### 5.2.1 Das prinzipielle Verfahren zur Bestimmung der Köcherdarstellungen

Wir werden nun die Hauptserien für Wurzelsysteme vom Rang zwei genauer beschreiben. Wir wollen den entsprechenden Modul in  $\mathcal{O}_0$  als Darstellung eines Köchers wiedergeben. Die dazu notwendigen Köcher werden in [St] beschrieben. Wir werden zuerst an einem Beispiel exemplarisch verdeutlichen, wie diese Darstellungen ausgerechnet werden können. Die übrigen werden einfach aufgelistet.

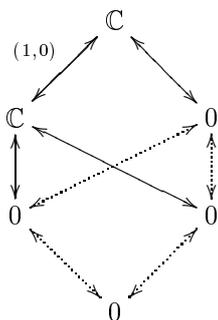
#### Die Hauptserie $\mathcal{L}(\Delta(s_\alpha \cdot 0), \nabla(s_\alpha \cdot 0))$ für Typ $A_2$ .

Nach Definition der Vervollständigigungsfunktoren wird die Hauptserie  $\mathcal{L}(\Delta(s_\alpha \cdot 0), \nabla(s_\alpha \cdot 0))$  unter der Äquivalenz von Kategorien aus [BG] auf den Modul  $\mathbf{C}_\alpha \nabla(s_\alpha \cdot 0)$  abgebildet.

Da der Sockel des dualen Vermamoduls  $\nabla(s_\alpha \cdot 0)$  von der Form  $L(s_\alpha \cdot 0)$  ist, bedeutet das nach [Jo4, Lemma 2.4], daß der besagte duale Vermamodul ein Untermodul der Hauptserie ist. Nach [Jo4, Lemma 4.6] gibt es eine kurze exakte Sequenz der Form

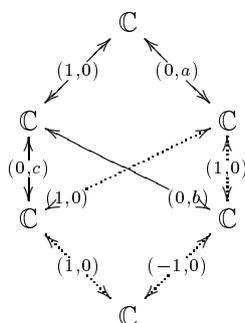
$$0 \rightarrow \nabla(s_\alpha \cdot 0) \hookrightarrow \mathbf{C}_\alpha \nabla(s_\alpha \cdot 0) \xrightarrow{f} \nabla(0) \xrightarrow{g} \nabla(s_\alpha \cdot 0) \rightarrow 0. \tag{5.5}$$

Somit kennen wir das Bild von  $f$ , nämlich den Kern von  $g$ . Wir erhalten somit eine Köcherdarstellung von  $\ker g$  der Form



Die Doppelpfeile symbolisieren dabei je einen Pfeil in jede Richtung. Die Beschriftung an den Pfeilen bezeichnet die Abbildung, die durch den Pfeil symbolisiert wird. Dabei wurden nur die Pfeile beschriftet, die sich nicht von selbst erklären. Bei den übrigen wurde einfach der Skalar angegeben, der nach einer Basiswahl die entsprechende Matrix beschreibt. Der erste steht dabei für die Abbildung, die zu dem Pfeil gehört, der nach oben zeigt, die zweite Ziffer gehört dementsprechend zum Pfeil, der in die entgegengesetzte Richtung weist.

Aus den bisher bekannten Daten erhalten wir folgende Köcherdarstellung für die Hauptserie:



Die gestrichelten Pfeile sollen den dualen Vermamodul anzeigen, der als Untermodul auftritt. Zu bestimmen sind noch die freien Variablen  $a$  bis  $c$ . Um schließlich die noch fehlenden Daten zu bekommen, reicht es aber aus, auf die definierenden Relationen zurückzugehen. Das liefert uns die beiden Gleichungen  $c = -2a$  und  $b = 4a$ .

Durch passende Basiswahlen erhalten wir die in der nachfolgenden Liste aufgeführte mögliche Köcherdarstellung.

Zur Bestimmung einer Köcherdarstellung für die etwas größeren Beispiele wurde oftmals die Kenntnis der Vervollständigung eines einfachen Moduls benutzt. Im bereits berechneten Fall können wir diese Kenntnis als kleine Probe verwenden.

Aufgrund der Linksexaktheit des Vervollständigungsverfunktors  $\mathbf{C}_\alpha$  erhalten wir  $\mathbf{C}_\alpha L(s_\alpha \cdot 0)$ , die Vervollständigung des Sockels, als weiteren Untermodul. Mit Hilfe von [Jo4, Corollary 3.5] können wir diesen Untermodul durch folgende exakte Sequenz beschreiben:

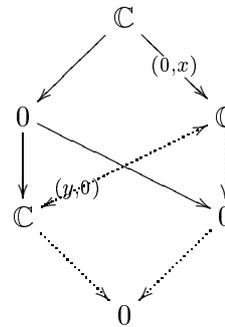
$$0 \rightarrow \mathbf{C}_\alpha \operatorname{rad} \Delta(s_\alpha \cdot 0) \hookrightarrow \Delta(0) \rightarrow \mathbf{C}_\alpha L(s_\alpha \cdot 0) \twoheadrightarrow \operatorname{rad} \Delta(s_\alpha \cdot 0) / (\mathbf{D}_\alpha^+ \operatorname{rad} \Delta(s_\alpha \cdot 0)) \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

Man überlegt sich leicht, daß  $\mathbf{D}_\alpha^+ \operatorname{rad} \Delta(s_\alpha \cdot 0) = \Delta(s_\alpha s_\beta \cdot 0)$  als Untermodul von  $\Delta(s_\alpha \cdot 0)$  gilt. Aus obiger Sequenz (5.6) erhalten wir nun

$$[\mathbf{C}_\alpha L(s_\alpha \cdot 0)] = [L(0)] + [L(s_\alpha \cdot 0)] + [L(s_\beta s_\alpha \cdot 0)]$$

mit  $L(s_\beta s_\alpha \cdot 0)$  als Quotienten und  $\Delta(0)/\Delta(s_\beta \cdot 0)$  als Untermodul.

Insgesamt ergibt das für  $\mathbf{C}_\alpha L(s_\alpha \cdot 0)$  die folgende mögliche Köcherdarstellung (mit den noch näher zu bestimmenden Variablen  $x$  und  $y$ ):



Wir sehen, daß dies in der Tat eine Unterdarstellung unserer berechneten Darstellung liefert.

### 5.2.2 Explizite Köcherdarstellungen

Wir gewinnen durch diese Art von Rechnungen schließlich die folgenden Köcherdarstellungen, die den Hauptserien entsprechen. Die Pfeile, die zu trivialen Abbildungen gehören, haben wir weggelassen. Bei den übrigen haben wir einfach die zugehörige Matrix nach einer Basiswahl notiert.

Insbesondere können wir die Radikal- und Sockelfiltrierungen ablesen. (Man vergleiche damit auch [C].)

Wir listen sie jeweils unter der entsprechenden Darstellung auf, wobei wir als Abkürzung die Buchstaben

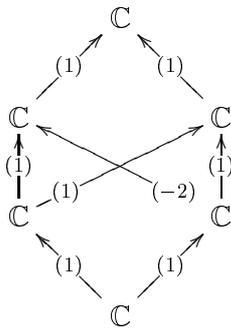
R (Radikalfiltrierung), S (Sockelfiltrierung) und G (Gradfiltrierung)

verwenden. Die Nummerierungen der einfachen Moduln entspricht derjenigen in [St] und bedeutet im Köcher gerade der Numerierung der Ecken von oben nach unten und von links nach rechts.

Die Pfeile, die zu trivialen Abbildungen gehören haben wir nun schlichtweg weggelassen.

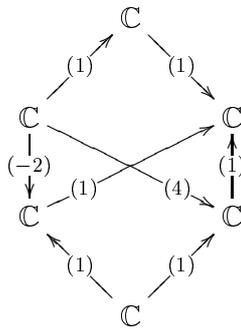
**Beispiele f ur  $A_2$ :**

**Hauptserie  $\nabla(0)$**



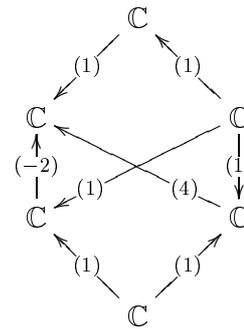
$L_1 < L_2, L_3 < L_4, L_5 < L_6$   
(SRG)

**Hauptserie  $C_\alpha \nabla(s_\alpha \cdot 0)$**



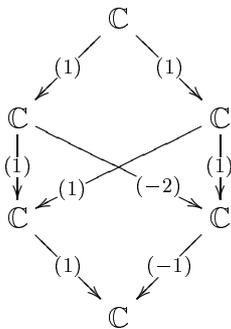
$L_3 < L_1, L_4, L_5 < L_2, L_6$   
(SRG)

**Hauptserie  $C_\beta \nabla(s_\beta \cdot 0)$**



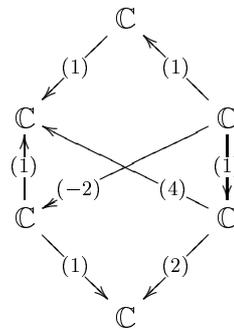
$L_2 < L_1, L_4, L_5 < L_3, L_6$   
(SRG)

**Hauptserie  $C_{w_o} \nabla(w_o \cdot 0)$**



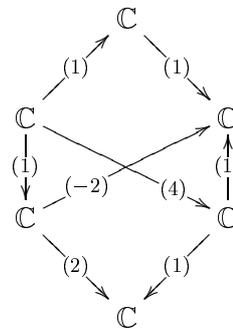
$L_6 < L_5, L_4 < L_3, L_2 < L_1$   
(SRG)

**Hauptserie  $C_{\alpha\beta} \nabla(s_\beta s_\alpha)$**



$L_2, L_6 < L_1, L_4, L_5 < L_3$   
(SRG)

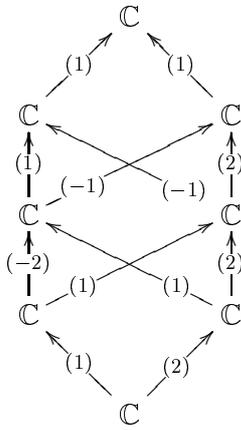
**Hauptserie  $C_{\beta\alpha} \nabla(s_\alpha s_\beta \cdot 0)$**



$L_3, L_6 < L_1, L_4, L_5 < L_2$   
(SRG)

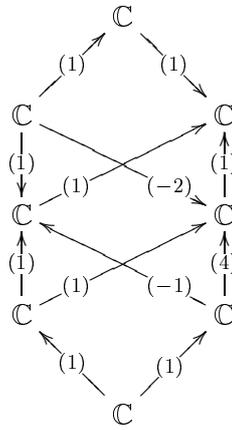
**Beispiele für  $B_2$ :**

**Hauptserie  $\nabla(0)$**



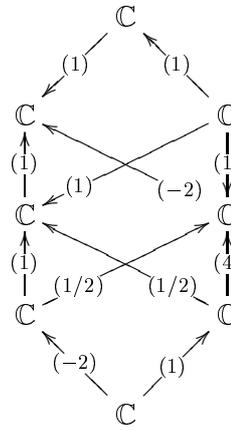
$L_1 < L_2, L_3 < L_4,$   
 $L_5 < L_6, L_7 < L_8$  (SRG)

**Hauptserie  $C_\alpha \nabla(s_\alpha \cdot 0)$**



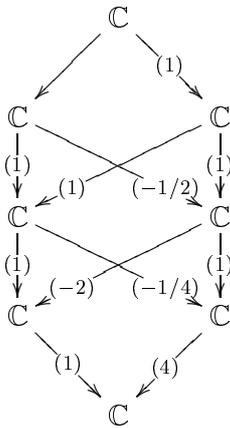
$L_3 < L_1, L_4, L_5$   
 $< L_2, L_6, L_7 < L_8$  (SG)  
 $L_3 < L_4, L_5 < L_1,$   
 $L_6, L_7 < L_2, L_8$  (R)

**Hauptserie  $C_\beta \nabla(s_\beta \cdot 0)$**



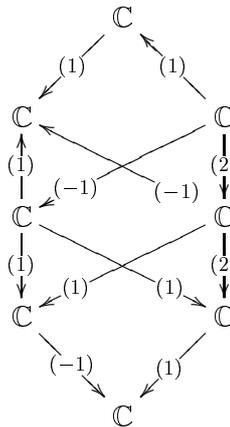
$L_2 < L_1, L_4, L_5$   
 $< L_3, L_6, L_7 < L_8$  (SG)  
 $L_2 < L_4, L_5 < L_1,$   
 $L_6, L_7 < L_3, L_8$  (R)

**Hauptserie  $\Delta(0)$**



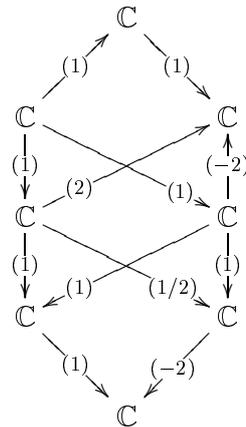
$L_8 < L_7, L_6 < L_5,$   
 $L_4 < L_3, L_2 < L_1$  (SRG)

**Hauptserie  $C_\beta C_\alpha C_\beta \nabla(s_\beta s_\alpha s_\beta \cdot 0)$**



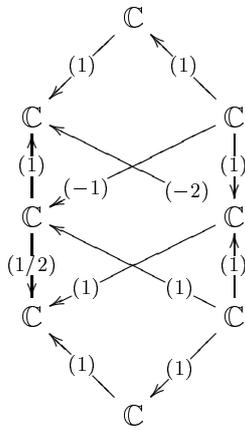
$L_2, L_8 < L_1, L_6,$   
 $L_7 < L_4, L_5 < L_3$  (S)  
 $L_8 < L_2, L_6, L_7 <$   
 $< L_1, L_4, L_5 < L_3$  (RG)

**Hauptserie  $C_\alpha C_\beta C_\alpha \nabla(s_\alpha s_\beta s_\alpha \cdot 0)$**



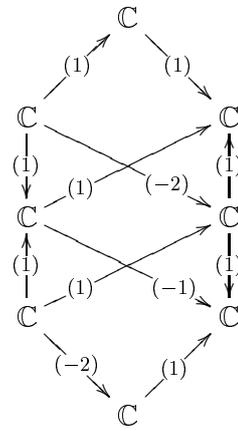
$L_3, L_8 < L_1, L_6,$   
 $L_7 < L_4, L_5 < L_2$  (S)  
 $L_8 < L_3, L_6, L_7 <$   
 $< L_1, L_4, L_5 < L_2$  (RG)

**Hauptserie**  
 $\mathbf{C}_\beta \mathbf{C}_\alpha \nabla(s_\alpha s_\beta \cdot 0)$



$L_2, L_6 < L_1, L_4,$   
 $L_5, L_8 < L_3, L_7$  (SRG)

**Hauptserie**  
 $\mathbf{C}_\alpha \mathbf{C}_\beta \nabla(s_\beta s_\alpha \cdot 0)$



$L_3, L_7 < L_1, L_4,$   
 $L_5, L_8 < L_2, L_6$  (SRG)

### Beispiele für $G_2$ :

Wir verzichten darauf, noch mehr Bilder zu liefern, wollen aber dennoch einige Filtrierungen für Typ  $G_2$  angeben, die wiederum zeigen, daß die Hauptserien keineswegs rigid sein müssen. Allerdings gibt es kein Beispiel, für das alle drei Filtrierungen verschieden sind.

$$\underline{\mathbf{C}_\alpha \nabla(s_\alpha \cdot 0)} : \quad L_3 < L_1, L_4, L_5 < L_2, L_6, L_7 < L_8, L_9 < L_{10}, L_{11} < L_{12} \quad (SG)$$

$$L_3 < L_4, L_5 < L_6, L_7 < L_8, L_9 < L_1, L_{10}, L_{11} < L_2, L_{12} \quad (R)$$

$$\underline{\mathbf{C}_\alpha \mathbf{C}_\beta \nabla(s_\beta s_\alpha \cdot 0)} : \quad L_3, L_7 < L_1, L_4, L_5, L_8, L_9 < L_2, L_6, L_{10}, L_{11} < L_{12} \quad (SG)$$

$$L_7 < L_3, L_8, L_9 < L_1, L_4, L_5, L_{10}, L_{11} < L_2, L_6, L_{12} \quad (R)$$

$$\underline{\mathbf{C}_\alpha \mathbf{C}_\beta \mathbf{C}_\alpha \nabla(s_\alpha s_\beta s_\alpha \cdot 0)} : \quad L_3, L_7, L_{11} < L_1, L_4, L_5, L_8, L_9, L_{12} < L_2, L_6, L_{10} \quad (RSG)$$

**Bemerkung 5.2.1.** Man beachte, daß die Loewylänge der Hauptserien nicht konstant ist (vgl. Bemerkung 6.2).

## 5.3 Sockel-, Radikal- und Gradfiltrierung der Hauptserien

Die Beispiele aus dem letzten Abschnitt zeigen, daß die Hauptserien (im Gegensatz zu Vermoduln und ihren dualen Moduln) im allgemeinen nicht „rigid“ sind, das heißt, ihre Sockel- und Radikalfiltrierungen nicht notwendigerweise übereinstimmen müssen. Wir geben nun zwei Kriterien an, die es in einigen Fällen ermöglichen, zu überprüfen, ob die entsprechenden Filtrierungen übereinstimmen.

**Lemma 5.3.1.** *Sei  $M \in \mathcal{O}$ . Er sei unzerlegbar und graduierbar mit Lift  $\tilde{M}$ . Die drei Filtrierungen auf  $\tilde{M}$  stimmen überein  $\iff$  der Sockel und der Kopf sind jeweils rein.*

*Beweis:* Die Konklusion von links nach rechts ist nach Definition richtig. Die andere Folgerung gilt aufgrund [BGS, 2.4.1].  $\diamond$

Für Vermamoduln stimmen bekanntermaßen (vgl. [Ir], [BB2]) die Radikal- und Sockelfiltrierungen überein. Sie fallen (da Vermamoduln einfache Köpfe und Sockel besitzen) mit der Gradfiltrierung zusammen.

Für diese Filtrierung gibt es eine Paritätsbedingung, die durch das Verschwinden von Erweiterungen zwischen Einfachen gegeben wird. Dieses tiefliegende Resultat findet man beispielsweise in [BB2], eine sehr schöne und ausführliche Diskussion der Thematik im Kontext algebraischer Gruppen bietet [An]. Unter Verwendung dieser starken Aussage erhalten wir eine entsprechende Eigenschaft der Gradfiltrierung für die Hauptserien:

**Satz 5.3.2 (Paritätseigenschaft der Gradfiltrierung).**

*Für  $x \in W$  gilt für die gewählten graduierten Lifts der Hauptserien bezüglich der (graduierten) Multiplizitäten*

$$[C_{x^{-1}} \nabla(x \cdot 0) : L(y \cdot 0)\langle i \rangle] \neq 0 \implies l(y) - i \equiv 0 \pmod{2}.$$

*Insbesondere kommen in einer Stufe der Gradfiltrierung nur einfache Moduln vor, für die die Parität der Länge der entsprechenden Weylgruppenelemente übereinstimmt.*

*Beweis:* Greifen wir bereits auf Kapitel 7 vor, so liefert die graduierte Vierersequenz aus Hauptsatz 7.4.2 induktiv den Beweis, da diese Paritätseigenschaft aufgrund der Kazhdan-Lusztig-Theorie für den dominanten Vermamodul gilt.  $\diamond$

Als Anwendung von Satz 1.4.1 erhalten wir ein Resultat von Irving ([Ir, Corollary 7]):

**Lemma 5.3.3.** *Sei  $\lambda$  ein ganzes Gewicht. Der Projektive  $P(x \cdot \lambda)$  ist genau dann rigid, wenn sein Sockel einfach ist.*

*Beweis:* Nach Satz 1.4.1 ist der Sockel eines unzerlegbaren Projektiven  $P(x \cdot \lambda)$  gegeben durch die direkte Summe der Sockel der projektiven Vermauntermoduln. Somit reicht es also zu zeigen, daß die Sockel bzw. Köpfe dieser Vermamoduln nicht alle vom gleichen Grad sind. Da nun aber die homogene Komponente von  $\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$  vom höchsten Grad eindimensional ist (und einem dominanten Vermamodul entspricht), kann der Sockel von  $P(x \cdot \lambda)$  nicht in einem Grad leben, falls er nicht einfach ist.  $\diamond$

## 5.4 Hauptserien als Koszulmoduln?

Zuletzt gehen wir noch der Frage nach, ob die graduierten Versionen der Hauptserien Koszulmoduln sind. In den Spezialfällen von Vermamoduln oder auch ihren dualen wird dies in [BGS] gezeigt. Wir formulieren zuerst einen allgemeinen Satz, der auf den ersten Blick zwar die gefragte Koszulität liefern sollte, dessen Voraussetzungen jedoch im allgemeinen nicht auf Hauptserien zutreffen. Schließlich werden wir jedoch sehen, daß dies nicht von ungefähr kommt, da in der Tat die Hauptserien im allgemeinen *nicht* Koszulmoduln sind.

Nach [BGS, 2.14.2] ist ein graduierter Modul  $M \in \text{gmof } -A$  ein *Koszulmodul*, falls

$$\text{Ext}_{\text{gmof } -A}^i(M, L) = 0$$

gilt für alle einfachen Moduln  $L$ , die nicht homogen vom Grad  $i$  sind. Für  $N \in \mathcal{O}_0$  mit einem gewählten Lift  $M$  nennen wir  $N$  Koszulmodul, falls  $M \in \text{gmof } -A$  Koszulmodul ist.

Wir zeigen dazu zuerst folgenden

**Satz 5.4.1.** *Sei  $M \in \text{gmof } -A$  Koszul und  $\theta_0^\lambda M$  ebenfalls für  $W_\lambda = \{1, s\}$ . Angenommen es gibt eine exakte Sequenzgraduierter Moduln*

$$M\langle 1 \rangle \hookrightarrow \theta_s M \twoheadrightarrow N,$$

dann ist  $N$  ebenfalls Koszul.

*Beweis:* Im folgenden benutzen wir die in Kapitel 4 gezeigten Adjungiertheiten der graduierten Verschiebungsfunktoren ohne explizit nochmals darauf hinzuweisen.

Wir betrachten die exakte Sequenz von Erweiterungen in  $\text{gmof } -A$

$$\text{Ext}^i(M\langle 1 \rangle, L\langle n \rangle) \leftarrow \text{Ext}^i(\theta_s M, L\langle n \rangle) \leftarrow \text{Ext}^i(N, L\langle n \rangle) \leftarrow \text{Ext}^{i-1}(M\langle 1 \rangle, L\langle n \rangle) \quad (5.7)$$

für einen einfachen Modul im Grad  $n$ . Wir erhalten nun für den zweiten Ausdruck der obigen Sequenz

$$\text{Ext}^i(\theta_s M, L\langle n \rangle) \cong \text{Ext}^i(\theta_0^\lambda M, \theta_0^\lambda L\langle n+1 \rangle), \quad (5.8)$$

wegen der Adjungiertheit der entsprechenden Funktoren. Nun ist aber (5.8) Null, falls  $L$  „über der  $s$ -Wand lag“, und andernfalls  $\text{Ext}^i(\theta_0^\lambda M, \tilde{L}\langle n \rangle)$  für einen einfachen Modul  $\tilde{L}$  im Grad Null. (Einfache werden beim Verschieben auf die Wand im Grad um Eins verschoben!). Ist nun  $n \neq i$ , so ist besagter Raum (5.8) nach Voraussetzung aber trivial.

Also liefert (5.7) mit den Voraussetzungen an  $M$  für  $i \neq n$  die exakte Sequenz

$$0 \leftarrow \text{Ext}^i(N, L\langle n \rangle) \leftarrow 0. \quad (5.9)$$

Somit hat  $N$  nur  $i$ -fache Erweiterungen mit Einfachen im Grad  $i$ . ◇

Allerdings liefert das keine Aussage über die Hauptserien, da wir im allgemeinen nicht wissen, ob die auf die Wand geschobenen Koszul sind. In der Tat zeigen sogar die Beispiele in Abschnitt 5.2.2, daß die Hauptserien im allgemeinen nicht Koszul sind, da sonst insbesondere der Kopf vom Grad Null wäre und damit die Gradfiltrierung immer mit der Sockelfiltrierung übereinstimmen müßte. Da nun aber die Sockelfiltrierung der Radikalfiltrierung des dualen Moduls entspricht, müßten die Hauptserien in den Beispielen 5.2.2 alle „rigid“ sein.

## KAPITEL

# 6

## Eine graduierte Form der Jantzen-Summenformel für Hauptserien

H.H. Andersen und N. Lauritzen zeigen in ihrem Artikel [AL] eine Summenformel für die dort eingeführte Jantzenfiltrierung auf den Hauptserien. Wir wollen sie in unserem Kontext ebenfalls beweisen. Insbesondere wird sie so zu einer rein kombinatorischen Aussage.

Für einen  $\mathbb{Z}$ -graduierten Modul  $M$  über einem nichtnegativ graduierten Ring bezeichnen wir mit  $(M^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  die assoziierte Filtrierung.

Verwenden wir die Ergebnisse aus [BGS], so liefert die Graduierungsfiltrierung auf den graduierten Hauptserien in der Tat eine Filtrierung als graduierte  $A$ -Rechtsmoduln. Der folgende Satz soll die naheliegende Vermutung bekräftigen, daß die Jantzen- und die Graduierungsfiltrierung zusammenfallen.

Für einen graduierten  $A$ -Modul  $M$  sei  $\text{ch } M := [\text{v}(M)] \in [\text{mof } -A]$  der „nichtgraduierte Charakter“ von  $M$ .

### **Satz 6.1 (Kombinatorische Summenformel).**

Sei  $z \in W$  und sei  $R^+(z) = \{\beta \in R^+ \mid z^{-1}(\beta) < 0\}$  die Menge aller positiven Wurzeln, die unter  $z^{-1}$  ihr Vorzeichen wechseln. Dann gelten

die folgenden Charakterformeln für die Hauptserien,

$$\sum_{i \geq 1} \text{ch} \left( (\mathcal{P}_{w_\circ z} \langle l(z) \rangle)^i \right) = \sum_{\beta \in R^+(z^{-1})} \left( \text{ch } \Delta(0) - \text{ch } \Delta(s_\beta \cdot 0) \right) + \sum_{\beta \in R^+ \setminus R^+(z^{-1})} \text{ch } \Delta(s_\beta \cdot 0)$$

und die bekannten Formeln für die Vermamoduln

$$\sum_{i \geq 1} \text{ch}(\Delta(z \cdot 0)^i) = \sum_{\beta \in R^+ \setminus R^+(z)} \text{ch } \Delta(s_\beta \cdot 0).$$

Mit der entsprechenden Umformulierung (siehe Bemerkung 6.2) sind das gerade die Formeln aus [AL, Theorem 7.1].

*Beweis:* Für eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow K\langle 1 \rangle \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow K\langle -1 \rangle \rightarrow 0$$

in gmof  $-A$  gilt

$$[B] - [C] = (v - v^{-1})[K]$$

in der graduierten Grothendieckgruppe. Wir greifen nun nochmals auf Hauptsatz 7.4.2 vor. Addieren wir alle diese Gleichungen beginnend mit  $B = \Delta(z \cdot 0)$  und endend mit  $C = \nabla(z \cdot 0)$ , dem vereinbarten Lift des entsprechenden dualen Vermoduls, auf, so erhalten wir für  $z \in W$  eine Gleichung der Form

$$[\mathcal{P}_{(w_o, w_o z)}] - [\mathcal{P}_{(z^{-1}, e)}] = [\mathcal{P}_{(w_o, w_o z)}] - [\mathcal{P}_{(e, z)}] = \sum_{x \in M_z} (v - v^{-1})[K_x] \quad (6.1)$$

für gewisse graduierte Moduln  $K_x$  mit  $\text{ch } K_x = \text{ch } \Delta(x \cdot 0)$ , wobei  $x$  eine noch näher zu bestimmende Teilmenge  $M_z$  (eventuell mit Vielfachheiten!) der Weylgruppe durchläuft. Da nun

$$(v^i - v^{-i}) = (v - v^{-1}) \underbrace{(v^{i-1} + v^{i-3} + \dots + v^{-i+1})}_{i \text{ Summanden}}$$

ist, erhalten wir die im zweiten Teil des Satzes zu bestimmenden Charaktere zu den Vermoduln durch

- Teilen durch  $v - v^{-1}$  und
- anschließendem Spezialisieren  $v := 1$  der rechten Seite von Gleichung (6.1).

Also

$$\sum_{i \geq 1} \text{ch}(\mathcal{P}_{(w_o, w_o z)}^i) = \sum_{x \in M_z} \text{ch } K_x = \sum_{x \in M_z} \text{ch } \Delta(x \cdot 0).$$

Bestimmung von  $M_z$ : Für  $w_o = s_1 \cdot \dots \cdot s_r$  und  $w_o z = s_1 \cdot \dots \cdot s_m$  reduzierte Zerlegungen durchläuft  $x$  die Elemente der Form  $x_i = z y_i^{-1} s_i y_i$  mit  $y_i := s_{i+1} \cdot \dots \cdot s_m$  für  $1 \leq i \leq m$  (dabei sei  $y_m := e$ ). Für  $s_i = s_{\alpha_i}$  ist somit  $y_i^{-1} s_i y_i$  die Spiegelung, die zur Wurzel  $y_i^{-1}(\alpha_i) = s_r \cdot \dots \cdot s_{i+1}(\alpha_i)$  gehört. Nach [MP, 5.2, Proposition 3] ist also

$$\begin{aligned} M_z &= \{z s_\beta \mid \beta \in R^+, w_o z(\beta) \in R^-\} \\ &= \{z s_\beta z^{-1} z \mid \beta \in R^+, w_o z(\beta) \in R^-\} \\ &= \{s_\gamma z \mid \gamma = z(\beta), \beta \in R^+, w_o z(\beta) \in R^-\} \\ &= \{s_\beta z \mid \beta \in R^+, z^{-1}(\beta) \in R^+\} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die bekannte Summenformel

$$\sum_{i \geq 1} \text{ch } \Delta(z \cdot 0)^i = \sum_{\beta \in R^+ \setminus R^+(z)} \Delta(s_\beta z \cdot 0) = \sum_{\beta \in R^+(z \cdot 0)} \Delta(s_\beta z \cdot 0), \quad (6.2)$$

wobei  $R^+(z \cdot 0) = \{\beta \in R^+ \mid \langle z \cdot 0 + \rho, \check{\alpha} \rangle > 0\}$  gesetzt wird. Das liefert also den zweiten Teil der Behauptung.

Für den ersten Teil der Behauptung betrachten wir entsprechend zu (6.1) zu beliebigem  $z \in W$

$$[\mathcal{P}_{w_o}] - [\mathcal{P}_{w_o z}] = \sum_{x \in M_z^1} (v - v^{-1})[K_x] \quad (6.3)$$

$$[\mathcal{P}_z] - [\mathcal{P}_e] = \sum_{x \in M_z^2} (v - v^{-1})[K_x] \quad (6.4)$$

mit geeigneten Multimengen  $M_z^1$  und  $M_z^2$ . Es seien  $w_o = s_1 \cdot \dots \cdot s_r$  und  $w_o z = s_{m+1} \cdot \dots \cdot s_r$  reduzierte Zerlegungen. Wir setzen  $a = s_1 \cdot \dots \cdot s_m$ , also  $aw_o z = w_o$ . Man überlegt sich analog zu oben, daß für  $s_i = s_{\alpha_i}$  die Elemente in  $M_z^1$  gerade die Spiegelungen zu den Wurzeln  $(y_i w_o)^{-1}(\alpha_i) = s_r \cdot \dots \cdot s_{m+1} s_m \cdot \dots \cdot s_{i+1}(\alpha_i) = z^{-1} w_o s_m \cdot \dots \cdot s_{i+1}(\alpha_i)$  für  $1 \leq i \leq m-1$  sind. Somit folgt wiederum mit [MP, 5.2, Proposition 3]

$$\begin{aligned} M_z^1 &= \{s_{z^{-1}w_o(\gamma)} \mid \gamma \in R^+, a(\gamma) \in R^-\} \\ &= \{s_{z^{-1}w_o(\gamma)} \mid \gamma \in R^+, (w_o z^{-1} w_o)(\gamma) \in R^-\} \\ &= \{s_\beta \mid (z^{-1} w_o)^{-1}(\beta) \in R^+, (w_o z^{-1} w_o)(z^{-1} w_o)^{-1}(\beta) \in R^-\} \\ &= \{s_\beta \mid (w_o z)(\beta) \in R^+, w_o(\beta) \in R^-\} \\ &= \{s_\beta \mid \beta \in R^+, z(\beta) \in R^-\} \\ &= R^+(z^{-1}). \end{aligned}$$

Wählen wir nun  $z = s_1 \cdot \dots \cdot s_m$  als reduzierte Zerlegung. Mit denselben Argumenten wie oben und  $s_i = s_{\alpha_i}$  durchläuft dann  $M_z^2$  die Menge der Spiegelungen an Wurzeln zu  $s_m \cdot \dots \cdot s_{i+1}(\alpha_i)$  mit  $1 \leq i \leq m$ . Somit ist

$$M_z^2 = \{s_\gamma \mid \gamma \in R^+, z(\gamma) \in R^-\} = M_z^1.$$

Nun können wir folgende Summen schreiben

$$\begin{aligned} v^{l(z)}[\mathcal{P}_{w_o}] &= ((v^{l(z)} - v^{l(z)-2}) + \dots + (v^{a+2} - v^a))[\mathcal{P}_{w_o}] + v^a[\mathcal{P}_{w_o}] \\ -v^{-l(z)}[\mathcal{P}_e] &= -((v^{-l(z)} - v^{-l(z)+2}) + \dots + (v^{a-2} - v^a))[\mathcal{P}_e] - v^a[\mathcal{P}_e] \end{aligned}$$

mit  $a \equiv l(z) \pmod{2}$ ,  $a \in \{0, -1\}$ . Insgesamt erhalten wir somit aus (6.3) und (6.4)

$$\begin{aligned} v^{l(z)}[\mathcal{P}_{w_o z}] - v^{-l(z)}[\mathcal{P}_z] &= \sum_{i=1}^{n_1} v^{b_i} (v - v^{-1})[\mathcal{P}_{w_o}] + \sum_{i=1}^{n_2} v^{c_i} (v - v^{-1})[\mathcal{P}_e] \\ &\quad + v^a[\mathcal{P}_{w_o}] - v^a[\mathcal{P}_e] \\ &\quad - v^{l(z)} \sum_{x \in M_z^1} (v - v^{-1})[K_x] - v^{-l(z)} \sum_{x \in M_z^2} (v - v^{-1})[K_x] \end{aligned}$$

mit  $n_1 + n_2 = l(z)$  und  $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ . Teilen der rechten Seite durch  $(v - v^{-1})$  und Spezialisieren liefert mit der Formel (6.1)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l(z)} \text{ch } \Delta(0) + \sum_{x \in M_e} \text{ch } \Delta(x \cdot 0) - \sum_{x \in M_z^1} \text{ch } \Delta(x \cdot 0) - \sum_{x \in M_z^2} \text{ch } \Delta(x \cdot 0) \\ &= \sum_{x \in M_z^1} (\text{ch } \Delta(0) - \text{ch } \Delta(x \cdot 0)) + \sum_{x \in M_e \setminus M_z^1} \text{ch } \Delta(x \cdot 0), \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile aufgrund von  $|M_z^1| = l(z^{-1}) = l(z)$  und  $M_z^2 = M_z^1$  und  $M_e = R^+$  gilt. Somit erhalten wir also die Formel

$$\sum_{i \geq -l(z)+1} \text{ch}(\mathcal{P}_{w_o z}^i) = \sum_{\beta \in R^+(z^{-1})} (\text{ch } \Delta(0) - \Delta(s_\beta \cdot 0)) + \sum_{\beta \in R^+ \setminus R^+(z^{-1})} \text{ch } \Delta(s_\beta \cdot 0).$$

Das ist dann genau die Behauptung.  $\diamond$

**Bemerkung 6.2.**

Man kann so auch die noch allgemeinere Summenformel [AL, Remark 7.1] zeigen, worauf wir jedoch verzichten. Stattdessen erscheint es sinnvoll, die Übersetzung in die dort verwandte Notationen anzugeben.

Ihr Modul  $M(x, y)$  entspricht unserem  $\mathcal{L}(\Delta(x^{-1} \cdot 0), \nabla(yw_o \cdot 0)) = \mathcal{P}_{(x^{-1}, yw_o)}$  und ihr  $M^w(0)$  unserem  $\mathcal{L}(\Delta(w^{-1}w_o \cdot 0), \nabla(w^{-1}w_o \cdot 0)) = \mathcal{P}_{w^{-1}w_o}$ . Nun entspricht also unser  $\mathcal{P}_{w_o z}$  ihrem  $M(x, y)$  mit  $x := z^{-1}w_o$  und  $y := w_o z w_o$  (mit dem offensichtlichen Shift in der Filtrierung). Für  $M \in \mathcal{O}_0$  sei  $\text{ch } M = [M] \in [\mathcal{O}_0] \cong [\text{mof } -A]$ . Somit gilt also nach [AL, Remark 7.1] die Formel

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \text{ch}(M(x, y)^i) &= \sum_{\beta \in R^+(xy) \setminus R^+(x)} \left( \text{ch } \Delta(xy \cdot \lambda) - \Delta(s_\beta xy \cdot \lambda) \right) \\ &+ \sum_{\beta \in R^+(xy) \cap R^+(x)} \text{ch } \Delta(s_\beta xy \cdot \lambda). \end{aligned}$$

mit  $\lambda = w_o \cdot 0$ . Es gilt nun in unserem Fall  $R^+(xy) = R^+(z^{-1}w_o w_o z w_o) = R^+$  und

$$\begin{aligned} R^+(x) = R^+(z^{-1}w_o) &= \{\beta \in R^+ \mid w_o z(\beta) \in R^-\} \\ &= \{\beta \in R^+ \mid z(\beta) \in R^+\} \\ &= R^+ \setminus R^+(z^{-1}). \end{aligned}$$

Somit läuft die erste Summe über  $R^+(z^{-1})$  und es gilt  $xy \cdot \lambda = 0$ . Die zweite Summe läuft genau über das Komplement in  $R^+$ . Das ergibt gerade unsere Formel.

In den Beispielen aus Kapitel 5.2.2 wird deutlich, daß in vielen Fällen die Summenformel sogar den Charakter des gesamten Moduls liefert.

Für die Graduierung sieht man unter Verwendung von Hauptsatz 5.1.4 leicht ein, daß dies für die Hauptserie  $\mathcal{P}_x$  genau dann nicht der Fall ist, wenn es eine reduzierte Zerlegung  $x = s_1 \cdot \dots \cdot s_r$  von  $x$  gibt, so daß  $s_j x \leq x$  für  $1 \leq j \leq r$  gilt. Insbesondere gilt dies für  $x = e$ ,  $x = w_o$  oder  $x$  eine einfache Spiegelung. Die Länge der Gradfiltrierung ist genau dann maximal, wenn diese Bedingung für  $x$  und  $w_o x$  gilt.

---

# Primitive Quotienten und ihre Kompositionsfaktoren

---

*Ausgangspunkt dieses Kapitels sind die in [Jo6] geäußerten Vermutungen, inwiefern eine Filtrierung auf den Hauptserien Aussagen über Kompositionsfaktoren von „primitiven Quotienten“, das heißt Quotienten der universell Einhüllenden Algebra nach einem primitiven Ideal, liefern kann. Wir haben versucht, diese Vermutungen in unseren Kontext zu übertragen und sie ihm entsprechend zu formulieren.*

*In der Tat erhalten wir durch unsere graduierten Formen der Hauptserien eine obere Schranke für die einfachen Moduln, die als Faktoren in einem gegebenen primitiven Quotienten auftreten können. Im Falle von einfachen Multiplizitäten liefert das bereits die gesamte Information. Im anderen Fall erhalten wir eine untere Schranke, die jedoch von einer geeigneten Identifizierung von Kompositionsfaktoren abhängt. Dieser Sachverhalt wird in Hauptsatz 7.4.2 präzise ausgedrückt. Grundlage dafür ist eine graduierte Form der Dufflo-Zeblenko-Vierersequenz aus ([Jo5]).*

*Die Ergebnisse werden durch konkrete Berechnungen auch im Fall höherer Multiplizitäten illustriert.*

## 7.1 Zu einer Vermutung von Joseph: Eine obere Schranke für Kompositionsfaktoren primitiver Quotienten

Sei  $I = I(x) \subset \mathcal{U}$  der Annihilator eines einfachen Moduls  $L(x \cdot 0) \in \mathcal{O}_0$ . Nach einem Satz von Dufflo [Du, Proposition 10] gibt es eine Abbildung

$$\psi_x : \mathcal{P}_{w_o} \longrightarrow \mathcal{P}_x \tag{7.1}$$

vom Bimodul, der unter der Bernstein-Gelfand-Äquivalenz dem dominanten Vermamodul entspricht, in die entsprechende Hauptserie  $\mathcal{P}_x$ , deren Bild isomorph zum primitiven Quotienten  $\mathcal{U}/I(x)$  ist.

Die primitiven Ideale in  $\mathcal{U}$  sind genau die Annihilatoren einfacher Moduln aus  $\mathcal{O}$  ([Ja2, 7.4]).

Somit werden also in der Tat alle primitiven Quotienten durch Bilder der Morphismen aus (7.1) beschrieben. Die Menge der Annihilatoren einfacher Moduln aus  $\mathcal{O}_0$  werden parametrisiert durch die Linkszellen der Weylgruppe (siehe [KL, 1.6]). Nach [Du, Proposition 8] gibt es eine Abbildung von der Menge der Annihilatoren einfacher Moduln in  $\mathcal{O}_0$  in die Teilmenge aller Involutionen der Weylgruppe. Dabei wird  $I$  das Weylgruppenelement  $z$  zugeordnet, so daß  $L(z \cdot 0)$  der eindeutig bestimmte minimale Untermodul von  $\mathcal{U}/I \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0)$  ist (siehe auch [Ja2, 7.11]).

Ist  $\mathfrak{g}$  beispielsweise eine Liealgebra vom Typ  $A_n$ , so liefert das eine Bijektion zwischen den primitiven Idealen von  $\mathcal{U}$  und den Involutionen der Weylgruppe. Im allgemeinen (sei etwa  $\mathfrak{g}$  vom Typ  $B_2$  oder  $G_2$ ) liefert das jedoch nur eine Inklusion. Die Elemente des Bildes nennen wir kurz *Duflo-Involutionen*. Details dazu findet man in [Du], [Jo2] oder [Ja2, Kapitel 5 und 7].

Wir werden nun zeigen, daß die Abbildung  $\psi_x$  als graduierte Abbildung aufgefaßt werden kann, so daß dies eine obere Schranke für die auftretenden Kompositionsfaktoren liefert. Inwiefern diese Schranke tatsächlich angenommen wird, wird dann in den Beispielen untersucht. Man vergleiche dazu auch Hauptsatz 7.4.2.

**Satz 7.1.1. (obere Schranke für die Kompositionsfaktoren)**

Für alle  $x \in W$  ist die von Duflo definierte Abbildung

$$\psi_x : \mathcal{P}_{w_o} \longrightarrow \mathcal{P}_x$$

als Morphismus zwischen graduierten Moduln graderhaltend. Insbesondere gilt

$$[(\mathcal{U}/\text{Ann } L(x \cdot 0)) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0) : L(y \cdot 0)] \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \min \{ [\Delta(0) : L(y \cdot 0)\langle i \rangle], [\mathcal{P}_x \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0) : L(y \cdot 0)\langle i \rangle] \}.$$

Dabei verwenden wir auf der rechten Seite die für die Hauptserien gewählten graduierten Lifts mit der durch Satz 5.1.4 gegebenen Kombinatorik.

*Beweis:* Da alle Hauptserien  $\mathcal{P}_y$  (mit  $y \in W$ ) dieselben Kompositionsfaktoren besitzen, ist der Morphismenraum von  $\mathcal{P}_{w_o}$  nach  $\mathcal{P}_y$  stets eindimensional, also ist die Abbildung  $\psi_x$  stets homogen. Nun tritt aber der endlichdimensionale Kompositionsfaktor  $L(0)$  stets im Bild auf, da  $I(e)$  bezüglich der Inklusion unter den primitiven Idealen maximal ist. Er ist aber nach Satz 5.1.4 jeweils vom Grad Null. Somit ist die Abbildung vom Grad Null. Mit der Beschreibung des Bildes von  $\psi_x$  folgt dann auch die Aussage über die Kompositionsfaktoren.  $\diamond$

Aufgrund dieses Ergebnisses wollen wir eine Frage (mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln) formulieren, die von Joseph in [Jo6] als Frage oder Vermutung aufgestellt wurde:

*Sind die Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten  $\mathcal{U}/I(x)$  genau die einfachen Moduln, die in  $\mathcal{P}_{w_o}$  und  $\mathcal{P}_x$  im gleichen Grad auftreten?*

Diese Frage ist natürlich nicht eindeutig formuliert für den Fall höherer Multiplizitäten. Deswegen wollen wir erst einmal den einfachen Fall, das heißt Liealgebren vom Rang 2, betrachten.

## 7.2 Wurzelsysteme vom Rang 2: Einfache Multiplizitäten

### 7.2.1 Das Beispiel: $A_2$

In diesem Fall gibt es vier verschiedene Linkszellen, also auch vier verschiedene primitive Ideale. Mit dem Resultat [Jo3, 4.8] oder auch mit dem in [St] beschriebenen Verfahren können wir die Kompositionsfaktoren der primitiven Quotienten berechnen. Wir bezeichnen die beiden einfachen Spiegelungen mit  $s$  und  $t$ . Damit erhalten wir die folgenden Daten, wobei sich  $B'$  und  $B''$  auf die Berechnung nach [Jo3, 4.8] beziehen und mit den Bezeichnungen dort übereinstimmen:

Primitives Ideal	Kompositionsfaktoren	$B'$	$B''$	Kombinatorik
$I(e)$	$L(0)$	$\{\alpha, \beta\}$	$\{-\alpha, -\beta\}$	$H_{w_o}H_{w_o} = \mathbf{D}_e + v^{-1}(D_s + D_t) + v^{-2}(D_{st} + D_{ts}) + v^{-3}D_{sts}$
$I(t) = I(ts)$	$L(0), L(s \cdot 0)$	$\{\alpha\}$	$\{-\beta\}$	$H_t^2 = v^{-1}D_t + \mathbf{D}_e + D_{ts} + D_{st} + v\mathbf{D}_s + vD_{tst}$
$I(s) = I(st)$	$L(0), L(t \cdot 0)$	$\{\beta\}$	$\{-\alpha\}$	$H_s^2 = v^{-1}D_s + \mathbf{D}_e + D_{st} + D_{ts} + v\mathbf{D}_t + vD_{sts}$
$I(sts)$	alle einfachen	$\emptyset$	$\{w_o\}$	$H_e = \mathbf{D}_e + v(\mathbf{D}_s + \mathbf{D}_t) + v^2(\mathbf{D}_{st} + \mathbf{D}_{ts}) + v^3\mathbf{D}_{sts}$

Dabei bezeichnen wir mit  $D_x$  das Heckealgebreneslement, das der Isomorphieklasse des einfachen Moduls  $L(x \cdot 0)$  entspricht. Die durch Satz 7.1.1 in Frage kommenden Kompositionsfaktoren für die primitiven Quotienten sind durch Hervorhebung des entsprechenden Heckealgebreneselementes dargestellt.

In diesem Fall sind also die Kompositionsfaktoren der primitiven Quotienten genau diejenigen, die in der entsprechenden Hauptserie und in  $\mathcal{P}_{w_o}$  im selben Grad auftreten.

### 7.2.2 Die Beispiele $B_2$ und $G_2$

Für die anderen Wurzelsysteme vom Rang zwei erhalten wir mit den entsprechenden Rechnungen dieselbe Aussage. Wir verzichten deshalb auf die explizite Angabe. Wir wollen als erste Beobachtung festhalten:

**Beobachtung 7.2.1.** *Für die Wurzelsysteme vom Rang zwei sind die Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten  $\mathcal{U}/I(x)$  genau die einfachen Moduln, die in  $\mathcal{P}_{w_o}$  und  $\mathcal{P}_x$  im gleichen Grad auftreten.*

## 7.3 Wurzelsysteme vom Rang 3 und höhere Multiplizitäten

### 7.3.1 Das Beispiel: $A_3$

Wir werden nun das einfachste Beispiel mit höheren Multiplizitäten untersuchen:  $A_3$ . Wir bezeichnen die drei einfachen Spiegelungen  $s_\alpha, s_\beta$  und  $s_\gamma$  (mit  $\langle \check{\alpha}, \gamma \rangle = 0$ ) schlicht mit

1, 2 und 3. Die Weylgruppe (unter der Rechtsoperation) besteht dann aus den folgenden Elementen:

$$W = \{0, 3, 2, 1, 12, 23, 32, 13, 21, 123, 312, 232, 121, 231, 321, 2312, 1232, 1231, 1321, 2321, 12132, 32312, 12321, 123121\}$$

Wir numerieren die zugehörigen einfachen Moduln des trivialen Blocks in dieser Reihenfolge. Die Anzahl der Linkszellen, wie auch der verschiedenen primitiven Ideale, ist 10 (siehe [Ja2, 5.27]). Wir bezeichnen sie mit den Buchstaben **A** bis **J**. Die Kompositionsfaktoren der entsprechenden primitiven Quotienten sehen wie folgt aus (vgl. [St]):

<b>A<sub>3</sub></b>	Linkszelle	Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten	$B'$	$B''$
<b>A</b>	$\{0\}$  Kombinatorik:	$L_1$  $v^{-6}D_{24} + v^{-5}(D_{21} + D_{22} + D_{23}) + v^{-4}(D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_{19} + D_{20}) + v^{-3}(D_{10} + D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{14} + D_{15} + D_{23}) + v^{-2}(D_5 + D_6 + D_7 + D_8 + D_9 + D_{16}) + v^{-1}(D_2 + D_3 + D_4) + D_1$		
<b>B</b>	$\{3, 23, 123\}$  Kombinatorik:	$L_1, L_2$  $v^{-4}D_{24} + v^{-3}(D_{23} + D_{13} + D_{21} + D_{22}) + v^{-2}(D_5 + D_9 + 2D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_{19} + D_{20}) + v^{-1}(D_4 + D_{23} + D_{10} + D_{14} + D_{15} + D_{11} + D_3 + D_{12}) + (D_7 + D_6 + D_1 + D_8) + vD_2$	$\{\beta, \gamma\}$	$\{-\alpha, -\beta\}$
<b>C</b>	$\{2, 12, 32\}$  Kombinatorik:	$L_1, L_3$  $v^{-4}D_{24} + v^{-3}(2D_{23} + D_{21} + D_{22}) + v^{-2}(D_8 + D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_{19} + D_{20}) + v^{-1}(D_2 + D_4 + D_{10} + D_{14} + D_{15} + D_{11} + D_{12} + D_{13}) + (D_9 + D_{16} + D_7 + D_6 + D_5 + D_1) + vD_3$		
<b>D</b>	$\{1, 21, 321\}$  Kombinatorik:	$L_1, L_4$  $v^{-4}D_{24} + v^{-3}(D_{23} + D_{12} + D_{21} + D_{22}) + v^{-2}(D_6 + D_7 + 2D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_{19} + D_{20}) + v^{-1}(D_2 + D_{23} + D_{10} + D_{14} + D_{15} + D_{11} + D_3 + D_{13}) + (D_9 + D_5 + D_1 + D_8) + vD_4$	$\{\alpha, \beta\}$	$\{-\gamma, -\beta\}$
<b>E</b>	$\{312, 2132\}$  Kombinatorik:	$L_1, L_3, L_{16}$  $v^{-2}D_8 + v^{-1}(D_2 + D_4 + D_{23} + D_{10} + D_{14} + D_{15} + D_{11}) + (D_{19} + D_{20} + D_9 + D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_7 + D_6 + D_5 + D_1) + v(D_{12} + D_{13} + D_{21} + D_{22} + D_{23} + D_3) + v^2(D_{16} + D_{24})$	$\{\alpha, \gamma\}$	$\{-\gamma, -\alpha\}$
<b>F</b>	$\{13, 231\}$  Kombinatorik:	$L_1, L_2, L_4, L_8$  $v^{-2}(D_{16} + D_{24}) + v^{-1}(D_{23} + D_3 + D_{21} + D_{22} + D_{12} + D_{13}) + (D_{19} + D_{20} + D_9 + D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_7 + D_6 + D_5 + D_1) + v(D_2 + D_4 + D_{10} + D_{11} + D_{14} + D_{15} + D_{23}) + v^2D_8$		

<b>A<sub>3</sub></b>	Linkszone	Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten	$B'$	$B''$
<b>G</b>	<b>{232,1232,12132}</b>	$L_1, L_2, L_3, L_6, L_7, L_{12}, L_{16}$	$\{\gamma\}$	$\{-\alpha\}$
	Kombinatorik:	$v^{-1}(D_4 + D_{23} + D_{13}) + (D_{19} + D_9 + D_{16} + D_{18} + D_5 + D_1 + D_{24} + D_8) + v(D_{21} + D_{22} + D_3 + D_2 + D_{10} + D_{11} + D_{14} + D_{15} + D_{23}) + v^2(D_{16} + D_{17} + D_{20} + D_6 + D_7) + v^3 D_{12}$		
<b>H</b>	<b>{1213,2321,12321}</b>	$L_1, L_2, L_4, L_8, L_{23}$	$\{\beta\}$	$\{-\beta\}$
	Kombinatorik:	$v^{-1}D_3 + (D_1 + D_5 + D_6 + D_7 + D_9 + D_{16}) + v(D_2 + D_4 + D_{10} + D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{14} + D_{15}) + v^2(D_8 + D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_{19} + D_{20}) + v^3(D_{21} + D_{22} + 2D_{23})v^4 D_{24}$		
<b>I</b>	<b>{121,3121,32312}</b>	$L_1, L_3, L_4, L_5, L_9, L_{13}, L_{16}$	$\{\alpha\}$	$\{-\gamma\}$
	Kombinatorik:	$v^{-1}(D_2 + D_{23} + D_{12}) + (D_{20} + D_{16} + D_{17} + D_7 + D_6 + D_1 + D_{24} + D_8) + v(D_{21} + D_{22} + D_3 + D_4 + D_{10} + D_{11} + D_{14} + D_{15} + D_{23}) + v^2(D_{16} + D_{18} + D_{19} + D_5 + D_9) + v^3 D_{13}$		
<b>J</b>	<b>{123121}</b>	alle Kompositionsfaktoren von $\mathcal{P}_{w_o}$		

Die entsprechenden (Duflo-)Involutionen sind in der obigen Tabelle durch Fettdruck hervorgehoben. Das zugehörige Heckealgebraelement ist aufgelistet.

**Beobachtung 7.3.1.** Für das Wurzelsystem  $A_3$  sind für eine Involution  $x \in W$  die Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten  $\mathcal{U}/I(x)$  genau die einfachen Moduln, die in  $\mathcal{P}_{w_o}$  und  $\mathcal{P}_x$  im gleichen Grad auftreten.

In den für uns mit erträglichem Rechenaufwand zugänglichen Ergebnissen wurde diese Beobachtung für Typ  $A$  stets bestätigt. Anders verhält es sich jedoch mit anderen Wurzelsystemen, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

### 7.3.2 Das Beispiel: $B_3$

Zum Wurzelsystem  $B_3$  gibt es (siehe [Jo1, 5.2]) 14 verschiedene primitive Ideale. Da bereits die Berechnung des entsprechenden Köchers zu mühsam ist, werden wir in diesem Fall darauf verzichten, die Kompositionsfaktoren aller primitiver Quotienten auszurechnen. Dennoch möchten wir unsere Fragestellung zumindest anhand derer überprüfen, die wir mit der Formel aus [Jo3] bestimmen können. Die Weylgruppe besteht aus 48 Elementen. Wir bezeichnen das neutrale Element mit 0 und die drei einfachen Spiegelungen mit  $a = s_\alpha$ ,  $b = s_\beta$  und  $c = s_\gamma$ . Sie sind so gewählt, daß  $\langle \check{\alpha}, \beta \rangle = -2$  und  $\langle \check{\alpha}, \gamma \rangle = 0$  gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
 W = \{ & 0, c, b, a, cb, ba, bc, ac, ab, bab, cba, bcb, bac, aba, acb, abc, cbab, babc, bcb, bacb, abab, acba, \\
 & abac, abcb, cbabc, babcb, bcbab, bacba, acbab, ababc, abacb, abcb, bcbabc, babcb, bacbab, \\
 & acbabc, ababc, abacba, abcbab, babcbab, bacbabc, abcbabc, ababcba, abacb, babcbabc, \\
 & ababcab, abacbabc, ababcabc \}.
 \end{aligned}$$

Wir numerieren die einfachen Moduln in dieser Reihenfolge. Die Formel aus [Jo3] liefert folgende Kompositionsfaktoren für die primitiven Quotienten:

$B_3$	Linkszelle	$B'$	$B''$	Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten
<b>A</b>	$\{0\}$			
<b>B</b>	$\{\mathbf{bcbabc}, ababcb, abcbabc, \mathbf{babcabc}\}$	$\{\alpha\}$	$\{-\alpha\}$	$L_1, L_2, L_3, L_5, L_7, L_{12}, L_{20}, L_{40}, L_{45}$
<b>C</b>	$\{\mathbf{bcb}, abcb, babcb\}$			
<b>D</b>	$\{\mathbf{c}, bc, abc, babc, \mathbf{cbabc}\}$	$\{\alpha, \beta\}$	$\{-\alpha, -\beta\}$	$L_1, L_2$
<b>E</b>	$\{\mathbf{ababcbabc}\}$			Kompositionsfaktoren von $\mathcal{P}_{w_o}$
<b>F</b>	$\{bcbab, abcbab, \mathbf{babcab}\}$	$\{\alpha, \gamma\}$	$\{-\alpha, -\gamma\}$	$L_1, L_3, L_{20}, L_{40}$
<b>G</b>	$\{acb, \mathbf{bacb}, abacb\}$			
<b>H</b>	$\{\mathbf{b}, cb, ab, \mathbf{bab}, cbab\}$			
<b>I</b>	$\{ababc, \mathbf{acbabc}, bacbabc, ababcba, \mathbf{abacbabc}\}$	$\{\beta\}$	$\{-\beta\}$	$L_1, L_2, L_4, L_8, L_{25}, L_{32}, L_{36}, L_{38}$
<b>J</b>	$\{bcbab, \mathbf{abcba}, babcba\}$			
<b>K</b>	$\{\mathbf{ac}, bac, abac\}$			
<b>L</b>	$\{acba, bacba, \mathbf{abacba}\}$	$\{\beta, \gamma\}$	$\{-\beta, -\gamma\}$	$L_1, L_4, L_{38}$
<b>M</b>	$\{\mathbf{a}, ba, cba, aba\}$			
<b>N</b>	$\{\mathbf{abab}, acbab, bacbab, abacbab, \mathbf{ababcab}\}$	$\{\gamma\}$	$\{-\gamma\}$	$L_1, L_3, L_4, L_6, L_9, L_{10}, L_{14}, L_{20}, L_{21}, L_{28}, L_{31}, L_{38}, L_{40}$

Die Involutionen sind durch Fettschrift hervorgehoben. Wir werden nun diejenigen Kompositionsfaktoren bestimmen, die in den entsprechenden Hauptserien und in  $\mathcal{P}_{w_o}$  im selben Grad auftreten.

Zuerst geben wir die Kompositionsfaktoren von  $\mathcal{P}_{w_o}$  an. Wir erhalten dazu folgende Darstellung des entsprechenden Elementes in der Heckealgebra, wobei  $D_i$  dem einfachen Modul  $L_i$  mit der oben eingeführten Numerierung entspricht.

$$\begin{aligned}
H_e H_e &= v^9(D48) \\
&+ v^8(D46 + D45 + D47) \\
&+ v^7(D44 + D43 + D40 + D41 + D42) \\
&+ v^6(D37 + D35 + D33 + D47 + D34 + D36 + D38 + D39) \\
&+ v^5(D42 + D41 + D30 + D29 + D27 + D26 + D25 + D28 + D31 + D32 + D40) \\
&+ v^4(D45 + D36 + D34 + D39 + D17 + D18 + D23 + D22 + D21 + D24 + D20 + D19) \\
&+ v^3(D14 + D32 + D31 + D28 + D25 + D11 + D13 + D10 + D12 + D16 + D15 + D40) \\
&+ v^2(D20 + D8 + D5 + D7 + D6 + D9 + D38) \\
&+ v(D2 + D4 + D3) \\
&+ D1
\end{aligned}$$

Wir vergleichen das nun mit dem Heckealgebrenelement  $H_{baba}H_{abab}$ , das zur Hauptserie  $\mathcal{P}_{w_o abab} = \mathcal{P}_{cbabc}$  und somit zur Linkszelle der Sorte **D** gehört. Es gilt

$$\begin{aligned}
H_{baba}H_{abab} &= v^2(D36 + D45) \\
&+ v(D25 + D41 + D42 + D48 + D40 + D32 + D12 + \mathbf{D2}) \\
&+ (D39 + D20 + D46 + D34 + 2D47 + D19 + D45 \\
&\quad + D33 + D7 + D5 + D24 + D8 + D38 + \mathbf{D1}) \\
&+ \frac{1}{v}(D31 + D40 + D43 + D44 + D32 + D28 + D25 + D26 + D27 \\
&\quad + D11 + D13 + D16 + D15 + D3 + D41 + D42 + D4) \\
&+ \frac{1}{v^2}(D38 + D6 + D9 + D34 + D35 + D36 + D37 + D39 \\
&\quad + D23 + D22 + D17 + D18 + D20) \\
&+ \frac{1}{v^3}(D28 + D29 + D30 + D31 + D40 + D14 + D10) \\
&+ \frac{1}{v^4}(D21)
\end{aligned}$$

Vergleichen wir die entsprechenden Grade, so bestätigt sich, daß gerade diejenigen Kompositionsfaktoren im primitiven Quotienten auftreten, die in beiden Hauptserien vom gleichen Grad vorkommen. Dasselbe erhalten wir durch Rechnung für die Linkszelle **L**, wenn wir das Element  $H_{bcb}H_{bcb}$ , das zur Hauptserie  $\mathcal{P}_{abacba}$  gehört, auswählen.

Schaut man sich aber beispielsweise den Fall **F** an, so erhält man zu  $\mathcal{P}_{babcbab} = \mathcal{P}_{w_o ac}$  als

zugehöriges Heckealgebrenelement

$$\begin{aligned}
H_{ac}H_{ca} &= v^5(D48) \\
&+ v^4(\mathbf{D45} + D47 + D46) \\
&+ v^3(D43 + D44 + D42 + D41 + 2\mathbf{D40}) \\
&+ v^2(D36 + D47 + D37 + D34 + D39 + D35 + D21 + D33 + D45 + \mathbf{D20} + \mathbf{D38}) \\
&+ v(2D31 + D25 + D30 + D29 + D14 + D10 + D27 + D26 + D41 \\
&\quad + D42 + D40 + D32 + 2D28 + D12 + \mathbf{D3}) \\
&+ (D23 + D22 + D39 + D20 + D18 + D36 + D17 + D34 \\
&\quad + D19 + D7 + D5 + D24 + D9 + D6 + D38 + \mathbf{D1}) \\
&+ \frac{1}{v}(D2 + D32 + D25 + D11 + D13 + D16 + D15 + D4) \\
&+ \frac{1}{v^2}(D8)
\end{aligned}$$

Somit sind die Kompositionsfaktoren vom gleichen Grad gerade

$$D45, D40, D38, D20, D3, D1.$$

Die Einfachen zu  $D38$  und  $D45$  sind somit zuviel. Allerdings treten auch diese beiden in höherer Multiplizität auf.

Für  $\mathbf{I}$  erhalten wir zu der Involution  $b$ , also der Hauptserie  $\mathcal{P}_{w_o b} = \mathcal{P}_{abacbab}$  durch Gradvergleich die Kompositionsfaktoren

$$D47, D42, D41, D40, D34, D36, D39, D31, D32, D28, D25, D40, D38, D8, D20, D4, D2, D1.$$

Wiederum sind die zusätzlichen welche mit höherer Multiplizität. Wählen wir jedoch die Involution  $bab$ , die zur Hauptserie  $\mathcal{P}_{w_o bab} = \mathcal{P}_{acbab}$  gehört, erhalten wir durch Gradvergleich genau die Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten.

Für  $\mathbf{N}$  berechnen wir schließlich zur Involution  $c$ , also zu  $\mathcal{P}_{ababcbab}$  via der Heckealgebra die Kompositionsfaktoren

$$\begin{aligned}
&D1, D3, D4, D6, D9, D10, D14, D20, D21, D25, D28, \\
&D31, D32, D34, D36, D38, D39, D40, D40, D41, D42, D47,
\end{aligned}$$

während für die Involution  $cbac$ , also für  $\mathcal{P}_{abab}$ , durch Gradvergleich wiederum genau die Kompositionsfaktoren des primitiven Quotienten gefunden werden. Man kann also beobachten, daß die Probleme nur bei höheren Multiplizitäten auftreten. Wir werden nun diese Beobachtung präzisieren.

## 7.4 Die graduierte Vierersequenz und eine untere Schranke

Wir sind nun in der Lage, ein Ergebnis zu formulieren (Hauptsatz 7.4.2), das im wesentlichen die von Joseph aufgestellte Vermutung beinhaltet. Allerdings ist das Resultat doch recht unbefriedigend, da eine unnatürliche Bijektion zwischen den Kompositionsfaktoren von  $\mathcal{P}_{w_o}$  und der entsprechenden Hauptserie vorgenommen werden muß. Der Grund liegt darin, daß man nicht stets eine ganze Zahl  $k$  finden kann, so daß ein einfacher Kompositionsfaktor  $L$ , der in  $\mathcal{P}_{w_o}$  (mit Vielfachheiten gezählt) genau in den Graden  $g_1, \dots, g_r$  vorkommt, dann in

der entsprechenden Hauptserie genau in den Graden  $g_1 + k, \dots, g_r + k$  auftritt.

Um den Hauptsatz zu beweisen, benötigen wir zuerst einmal folgendes Lemma bezüglich der in [Du, Proposition 1] definierten Abbildungen:

**Lemma 7.4.1.** *Sei  $x \in W$  und  $s$  eine einfache Spiegelung mit  $sx > x$ . Dann ist die kanonische Abbildung*

$$f_x^s : \mathcal{L}(\Delta(sx \cdot 0), \nabla(sx \cdot 0)) \longrightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(x \cdot 0))$$

*zwischen den durch unsere Konventionen gewählten Lifts der Hauptserien vom Grad Null.*

*Beweis:* Daß die Abbildung homogen ist, folgt direkt aus Hauptsatz 3.3.3, da es bis auf einen Skalar nur eine nichttriviale Abbildung zwischen den beiden Bimoduln gibt. Sie ist graderhaltend, da der Kompositionsfaktor  $L(0)$  (nach Satz 5.1.4) jeweils im Grad Null sitzt und im Bild der Abbildung enthalten ist.  $\diamond$

Um nun abschließend zu einem Resultat zu kommen, das die Kompositionsfaktoren von primitiven Idealen näher beschreibt, müssen wir noch etwas ausholen, um das Resultat verständlich formulieren zu können. Wir definieren dazu den Begriff „darstellende Sequenz“, der es ermöglicht, Multimengen miteinander zu vergleichen.

Sei  $M \in \text{gmof} - A$  graduiert. Sei  $y \in W$ . Als *darstellende Sequenz vom Typ  $y$  für  $M$*  bezeichnen wir eine (endliche) Folge ganzer Zahlen  $(a_i)_{1 \leq i \leq N}$ , so daß in der graduierten Grothendieckgruppe gilt

$$[M] = \sum_{i=1}^N [L(y \cdot 0)\langle a_i \rangle] + \sum_{z \neq y, j \in \mathbb{Z}} [M : L(z \cdot 0)\langle j \rangle][L(z \cdot 0)\langle j \rangle].$$

Offensichtlich ist nach dieser Definition  $N$  gerade die Multiplizität des entsprechenden einfachen Moduls in  $M$  nach dem Vergessen der Graduierung, genauer  $N = [\mathfrak{v}(M) : \mathfrak{v}(L(y \cdot 0))]$ . Sei nun  $M(x)$  die graduierte Form der Hauptserie  $\mathcal{L}(\Delta(w_o x \cdot 0), \nabla(w_o x \cdot 0)) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0)$  mit der Kombinatorik aus Satz 5.1.4, also so, daß der Kompositionsfaktor  $L(0)$  im Grad Null auftritt. Nun sind wir in der Lage, den abschließenden Hauptsatz zu formulieren:

**Hauptsatz 7.4.2. (untere Schranke für die Kompositionsfaktoren)**

1. *Sei  $x \in W$  und  $sx > x$ . Die graderhaltende Abbildung*

$$\mathcal{L}(\Delta(sx \cdot 0), \nabla(sx \cdot 0)) \longrightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(x \cdot 0)) \quad (7.2)$$

*zwischen den durch unsere Konvention gewählten Lifts der Hauptserien liefert eine exakte Sequenz graduierter Moduln*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(sx \cdot 0))\langle 1 \rangle &\longrightarrow \mathcal{L}(\Delta(sx \cdot 0), \nabla(sx \cdot 0)) \rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(x \cdot 0)) &\longrightarrow \mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(sx \cdot 0))\langle -1 \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. *Sei  $x \in W$ . Für alle  $y \in W$  existieren jeweils darstellende Sequenzen vom Typ  $y$  für  $M(x)$  und  $M(e)$ , sagen wir  $(a_i(x, x, y))_{1 \leq i \leq N}$  für  $M(x)$  und  $(a_i(x, e, y))_{1 \leq i \leq N}$  für  $M(e)$ , so daß*

$$[(\mathcal{U} / \text{Ann } L(w_o x \cdot 0)) \otimes_{\mathcal{U}} \Delta(0) : L(y \cdot 0)] = |\{i \mid a_i(x, x, y) = a_i(x, e, y)\}|.$$

*gilt.*

Insbesondere liefert das eine Identifizierung der einfachen Subquotienten, so daß für eine Dufloinvolutions  $x$  die Kompositionsfaktoren im primitiven Quotienten  $\mathcal{U}/I(x)$  gerade diejenigen sind, die in der zugehörigen Hauptserie und der dem dominanten Vermamodul entsprechenden Hauptserie im gleichen Grad auftreten.

- Beweis:*
1. Die Abbildung (7.2) ist nach dem vorangehenden Lemma vom Grad Null. Die Existenz einer solchen Vierersequenz für den nichtgraduierten Fall liefert [Jo6]. Andererseits wissen wir aber nach Hauptsatz 3.3.3 g, daß der Kern und der Kokern der mittleren Abbildung graduiert sind und deshalb bis auf einen Shift mit der auf den Hauptserien eingeführten Graduierung übereinstimmen. Man überprüft schnell durch Rechnung in der Heckealgebra, daß die gesuchten Shifts von der angegebenen Form sind.
  2. Da alle  $M(x)$  dieselben Kompositionsfaktoren haben, existieren für beliebiges  $y$  darstellende Sequenzen  $(a_i(x, x, y))_{1 \leq i \leq N}$  vom Typ  $y$  für  $M(x)$  und  $(a_i(x, e, y))_{1 \leq i \leq N}$  vom Typ  $y$  für  $M(e)$  derselben Länge. Mit der im ersten Teil des Hauptsatzes gezeigten Vierersequenz kann man nun die Sequenzen induktiv so wählen, daß die Behauptung folgt.

◇

**Bemerkung 7.4.3.**

Mit Hilfe der graduierten Vierersequenz folgt direkt, daß es zu  $x, z$  und  $y \in W$  mit  $x \leq z$  stets darstellende Sequenzen vom Typ  $y$  für  $M(x)$  bzw.  $M(z)$  gibt, sagen wir  $(a_i(x))_{1 \leq i \leq N}$  von  $M(x)$  und  $(a_i(z))_{1 \leq i \leq N}$  von  $M(z)$ , so daß  $a_i(x) \geq a_i(z)$  für  $1 \leq i \leq N$  gilt.

Wählen wir nun speziell  $x = e$  und  $z = w_o$ , so ist es möglich die darstellenden Sequenzen so zu wählen, daß  $0 \leq a_i(x) = -a_i(z)$  gilt.

## Verzeichnis der verwendeten Notationen

$\mathbb{N}$	die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen	
$\mathbb{N}^+$	die Menge der positiven ganzen Zahlen	
$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$	eine halbeinfache Liealgebra mit fester Borelschen und Cartanschen Unteralgebra	S. 6
$\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{U}(\mathfrak{b}) \dots$	die universell Einhüllende Algebren	S. 6
$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}$	Morphismen in $\mathfrak{g}$ -mod	
$\pi \subset R^+ \subset R$	die einfachen, positiven und alle Wurzeln	S. 7
$P(R)$	die ganzen Gewichte	S. 7
$\mathcal{O}$	die Bernstein-Gelfand-Gelfand-Kategorie $\mathcal{O}$	S. 7
$\mathcal{Z}$	das Zentrum der universell Einhüllenden von $\mathfrak{g}$	S. 7
$S$	die universell Einhüllende Algebra der Cartanschen	S. 7
$W$	die Weylgruppe	S. 7
$w_0$	das längste Element der Weylgruppe	S. 7
$w \cdot \lambda$	die „dot-Operation“ der Weylgruppe	S. 7
$\mathcal{O}_\chi$	ein Block bezüglich der Zerlegung des Zentrums	S. 7
$\mathcal{O}_\lambda$	ein Block bezüglich der Zerlegung des Zentrums	S. 7
$M(\lambda)$	der Vermamodul zum Gewicht $\lambda$	S. 7
$L(\mu)$	der einfache Kopf des Vermamoduls $M(\lambda)$	S. 7
$W_\lambda$	der Stabilisator von $\lambda$ bezüglich der „dot-Operation“	S. 7
$P$	der projektive Erzeuger des trivialen Blocks, in Kapitel 1 auch gewisse unzerlegbare Projektive	S. 8
$C$	die Koinvariantenalgebra	S. 8
$C^\lambda$	die Invarianten der Koinvarianten	S. 8
$C^s$	die unter der Spiegelung $s$ Invarianten der Koinvarianten	
$\mathbb{V}$	der Kombinatorikfunctor für $\mathcal{O}$	S. 8
$\theta_s$	Verschiebung durch die Wand	S. 9
$\mathbb{V}P(x \cdot \lambda)$	meist die durch Konvention 4.3.6 festgelegte graduierte Form von $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(w_0 \cdot \lambda), P(x \cdot \lambda))$	
$\kappa$		S. 13
$\text{soc}$	der Sockel eines Moduls	
$M^I$	die Invarianten unter $I$ von $M$	S. 14
$\star$	die Dualität auf $\mathcal{O}$ oder auf der Kategorie der Harish-Chandra-Bimoduln	S. 14
$\nabla(\lambda)$	der duale Vermamodul, ab Kapitel 5 auch der gewählte Lift	S. 14
$\mathcal{H}$	die Kategorie der Harish-Chandra-Bimoduln	S. 19
$\mathfrak{k}$		S. 19
$I$	ein Ideal von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , meist das auf S. 19 definierte	
$\mathcal{H}^I$	Harish-Chandra-Bimoduln, die von rechts von $I$ annihiliert werden	S. 19
$E^l, E^r$	$\mathfrak{g}$ -Moduln als Bimoduln mit trivialer Rechts- bzw. Linksoperation	S. 19

$X^{adf}$	die ad- $\mathfrak{g}$ -endlichen Vektoren von $X$	S. 19
$\mathcal{L}(M, N)$	die ad- $\mathfrak{g}$ -endlichen Vektoren von $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)$	S. 21
$\mathcal{O}_{\Lambda}^i$	ein Block der verdickten Kategorie $\mathcal{O}$	S. 22
$M^i(\lambda)$	der verdickte Vermamodul	S. 22
Ann	der Annihilator eines Moduls	
$T$	die Lokalisierung von $S$	S. 24
$M_T(\lambda)$	der deformierte Vermamodul	S. 24
$\mathcal{D}_{\Lambda}(T)$	die deformierte Kategorie $\mathcal{O}$	S. 24
$\text{pr}_{\lambda}$	die Projektion auf den Block zu dem entsprechenden zentralen Charakter	S. 26
$\zeta \mathcal{H}_{\chi}$	ein entsprechender Block von $\mathcal{H}$	S. 27
$\lambda \mathcal{H}_{\mu}$	ein entsprechender Block von $\mathcal{H}$	S. 27
$\text{pr}^{(\mu, \mu')}$		S. 27
$\theta_{(\lambda, \lambda')}^{(\mu, \mu')}$	der Verschiebungsfunktor	S. 27
$\lambda L_{\mu}$	ein einfacher mit maximaler Gelfand-Kirillov-Dimension	S. 28
$\lambda P_{\mu}^n, {}^n P_{\mu}$	die projektive Decken des Einfachen mit maximaler Gelfand-Kirillov-Dimension	S. 28
$\lambda \mathcal{H}_{\mu}^n, {}^n \mathcal{H}_{\mu}$	die „abgeschnittene“ Kategorie $\lambda \mathcal{H}_{\mu}$	S. 28
$\theta_s$	die Verschiebung von links durch die Wand	S. 28
$\theta_s^r$	die Verschiebung von rechts durch die Wand	S. 28
$S^{\lambda}$	die Invarianten der universell Einhüllenden Algebra der Cartanschen	S. 29
$\eta$	Vertauschung der Links- und Rechtsoperation	S. 29
GKdim	Gelfand-Kirillov-Dimension	S. 33
$\mathcal{P}_{(x, y)}$	die Hauptserie $\mathcal{L}(\Delta(x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$ oder auch der vereinbarte Lift	S. 38
$\mathbf{C}_x$	Josephs Vervollständigungsfunktor	S. 38
$\mathbf{D}_{\alpha}^{-} M$		S. 39
$\mathbf{D}_{\alpha}^{+}$		S. 39
$\Delta^x(y)$	getwisteter Vermamodul $\mathcal{L}((x \cdot 0), \nabla(y \cdot 0))$	S. 47
$T^x(y)$	getwisteter Kippmodul	S. 48
$\mathcal{H}_0^1$	Harish-Chandra-Bimoduln mit trivialem zentralen Charakter von rechts	
$\Delta(x \cdot \lambda)$	Vermamodul zum höchsten Gewicht $x \cdot \lambda$ und auch der gewählte Lift	S. 51
H	die Heckealgebra	S. 53
$\langle m \rangle$	der Shiftfunktors	S. 53
hom	die Morphismen vom Grad Null	S. 53
A	wenn nicht anders gesagt, der Endomorphismenring des projektiven Erzeugers	S. 56
$\otimes$	die graduierte Dualität	S. 67
$[\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}]$	die graduierte Grothendieckgruppe	S. 68
—	die Kazhdan-Lusztig-Dualität in der Heckealgebra	S. 71
rad	das Radikal	

$I(x)$	der Annihilator von $L(x \cdot 0)$	S. 98
$D_x$	das dem einfachen Modul $L(x \cdot 0)$ entsprechende Element der Heckealgebra	S. 100

# LITERATURVERZEICHNIS

---

- [An] H. ANDERSEN: An inversion formula for the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups, *Adv. in Math.* **60** (1986), 125-153
- [AJS] H. ANDERSEN, J. JANTZEN, W. SOERGEL: Representations of quantum groups at a  $p$ -th root of unity and of semisimple groups in characteristic  $p$ , *Astrisque* **220**, 1994.
- [AL] H. ANDERSEN, N. LAURITZEN: Twisted Verma modules, arXiv.org Mathematics e-Print archive, math.QA/0105012.
- [Ar] S. ARKHIPOV: A new construction of the semi-infinite BGG-resolution, arXiv.org Mathematics e-Print archive, q-alg/9605043.
- [Ba] H. BASS: *Algebraic K-theory*, Benjamin 1968.
- [Bc] E. BACKELIN: Filtration of projektive objects in category  $\mathcal{O}$ , *Represent. Theory* **5** (2001), 267-283 .
- [BB1] A. BEILINSON, J. N. BERNSTEIN: Localisation de  $\mathfrak{g}$ -Modules, *C.R. Acad. Sci. Paris* **292** (1981), 15-18.
- [BB2] A. BEILINSON, J. N. BERNSTEIN: A proof of Jantzen conjectures, *Adv. Soviet Math.* **16** (1993), 1-50.
- [Be] I. BERNSTEIN: Trace in categories, In: A. Connes et al., eds: *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras and Invariant Theory*, *Progr. Math.* **92** (1990), 417-423.
- [BG] I. BERNSTEIN, S. I. GELFAND: Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras, *Compositio math.* **41** (1980), 245-285.
- [BGG] I. N. BERNSTEIN, I. M. GELFAND, S. I. GELFAND: A category of  $\mathfrak{g}$ -modules, *Funct. Anal. and Appl.* **10** (1976), 87-92.
- [BGi] A. BEILINSON, V. GINZBURG: Wall-crossing functors and  $\mathcal{D}$ -Modules, *Represent. Theory* **3** (1999), 1-31.

- [BGS] A. BEILINSON, V. GINZBURG, W. SOERGEL: Koszul Duality Patterns in Representation Theory, *JAMS* **9** (1996), 473-527.
- [Bo1] N. BOURBAKI: Commutative Algebra, Springer 1989.
- [Bo2] N. BOURBAKI: Algebra I, Springer 1989.
- [Bo3] N. BOURBAKI: Groupes et algèbre de Lie, Masson 1994.
- [C] L. CASIAN: Weight Filtrations for Induced Representations of Real Reductive Lie Groups, *Adv. Math.* **73** (1989), 79-144.
- [CPS] E. CLINE, B. PARSHALL, L. SCOTT: Finite dimensional algebras and highest weight categories, *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), 85-99.
- [CR] C. CURTIS, I. REINER: Methods of Representation Theory I, Wiley 1981.
- [Di] J. DIXMIER: Enveloping Algebras, Graduate Studies in Mathematics **11**, AMS 1996.
- [Du] M. DUFLO: Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, *Ann. Math.* **105** (1977), 107-120.
- [E] T. ENRIGHT: On the fundamental series of a real semisimple Lie algebra: their irreducibility, resolutions and multiplicity formula, *Ann. Math.* **110** (1979), 1-82.
- [GL] H. GARLAND, J. LEPOWSKY: Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas, *Invent. Math.* **34** (1976), 37-76.
- [Ir] S. IRVING: The socle filtration of a Verma module, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **21** (1988), 47-65.
- [Ja1] J.C. JANTZEN: Moduln mit einem höchsten Gewicht, Springer 1979.
- [Ja2] J.C. JANTZEN: Einhüllende Algebren halbeinfacher Liealgebren, Springer 1983.
- [Ja3] J.C. JANTZEN: Representations of algebraic groups, Pure and Applied Mathematics, **131**. Academic Press 1987.
- [Jau] O. JAUCH: Endomorphismenringe projektiver Objekte in der parabolischen Kategorie  $\mathcal{O}$ , Diplomarbeit, Universität Freiburg 1999.
- [Jo1] A. JOSEPH: Gelfand-Kirillov dimension for the annihilators of simple quotients of Verma modules, *J. Algebra* **18** (1978), 50-60.
- [Jo2] A. JOSEPH: Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra. I, *J. Algebra* **65** (1980), 269-283.
- [Jo3] A. JOSEPH: Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra. III, *J. Algebra* **73** (1981), no. 2, 295-326.
- [Jo4] A. JOSEPH: The Enright Functor on the Bernstein-Gelfand-Gelfand Category  $\mathcal{O}$ , *Invent. Math.* **67** (1982), 423-445.

- [Jo5] A. JOSEPH: Completion Functors in the  $\mathcal{O}$  Category, In: Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Springer Lecture Notes **1020** (1983), 80-106.
- [Jo6] A. JOSEPH: Problems old and new, In: J.-L. BRYLINSKI: In honor of Bertram Kostant, Birkhäuser (1994), 385-414.
- [KK] M. KLUCZNIK, S. KÖNIG: Characteristic Tilting Modules over Quasi-hereditary Algebras, preprint.
- [KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG: Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras, Inventiones **53** (1979), 191-213.
- [Ko] B. KOSTANT: Lie Group Representations on Polynomial Rings, Amer. J. Math. **85** (1963), 327-404.
- [La] S. LANG: Algebra, Addison-Wesley 1997.
- [Lu] G. LUSZTIG: Characters of reductive groups over a finite field, Annals of Mathematics Studies, **107** (1984).
- [MP] R. MOODY, A. PIANZOLA: Lie Algebras With Triangular Decomposition, Wiley Interscience 1995.
- [MS] D. MILICIC, W. SOERGEL: Twisted Harish-Chandra sheaves and Whittaker modules: The non-degenerate case, preprint.
- [So1] W. SOERGEL: Équivalences de certaines catégories de  $\mathfrak{g}$ -modules, C. R. Acad. Sc. Paris, **303** (1986), 725-728.
- [So2] W. SOERGEL: Kategorie  $\mathcal{O}$ , perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 421-445.
- [So3] W. SOERGEL: The combinatorics of Harish-Chandra bimodules, Journal Reine Angew. Math. **429** (1992), 49-74
- [So4] W. SOERGEL: Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatoric for tilting modules, Represent. Theory **1** (1997), 83-114.
- [So5] W. SOERGEL: Charakterformeln für Kipp-Moduln über Kac-Moody-Algebren, Represent. Theory **1** (1997), 115-132.
- [So6] W. SOERGEL: Über die Beziehung von Schnittkohomologie und Darstellungstheorie in endlicher Charakteristik, preprint.  
engl. Version in Journal of Pure and Applied Algebra **152** (2000), 311-335.
- [So7] W. SOERGEL: Character formulas for tilting modules over quantum groups at a root of one, preprint.
- [St] C. STROPPEL: Quivers of Category  $\mathcal{O}$ , FDLIST (2000)
- [Va] V. S. VARADARAJAN: An Introduction to Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Cambridge studies in adv. math. **16**, Cambridge University Press 1989.