DIPLOMARBEIT

Die Beschreibung von primitiven Idealen durch Hyperebenen und Gitterpunkte

Angefertigt am
Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

August 2011

Von

Joanna Meinel

Aus

Bonn-Duisdorf

- Meinem kleinen grünen Kaktus -

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Das grobe Bild

Besonders große Freude hat man an einer Algebra A, wenn man alle einfachen Moduln darüber klassifizieren kann. Doch leider verwehren einem viele Algebren diesen Wunsch. Man kann dann versuchen, wenigstens die Annihilatoren der unbekannten einfachen Moduln zu klassifizieren. Das sind Ideale in A, die auch kurz 'primitive Ideale' heißen. Motivierend dafür ist einerseits, dass für kommutative Algebren A diese primitiven Ideale genauso wertvoll wie die einfachen Moduln selbst sind, da man einen einfachen Modul als Quotient von A nach seinem Annihilator zurückbekommt. Im nichtkommutativen Fall gibt es keine entsprechende Aussage. Jedoch offenbart das Studium des Falls von $A = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, der universell einhüllenden Algebra einer komplexen halbeinfachen Liealgebra, viele interessante Resultate über die primitiven Ideale selbst. Insbesondere reicht es zur Beschreibung *aller* primitiven Ideale in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ nach dem Satz von Duflo aus, die primitiven Ideale zu der Unterkategorie $\mathcal{O} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-mod zu untersuchen, da gilt:

$$\left\{\begin{matrix}\text{primitive Ideale}\\ \text{in } \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Annihilatoren}\\ \text{von } L(\lambda) \in \mathcal{O}\end{matrix}\right\}.$$

Dieses Theorem und viele weitere klassische Resultate finden sich in [Jan83] und illustrieren, wie reichhaltig die Beschreibung der primitiven Ideale sein kann (während es gerade für $A = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ nahezu unmöglich ist, nach Klassifikationen aller einfachen Moduln zu suchen, siehe dazu die erfolgreiche Klassifikation im Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ in [Blo81]).
Abgesehen von der Frage nach der Klassifikation gibt es aber auch viele weitere interessante Fragen rund um primitive Ideale: Kann man Aussagen über die entsprechenden Quotienten der Algebra A nach ihren primitiven Idealen, die sogenannten primitiven Quotienten, treffen? Kann man beispielsweise irgendwelche Dimensionen ausrechnen? Wann ist ein primitives Ideal im anderen enthalten? Wie beschreibt man, welche verschiedenen einfachen Moduln denselben Annihilator haben?
Besonders intensiv wurden diese Fragen für die universell einhüllenden Algebren $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ von Joseph in [Jos80a], [Jos81] und [Jos80b] untersucht. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Berechnung des Goldierangs primitiver Quotienten. Der Goldierang $\mathrm{Grk}_R(R)$ eines Rings R besitzt mehrere Beschreibungen, man erhält ihn beispielsweise als Länge des klassischen Quotientenrings $Q(R)$ über sich selbst,

$$\mathrm{Grk}_R(R) = \mathrm{length}_{Q(R)} Q(R)$$

(Details hierzu werden in Kapitel 7.4 gegeben). Im Fall von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ sorgt dann ein Resultat von [Jos80b, Theorem 10.3] bzw. [Pre10, Theorem B] und [Bru10, Theorem 1.1] für eine schöne Brücke zwischen den einfachen Moduln $L(\lambda)$ einerseits und den zugehörigen primitiven Quotienten $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}(L(\lambda))$ andererseits: Vorausgesetzt, der einfache Modul ist endlichdimensional, so gilt

$$\dim(L(\lambda)) = \mathrm{Grk}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}(L(\lambda)).$$

Der Goldierang des primitiven Quotienten ist also genau die Dimension des einfachen Moduls! Generell versucht man, den Goldierang von primitiven Quotienten mit Hilfe von Polynomen zu beschreiben. Dies ist ein sehr hartnäckiges Problem - es lässt sich meistens nur in Spezialfällen oder bis auf skalare Vielfache lösen, siehe dazu wieder [Jos80a]. Unter Verwendung von W-Algebren, einer Familie von Algebren, die von universell einhüllenden Algebren $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ bis zu kommutativen Algebren (nämlich dem Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$) reicht (siehe [Los10]), erzielen [Pre10] und [Bru10] genauere Resultate. Insbesondere für Typ A sind konkrete Polynome bekannt (siehe [Bru10, Theorem 1.6]).
Eine Beschreibung der primitiven Ideale wie im Satz von Duflo sowie die Angabe von Goldierangpolynomen ist auch für andere Algebren erstrebenswert.

In dieser Arbeit nun wird eine Algebra A betrachtet, die das klassische Setting von einhüllenden Algebren halbeinfacher Liealgebren (teils) imitiert. Auch hier gibt es eine Art 'Cartan-Unteralgebra' $\mathfrak{t}$, die per adjungierter Operation auf A wirkt, sodass A diesbezüglich in Gewichtsräume zerfällt. Allerdings muss A nicht wirklich die Einhüllende einer bestimmten Liealgebra sein. Im Gegenteil: Es wird eine Extra-Forderung an die Gewichtsräume von A gestellt, die im klassischen Setting so gar nicht gilt: Sie müssen über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ von nur einem Element erzeugt sein. Das klingt zuerst vielleicht nach unnatürlichen Bedingungen, doch solche Algebren treten in Form von verallgemeinerten Weylalgebren $\mathcal{A}$, das heißt polynomiale Differentialoperatoren auf $k^r \times (k^*)^s$, sowie gewissen Unteralgebren von Invarianten und deren zentralen Quotienten in der freien Wildbahn auf. So sind es diese verallgemeinerten Weylalgebren

$$\mathcal{A} = [x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, \partial_1, \dots, \partial_n]$$

mit der üblichen Relation $[x_i, \partial_i] = -1$, mit denen wir uns besonders intensiv auseinandersetzen werden.
Solche Algebren werden von Musson und van den Bergh in [MVdB98] besprochen. Dieser Artikel ist Grundlage dieser Arbeit, die dort durchgeführten Untersuchungen werden hier nachvollzogen und im Detail ausgeführt. Zusätzlich wird der Leser mit einigen Hintergrundinformationen versorgt. Dies umfasst insbesondere Kapitel 2 bis 5, wo die notwendigen allgemeinen Grundlagen gelegt werden, bis hin zu einer ausgiebigen Diskussion der verallgemeinerten Weylalgebren, wo auch konkrete Beispiele gerechnet werden. Weil sich für die Weylalgebren herrliche Klassifikationsmöglichkeiten der primitiven Ideale mit Mitteln der Geometrie von Polyedern und Gittern ergeben, folgt mit Kapitel 6 ein Abstecher in die Welt der Polyedergeometrie, dessen Früchte zum Schluss in Kapitel 7 geerntet werden: Einerseits referiert diese Arbeit die wunderschönen Resultate von [MVdB98], und andererseits nutzen wir den Zusammenhang zwischen den primitiven Idealen und ihren Beschreibungen durch Gitterpunkte in Polytopen anschließend dazu aus, den Goldierang primitiver Quotienten unter bestimmten Voraussetzungen (die an Ort und Stelle näher erläutert werden) mittels Ehrhartpolynomen zu bestimmen. Diese Methode liefert Goldierangpolynome, die vollständig bestimmt sind, inklusive aller Skalare.

1.2 Überblick über die wesentlichen Inhalte und Quellen dieser Arbeit

Wie schon vorweggenommen wurde: Diese Arbeit orientiert sich vor allem an dem Artikel von Musson und van den Bergh [MVdB98]. Jedoch gibt es verschiedene Exkurse und Einschübe von Grundlagen, die dann jeweils ihre eigene Literatur erfordern, beispielsweise über (semi)prime Ringe [Lam91], [Lam99], die Weylalgebra [Cou95] oder Polytope und das Ehrhartpolynom [Zie95], [BR07] - um nur einmal die groben Themenfelder aufzulisten.
Quer durch die Arbeit ziehen sich zudem Anmerkungen über die universell einhüllende Algebra einer komplexen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ - immer dann, wenn es sich lohnt, einen Vergleich zum klassischen Setting anzustellen. Dazu wird meist auf [Jan83] oder aber Josephs Originalarbeiten [Jos80a], [Jos80b] verwiesen. Diese Anmerkungen setzen Standardnotationen und einige Fakten über die BGG-Kategorie $\mathcal{O}$ voraus. Sie sind meistens zur Illustration und Motivation gedacht, können aber auch einfach übergangen werden, da die restliche Arbeit nicht auf ihnen aufbaut. Insbesondere wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, es werden aber entsprechende Verweise auf [Hum08] und [Jan83] geliefert, wo sich die Details finden lassen.
Hier sei noch rasch ein Überblick über die einzelnen Kapitel dieser Arbeit gegeben:

- Kapitel 2: Grundlegende Definitionen und Aussagen.

  In diesem Kapitel wird zunächst einmal geklärt, welche Moduln wir über welcher Algebra studieren. Um die Situation einer universell einhüllenden Algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit Cartanunteralgebra $\mathfrak{h} \overset{\text{incl}}{\hookrightarrow} \mathfrak{g}$ zu imitieren, wird hier eine 'Konfiguration'

$(A, \mathfrak{t}, \phi)$ definiert, die die Rolle von $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}, \mathrm{incl})$ einnehmen soll. Wir kommen aber auch auf die Unterschiede zu sprechen, die zwischen A und $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ bestehen. Von nun an betrachten wir A-Moduln mit einer $\mathfrak{t}^*$-Graduierung. In diesem und im nächsten Kapitel wird alles daran gesetzt, die primitiven Ideale von A zu ermitteln. Dabei streben wir eine Vorgehensweise bei der Suche nach den primitiven Idealen an, die auf ein Analogon zum Satz von Duflo führt: Zuerst kommt die Einschränkung von der ganzen Modulkategorie A-grmod auf eine handliche Unterkategorie, für die man die primitiven Ideale klassifizieren kann. Im nächsten Kapitel kommt die Einsicht, dass man hiermit schon sämtliche primitiven Ideale in A beschrieben hat.

Man muss also die 'handliche Unterkategorie' definieren und untersuchen. Da sie Ähnlichkeiten zu Kategorie $\mathcal{O}$ aufweist, wird sie mit $\mathcal{O}^{(p)}$ bezeichnet. Wir verlieren in diesem Kapitel zum Schluss noch einige Worte über projektive und einfache Moduln und beginnen, uns für die Träger einfacher Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ zu interessieren (also die Menge der auftretenden Gewichte eines $\mathfrak{t}^*$-graduierten Moduls), denen wir uns im nächsten Kapitel ausführlicher widmen.

Alle wesentlichen Aussagen und Notationen entstammen dem besagten Artikel von Musson und van den Bergh [MVdB98].

- Kapitel 3: Die Beziehung zwischen dem Annihilator und dem Träger eines einfachen Moduls in $\mathcal{O}^{(p)}$.

  Nach einer generellen Einführung in das Thema Annihilatoren und primitive Ideale fangen wir an, den Annihilator eines einfachen Moduls mit seinem Träger in Verbindung zu bringen. Die Träger der einfachen Moduln parzellieren $\mathfrak{t}^*$ in 'Regionen' $\langle\alpha\rangle$, und man erhält schließlich mit [MVdB98, Theorem 3.2.4] die Beschreibung der primitiven Ideale in der Algebra A mittels *abgeschlossener* Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}$.

  Auch in diesem Kapitel werden die Resultate aus [MVdB98] ausgeführt, die Exkurse orientieren sich an [Lam99].

- Kapitel 4: Technische Werkzeuge zur Abwandlung von A.

  Um die Algebra A und ihre zugehörige Konfiguration variieren zu können, folgt ein Einschub über die Konfigurationen von Tensorprodukten, Quotienten und Unteralgebren. Insbesondere wird mit der Algebra B^χ eine Kombination aus Abwandlungen von A eingeführt: Man berachtet die Invarianten unter der Wirkung eines Unterraums $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ und geht anschließend zu einem zentralen Quotienten über.

- Kapitel 5: Die verallgemeinerte Weylalgebra.

  Von diesem Kapitel an wird (fast) nur noch die Rede von der verallgemeinerten Weylalgebra $\mathcal{A}$ und ihrer Abwandlung B^χ sein. Es werden zuerst viele Aussagen über die gewöhnliche Weylalgebra auf $\mathcal{A}$ übertragen, insbesondere muss geklärt werden, wer die Rolle von $\mathfrak{t}$ spielen wird und wie diesbezüglich die Gewichtsraumzerlegung von $\mathcal{A}$ aussieht. Nach langen Rechnungen werden die Mühen mit einer schönen Beschreibung des Trägers der Weylalgebra in Form eines $\mathbb{Z}$-Gitters belohnt. Dies ermöglicht auch konkrete Formeln für die Träger der einfachen Moduln über der Weylalgebra, sodass wir ausführlich einige Beispiele durchrechnen können, die die Resultate von [MVdB98] illustrieren (im wahrsten Sinne des Wortes). Auch zur Algebra B^χ für die verallgemeinerte Weylalgebra gibt es ein langes bebildertes Beispiel.

- Kapitel 6: Geometrische Beschreibung der abgeschlossenen Regionen für B^χ (hervorgegangen aus der Weylalgebra).

  Die Bilder aus dem letzten Kapitel motivieren, warum man sich nun mit der Geometrie konvexer Polyederkegel, Polytopen und Gittern beschäftigen sollte, und das geschieht in diesem Kapitel. Damit erhalten wir eine geeignete Sprache zur Beschreibung von $\langle\alpha\rangle$. Um an $\overline{\langle\alpha\rangle}$ zu kommen, werden allgemeine Resultate über Zariskiabschlüsse von Gitterpunktkonfigurationen referiert, und schließlich gewinnt man eine übersichtliche Parametrisierung der abgeschlossenen Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}$.

Für die Grundlagen über Polyederkegel werden [Ful93] und [Oda88] verwendet, die Anwendung auf $\langle\alpha\rangle$ hält sich wieder an [MVdB98], wobei die Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}$ etwas vereinfacht wurde.

- Kapitel 7: Die Struktur der primitiven Ideale der Algebra B^χ (hervorgegangen aus der Weylalgebra).

  Im letzten Kapitel erfolgt zuerst eine Zusammenfassung der gewonnenen Resultate über die primitiven Ideale der Algebra B^χ, einem zentralen Quotienten von Invarianten der verallgemeinerten Weylalgebra. Anschließend wollen wir uns um primitive Quotienten von B^χ kümmern: Auch diese lassen sich dank der Resultate des Geometrie-Kapitels sehr handlich beschreiben. Insbesondere geben [MVdB98] deren Goldierang durch Zählung der Zusammenhangskomponenten der korrespondierenden abgeschlossenen Region an.

  Es bietet sich an dieser Stelle ein Exkurs zum Thema Goldierang und Goldieringe an. Wir stützen uns dabei auf [Lam99], [Jan83] sowie [Dix96] und diskutieren verschiedene Definitionen des Goldierangs eines primen noetherschen Rings.

  Wie schon im ersten Abschnitt dieser Einleitung erläutert, ist man daran interessiert, den Goldierang vermöge Goldierangpolynomen anzugeben. Mit diesem Ziel übersetzen wir - unter geeigneten Voraussetzungen an $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ - die Zählung der Zusammenhangskomponenten einer abgeschlossenen Region in die Zählung von Gitterpunkten in einem geeigneten Polytop. Dazu werden unter Ausnutzung der Gitterpolytope des letzten Kapitels Ehrhartpolynome verwendet (es gibt zu diesem Thema wieder einen Exkurs, er benutzt [Zie95] und [BR07]).

  Diese Arbeit beschreibt damit konkrete Goldierangpolynome für die primitiven Quotienten von Familien von Algebren der Form B^χ.

1.3 Das Hauptresultat

Wir betrachten eine verallgemeinerte Weylalgebrakonfiguration $(\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \phi)$ im Sinne von [MVdB98], siehe Kapitel 2.1. Bezüglich einer Unterliealgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ und eines 'zentralen Charakters' $\chi \in \mathfrak{g}^*$ gehen wir zum zentralen Quotienten

$$B^\chi = \mathcal{A}^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^\mathfrak{g}$$

über. Dann studieren wir einfache Moduln $L(\alpha)$ zum Gewicht $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ sowie ihre Annihilatoren $J(\alpha) = \mathrm{Ann}(L(\alpha))$ in B^χ und betrachten den Goldierang der primitiven Quotienten $B^\chi/J(\alpha)$. Wir untersuchen, wie sich der Goldierang von $B^\chi/J(\alpha)$ verhält, wenn man $\chi \in \mathfrak{g}^*$ und das Gewicht $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ um einen integralen Faktor $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ variiert.
Das Hauptresultat hierbei ist, dass sich der Goldierang einer solchen Familie von primitiven Quotienten *quasipolynomial* in dem Skalierungsfaktor x verändert, sich also durch endlich viele Polynome in x angeben lässt. Wir beschreiben dieses Verhalten konkret mit Ehrhart-Quasipolynomen. Hierzu müssen Rationalitätsbedingungen und Zerlegungsbedingungen an $\mathfrak{g}^*$ unterstellt werden.

Satz 1.3.1. Sei $(\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \phi)$ eine verallgemeinerte Weylalgebrakonfiguration. Wähle eine Unterliealgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ mit Rationalitätsbedingungen und Zerlegungsbedingungen (**Ann1**) bis (**Ann3**). Betrachte die Familie primitiver Quotienten $B^{x\chi}/J(x\alpha)$ des zentralen Quotienten $B^{x\chi} = \mathcal{A}^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g} - x\chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^\mathfrak{g}$ abhängig von $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Hierbei ist $J(x\alpha)$ der Annihilator des einfachen Moduls $L(x\alpha)$ zum Gewicht $x\alpha$.

Dann ist der Goldierang der primitiven Quotienten ein Quasipolynom in x gegeben durch das Ehrhart-Quasipolynom EHP_Q bezüglich eines geeigneten rationalen Polytopes Q

$$\mathrm{Grk}_{B^{x\chi}/J(x\alpha)}(B^{x\chi}/J(x\alpha)) \;=\; \mathrm{EHP}_Q(l(x)),$$

wobei der Streckfaktor $l(x)$ durch integrale lineare Umskalierung aus x hervorgeht: Die Umskalierung wird durch $l(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ vorgenommen.

Die Details zu den Annahmen an $\mathfrak{g}$ und zu dem geeigneten rationalen Polytop Q finden sich in den Kapiteln 7.7 und 7.8.

1.4 Dank

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Catharina Stroppel von Herzen für die Betreuung dieser Arbeit bedanken! Danke für unermüdliche hilfreiche Diskussionen, weiterführende Anmerkungen, viele bereichernde Ausblicke und ganz generell für die großartige Unterstützung in allen Phasen der Arbeit!

2 Grundlegende Definitionen und Aussagen

2.1 Konfigurationen $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ als Analogon zu $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}, \mathrm{incl})$ für universell einhüllende Algebren

Sei A eine k-Algebra mit 1, der Grundkörper k soll algebraisch abgeschlossen sein und Charakteristik 0 haben. Wir möchten graduierte A-Moduln betrachten. Zunächst wird die Graduierung von A erklärt, welche man in Form einer Gewichtsraumzerlegung von A erhält.

Definition 2.1.1. Man fixiert einen endlichdimensionalen k-Vektorraum $\mathfrak{t}$. Definiere die symmetrische Algebra über $\mathfrak{t}$:

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) := \mathrm{T}(\mathfrak{t})/(\{x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in \mathfrak{t}\}),$$

wobei

$$\mathrm{T}(\mathfrak{t}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{t}^{\otimes n}$$

die Tensoralgebra über $\mathfrak{t}$ ist (mit $\mathfrak{t}^{\otimes 0} := k$).

Bemerkung 2.1.2 (Die Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Wird $\mathfrak{t}$ als abelsche Liealgebra aufgefasst, also $[t_1, t_2] := 0$ für alle $t_1, t_2 \in \mathfrak{t}$, so ist $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{t})$ die universell einhüllende Algebra der Liealgebra $\mathfrak{t}$.

Definition 2.1.3 (Die Wirkung von $\mathfrak{t}$ auf der Algebra A). Sei $\phi : \mathfrak{t} \to A$ eine k-lineare Abbildung, sodass ihr Bild in A aus paarweise kommutierenden Elementen besteht. Die k-lineare Abbildung ϕ lässt sich nun aufgrund der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra zu einem unitären k-Algebrenhomomorphismus $\mathrm{T}(\mathfrak{t}) \to A$ ausdehnen, dank der Kommutativität faktorisiert er über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \to A$. Bezeichne auch diesen ausgedehnten Homomorphismus mit ϕ. $\mathfrak{t}$ wirke nun auf A durch die adjungierte Wirkung

$$[t, a] \ := \ [\phi(t), a] \ = \ \phi(t) \cdot a - a \cdot \phi(t) \quad \text{für } t \in \mathfrak{t}, a \in A,$$

bezüglich derer folgende Annahmen gelten sollen:

A1: A ist ein halbeinfacher $\mathfrak{t}$-Modul bzgl. der adjungierten Wirkung $[t, a]$.

A2: Die Gewichtsräume von A bzgl. der adjungierten Wirkung $[t, a]$ werden über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ von einem einzigen Element bzgl. der Multiplikation in A erzeugt, die mit Hilfe von ϕ als $d \cdot a \ := \ \phi(d) \cdot a$ für $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ und $a \in A$ definiert ist.

Bemerkung 2.1.4 (Die Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Dank der Kommutativität des Bildes von ϕ ist ϕ ein Liealgebrenhomomorphismus: $\phi([t_1, t_2]) = 0 = (\phi(t_1)\phi(t_2) - \phi(t_2)\phi(t_1))$. Damit entspricht die Tatsache, dass man ϕ auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ zu einem Algebrenhomomorphismus fortsetzen kann, einfach nur der universellen Eigenschaft der universell einhüllenden Algebra $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ der Liealgebra $\mathfrak{t}$. Die oben erklärte Wirkung von $\mathfrak{t}$ auf A ist eine Liealgebren-Wirkung, die induzierte Wirkung von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ auf A die zugehörige Algebren-Wirkung.

Definition 2.1.5 (Die Konfiguration $(A, \mathfrak{t}, \phi)$). Sind A, $\mathfrak{t}$ und $\phi : \mathfrak{t} \to A$ wie oben, und sind (A1) und (A2) erfüllt, so bezeichnen wir das Tripel $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ als Konfiguration.

Bemerkung 2.1.6 (Die Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
So eine Konfiguration $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ soll an die Situation einer universell einhüllenden Algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit Cartanunteralgebra $\mathfrak{t}$ erinnern. Auf diese Weise wird ein Tripel aus $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}, \mathrm{incl})$ nachgestellt. In der Tat wird Eigenschaft (A1) von der universell Einhüllenden erfüllt. Jedoch erfüllt die universell Einhüllende $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ im Allgemeinen *nicht*

Eigenschaft (A2)! (ein jeder Gewichtsraum $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})_\lambda$ wird nach einer Variante des PBW-Theorems [Hum78, Korollar 17.3.C] über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h})$ frei erzeugt von all jenen Monomen in $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^+)$, die vom Gewicht λ sind - und das sind selbst im $\mathfrak{sl}_2$-Fall recht viele.) Die Algebren $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ und A sind also grundverschieden, auch wenn beide dieselbe Unteralgebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}) = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ haben.

Aus diesem Grund bezeichnen wir $\mathfrak{t}$ fortan gelegentlich als 'Cartan'.

Definition 2.1.7 (Graduierung). Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Diesbezüglich definiert man eine Graduierung auf folgenden Objekten (vergleiche beispielsweise [Kun97, Definitionen A.1 und A.6]):

- Ein Ring R ist durch G graduiert, wenn er als abelsche Gruppe in eine direkte Summe $R = \bigoplus_{\alpha \in G} R_\alpha$ zerfällt, sodass $R_\alpha R_\beta \subset R_{\alpha+\beta}$ gilt.
- Eine Algebra A ist durch G graduiert, wenn sie als Vektorraum in eine direkte Summe $A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha$ zerfällt, sodass $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ gilt.
- In diesem Fall ist ein A-Modul M durch G graduiert, wenn er als Vektorraum in eine direkte Summe $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ zerfällt, sodass $A_\alpha M_\beta \subset M_{\alpha+\beta}$ gilt.

Die Graduierung stellt in allen Fällen ein zusätzliches Datum dar.

Definition 2.1.8 (Homogene Untermoduln und homogene Ideale).

- Ein Untermodul $U \subset M$ eines graduierten Moduls M ist homogen, sofern für jedes Element $u = \sum_{\alpha \in G} u_\alpha$, $u_\alpha \in M_\alpha$, auch die homogenen Komponenten u_α alle in U enthalten sind. Äquivalenterweise wird U von homogenen Elementen in M erzeugt [Kun97, Definition A.7 und Lemma A.8].
- Ebenso definiert man homogene Ideale I eines graduierten Rings R: Für jedes Element $a \in I$ mit einer Zerlegung $a = \sum_{\alpha \in G} a_\alpha$ in R müssen alle homogenen Komponenten a_α schon in I enthalten sein.

Bemerkung 2.1.9. Aus den Eigenschaften (A1) und (A2) folgt sofort:

i) Die $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Wirkung durch Multiplikation $d_\bullet a = \phi(d) \cdot a$ wie in (A2) ist eine Linkswirkung auf A. Man könnte dieselbe Wirkung $\phi(d) \cdot a =: a_\bullet d$ aber auch als Rechtswirkung auffassen, weil das Bild von ϕ in sich kommutiert, $\phi(t_1)\phi(t_2) = \phi(t_1 t_2) = \phi(t_2 t_1) = \phi(t_2)\phi(t_1)$. Beachte jedoch, dass damit *nicht* gemeint ist, dass $\phi(d) \cdot a = a \cdot \phi(d)$ sein muss!

ii) Aus (A1) folgt die Existenz einer Gewichtsraumzerlegung

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} A_\alpha, \quad A_\alpha := \{a \in A \mid [t, a] = \alpha(t)a \text{ für alle } t \in \mathfrak{t}\},$$

durch die A zu einer $\mathfrak{t}^*$-graduierten k-Algebra wird:

A ist ein halbeinfacher $\mathfrak{t}$-Modul, also die direkte Summe einfacher Untermoduln. Auf einem solchen einfachen Untermodul U wirkt $\mathfrak{t}$ jedoch durch ein $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ (dies bedeutet $[t, a] = \alpha(t)a$ für alle $t \in \mathfrak{t}, a \in A$), was man folgendermaßen sehen kann: So ähnlich wie zuvor kann man auch hier die adjungierte Operation $\mathfrak{t} \to \mathrm{End}_k(U)$ zu einer Algebra-Wirkung $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{End}_k(U)$ ausdehnen (dies ist möglich, weil $\mathrm{ad}(t_1)\mathrm{ad}(t_2)(a) = \mathrm{ad}(t_2)\mathrm{ad}(t_1)(a)$ ist). Da U einfach ist, gilt $U \cong \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$. Wie in Abschnitt 2.3 nachzulesen ist, ist $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m} \cong k$, damit ist $\mathrm{End}_k(U) \cong k$, und die Algebra-Wirkung von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ auf U wird durch ein $\alpha \in \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}), k)$ beschrieben.

Schränkt man dies nun wieder auf die Wirkung von $\mathfrak{t}$ ein, so erhält man, dass $\mathfrak{t}$ durch $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{t}, k) = \mathfrak{t}^*$ wirkt. Alle einfachen Untermoduln von A, auf denen $\mathfrak{t}$ durch α wirkt, werden zu dem Gewichtsraum A_α zusammengefasst. Dies ergibt eine $\mathfrak{t}^*$-Graduierung auf A wegen $[t, ab] = [t, a]b + a[t, b] = (\alpha + \beta)(t)ab$ für $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ und $t \in \mathfrak{t}$.

iii) Jedes zweiseitige Ideal in A übernimmt diese Graduierung und ist dann selber graduiert, nämlich durch Schnitt $I \cap A_\alpha =: I_\alpha$. Warum dies funktioniert, wird in Lemma 2.4.13 genauer erklärt.

iv) $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ wird durch ϕ in den Gewichtsraum A_0 abgebildet, denn für $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ gilt:

$$[t, \phi(d)] \ := \ [\phi(t), \phi(d)] \ = \ \phi([t, d]) \ = \ \phi(0) \ = \ 0,$$

also ist $\phi(d) \in A_0$.

v) Bedingung (A2) impliziert, dass $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ surjektiv auf jeden Gewichtsraum A_α abbildet. Die Surjektion ist gegeben durch $d \mapsto \phi(d) \cdot a_\alpha$ für den Erzeuger $a_\alpha \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$. Anders gesagt gibt es in jedem Gewichtsraum ein Element a_α mit

$$A_\alpha = \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cdot a_\alpha.$$

vi) Man kann insbesondere die 1 in A als Erzeuger von A_0 wählen: In der Tat gilt $1 \in A_0$, und somit gibt es ein $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ mit

$$1 = \phi(d)a_0.$$

Andererseits ist a_0^2 wieder ein Element des Gewichtsraums A_0, und deswegen gibt es ein $d' \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, das

$$a_0^2 = \phi(d')a_0$$

erfüllt. Multipliziert man dies mit $\phi(d)$, so folgt

$$a_0 = \phi(d)a_0^2 = \phi(d)\phi(d')a_0 = \phi(d')\phi(d)a_0 = \phi(d') \cdot 1,$$

und daher kann man anstelle von a_0 auch die 1 als Erzeuger wählen.

Lemma 2.1.10. Äquivalent zu Eigenschaften (A1) und (A2) sind folgende Kurzschreibweisen:

A1': $A = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} A_\alpha$ bzgl. der adjungierten $\mathfrak{t}$-Linkswirkung.

A2': $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow A_\alpha$, das heißt also, die A_α sind zyklisch bezüglich der Multiplikations-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Linkswirkung.

Man beachte aber: Die Gewichtsräume A_α müssen selber nicht einfach bzgl. der adjungierten $\mathfrak{t}$-Linkswirkung sein, es kann sich um die Summe von mehreren einfachen Gewichtsräumen zum Gewicht α handeln, die da unter dem Namen A_α zusammengefasst werden.

Beweis. Die letzte Bemerkung hat bereits gezeigt, wie aus (A1) und (A2) die Eigenschaften (A1') und (A2') folgen. In der anderen Richtung gibt es gar nichts zu zeigen. ☺

2.2 Einführung der beteiligten Modulkategorien

Definition 2.2.1 (Moduln über A und $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$). Wir führen die Notation für einige Kategorien von (möglicherweise unendlichdimensionalen) Moduln über A und $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ ein:

- A-mod: Links-A-Moduln

- A-grmod: Links-A-Moduln mit $\mathfrak{t}^*$-Graduierung, sodass also für $m \in M_\alpha$, $a \in A_\beta$ gilt:
$$a_\bullet m \in M_{\alpha+\beta}.$$
Die Morphismen sollen (graderhaltende) Homomorphismen von $\mathfrak{t}^*$-graduierten A-Moduln sein.
- $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-mod: Links-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Moduln
- mod-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$: Rechts-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Moduln
- A-bimod-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$: $(A, \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$-Bimoduln

Bemerkung 2.2.2 (Moduln in A-(gr)mod zu Moduln in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-mod und mod-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ machen). Zwei spezielle Verfahren werden von Interesse sein. Zum einen kann jeder A-Modul mithilfe von $\phi : \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \to A$ zu einem $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modul gemacht werden:

$$\underbrace{t_\bullet m}_{\text{links-Sym}(\mathfrak{t})} := \underbrace{\phi(t)_\bullet m}_{\text{links-}A} \quad \text{für } t \in \mathfrak{t} \text{ und auf } \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \text{ fortsetzen.}$$

Weil $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ eine kommutative Algebra ist, kann man dies sowohl als Rechts- als auch als Linkswirkung auffassen:

$$\underbrace{m_\bullet d}_{\text{rechts-Sym}(\mathfrak{t})} \quad := \quad \underbrace{d_\bullet m}_{\text{links-Sym}(\mathfrak{t})}$$

Für $\mathfrak{t}^*$-graduierte A-Moduln hat man zusätzlich noch die Möglichkeit, via

$$t_\bullet m \ := \ (\phi(t) - \alpha(t))_\bullet m \quad \text{für } t \in \mathfrak{t},\ m \in M_\alpha$$

mit multiplikativer Fortsetzung auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ eine $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modulstruktur zu erklären. In der Tat wird damit die Wirkung einer Algebra definiert, denn nach der Definition der Wirkung auf Erzeugern erfüllt sie schön brav die einzige Relation in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, nämlich Kommutativität:

$$\begin{aligned}
(t'_\bullet(t_\bullet m)) &= t'_\bullet(\phi(t) - \alpha(t))m \\
&= (\phi(t') - \alpha(t'))(\phi(t) - \alpha(t))m \quad \text{weil } \phi(t) \in A_0 \text{ und so } (\phi(t) - \alpha(t))m \in M_\alpha \\
&= (\phi(t) - \alpha(t))(\phi(t') - \alpha(t'))m \\
&= (t_\bullet(t'_\bullet m)).
\end{aligned}$$

Auch hier bewirkt die Kommutativität in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, dass dies sowohl eine Rechts- als auch eine Linkswirkung ist.

Bemerkung 2.2.3 (Die Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Fassen wir $\mathfrak{t}$ wieder als abelsche Liealgebra auf, so kann man kürzer sagen: $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{End}_k(M)$ ist ein Morphismus von Algebren, da $\mathfrak{t} \to \mathrm{End}_k(M) : \ t \mapsto \phi(t) - \alpha(t)$ ein Morphismus von Liealgebren ist.

Proposition 2.2.4 (Moduln in A-grmod zu Moduln in A-bimod-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ machen).
Man hat einen Isomorphismus (volltreu auf Morphismen und bijektiv auf Objekten) von Kategorien

$$\begin{array}{ccc}
A\text{-grmod} & \longrightarrow & \left\{ M \in A\text{-bimod-Sym}(\mathfrak{t}) \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ halbeinfach bzgl. der} \\ \text{adjungierten Sym}(\mathfrak{t})\text{-Wirkung} \\ [t, m] := \phi(t)_\bullet m - m_\bullet t \end{array} \right\} \\
M = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} M_\alpha & \mapsto & M = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} M_\alpha \\
\text{(abstrakte Graduierung)} & & \text{(Gewichtsraumzerlegung),}
\end{array}$$

wobei die Zerlegung von $M \in A$-grmod auf der linken Seite der mitgelieferten abstrakten Graduierung entspricht. Auf der rechten Seite ist die volle Unterkategorie von A-bimod-Sym$(\mathfrak{t})$ gemeint, und M wird als darin enthalten aufgefasst, indem M unter der Abbildung seine alte A-Linksmodulstruktur behält, M zusätzlich mit einer Sym$(\mathfrak{t})$-Rechtsmodulstruktur der Form $m_\bullet d := (\phi(d) - \alpha(d))m$ für $m \in M_\alpha$ ausgestattet wird (wobei man das erst für $d \in \mathfrak{t}$ macht und anschließend multiplikativ fortsetzt), und die Zerlegung von $M \in A$-bimod-Sym$(\mathfrak{t})$ der Gewichtsraumzerlegung bzgl. der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$ entspricht,

$$[t, m] := \underbrace{\phi(t)_\bullet m}_{\text{links-}A} - \underbrace{m_\bullet t}_{\text{rechts-Sym}(\mathfrak{t})}.$$

Bemerkung 2.2.5. Zur Verschlankung der Notation verzichten wir darauf, das ϕ in der induzierten Sym$(\mathfrak{t})$-Wirkung permanent mitzuführen. Es taucht höchstens noch zur Verdeutlichung, wie die Wirkung denn nun gemeint ist, auf.

Beweis. Wohldefiniertheit auf Objekten von A-grmod: Sei $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} M_\alpha \in A$-grmod. Es gilt in der Tat $M \in A$-bimod-Sym$(\mathfrak{t})$:

- Die beiden Wirkungen kommutieren, d.h. M ist wirklich ein Bimodul:
  Seien $a \in A_\beta, m \in M_\alpha, t \in \mathfrak{t}$.

$$\begin{aligned}
a_\bullet (m_\bullet t) &= a_\bullet ((t - \alpha(t))_\bullet m) \\
&= a_\bullet (\phi(t)m - \alpha(t)m), \\
&\quad \text{nach Definition der Wirkung von } \mathfrak{t} \text{ auf } M \text{ mittels der von } A \text{ auf } M, \\
&= a\phi(t)_\bullet m - \alpha(t) \cdot a_\bullet m \\
&= -([\phi(t), a] - \phi(t)a)_\bullet m - \alpha(t) \cdot a_\bullet m \\
&= (-\beta(t) + \phi(t) - \alpha(t))_\bullet a_\bullet m, \\
&\quad \text{weil } \mathfrak{t} \text{ so auf } A \text{ wirkt: Gewichtsraumzerlegung ist dem angepasst,} \\
&= (t - (\alpha + \beta)(t))_\bullet a_\bullet m \\
&= (a_\bullet m)_\bullet t, \\
&\quad \text{weil } a_\bullet m \text{ im Gewichtsraum } M_{\alpha+\beta} \text{ lebt.}
\end{aligned}$$

- Es handelt sich bei der Zerlegung von $M \in A$-bimod-Sym$(\mathfrak{t})$ tatsächlich um eine Gewichtsraumzerlegung bzgl. der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$:

$$(1) \qquad [t, m] := \phi(t)_\bullet m - m_\bullet t = \phi(t)_\bullet m - (\phi(t) - \alpha(t))m = \alpha(t)m \text{ für } m \in M_\alpha$$

Ferner ist dies auch für Morphismen von A-grmod wohldefiniert:

- Sei $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-grmod}}(M, N)$, dann ist f auch ein A-bimod-Sym$(\mathfrak{t})$-Morphismus:
  $f(a_\bullet m) = a_\bullet f(m)$ ist ohnehin klar, da die A-Linksmodulstruktur auf beiden Seiten dieselbe ist. Ferner ist für $m \in M_\alpha$ und $t \in \mathfrak{t}$ richtig, dass $f(m_\bullet t) = f((\phi(t) - \alpha(t))m) = (\phi(t) - \alpha(t))(f(m)) = (f(m))_\bullet t$, weil im letzten Schritt ausgenutzt werden kann, dass sich $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-grmod}}(M, N)$ durch $f(M_\alpha) \subset N_\alpha$ auszeichnet. Fortgesetzt auf ganz Sym$(\mathfrak{t})$ ist damit auch $f(m_\bullet d) = f(m)_\bullet d$ erledigt. Damit ist f auch in $\mathrm{Hom}_{A\text{-bimod-Sym}(\mathfrak{t})}(M, N)$.

Damit wäre der Funktor in der Hinrichtung erklärt. Für die umgekehrte Richtung definiert man einen Funktor, indem man die Abbildung andersrum liest, zu zeigen ist, dass das ebenfalls Sinn macht:
Auf Objekten:

- Sei $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} M_\alpha \in A$-bimod-Sym$(\mathfrak{t})$ halbeinfach bzgl. der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung. Dies ist zugleich eine $\mathfrak{t}^*$-Graduierung: $A_\beta \bullet M_\alpha \subset M_{\alpha+\beta}$, denn

$$\begin{aligned}
[t, am] &= \phi(t)(am) - (am)t \\
&= ([\phi(t), a] + a\phi(t))m - a(mt) \\
&= (\beta(t)a + a\phi(t))m - a(mt) \\
&= \beta(t)am + a([t, m]) \\
&= \beta(t)am + a\alpha(t)m \\
&= (\alpha + \beta)(t)am.
\end{aligned}$$

Nun für die Morphismen:

- Aus $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-bimod-Sym}(\mathfrak{t})}(M, N)$ folgt $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-grmod}}(M, N)$, denn sei $m \in M_\alpha$, wegen $[t, f(m)] = \phi(t)\bullet f(m) - (f(m))\bullet t = f(\phi(t)\bullet m - m\bullet t) = f([t, m]) = f(\alpha(t)m) = \alpha(t)f(m)$ ist in der Tat $f(m) \in N_\alpha$.

Zuguterletzt ist klar, dass der Funktor und seine Umkehrung hintereinander ausgeführt die Identität auf beiden Kategorien ergibt: Das Einzige, was auf Objekten schiefgehen kann, wäre ein Shift in der Graduierung, denn ungraduiert wird unter Hin- und Rückrichtung offensichtlich nichts an dem Objekt M geändert. In (1) sieht man, dass bei der Hinrichtung aus M_α in der Tat ein Gewichtsraum zum Gewicht α gemacht wird. Bei der Rückrichtung geht alles glatt, weil die 'abstrakte Graduierung' von M gerade durch die 'natürliche Graduierung' der Gewichtsraumzerlegung erklärt wird. Die Morphismen werden von Hin- und Rückrichtung unverändert gelassen, sodass auch dort die Hintereinanderausführung die Identität ist. ☺

2.3 Maximale Ideale in der symmetrischen Algebra Sym$(\mathfrak{t})$

Bemerkung 2.3.1. Sym$(\mathfrak{t})$ ist als k-Algebra isomorph zum Polynomring in n Variablen, falls $\dim(\mathfrak{t}) = n$: Dazu muss man eine Basis $t_1, \ldots, t_n$ von $\mathfrak{t}$ wählen und t_i auf X_i schicken: Das gibt einen Homomorphismus von Algebren $\mathrm{T}(\mathfrak{t}) \to k[X_1, \ldots, X_n]$. Er ist wohldefiniert, weil $t_1, \ldots, t_n$ eine Basis war, surjektiv, und sein Kern von den Kommutatoren aufgespannt, faktorisiert also über einen Isomorphismus $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cong k[X_1, \ldots, X_n]$.

Wir werden also meistens Sym$(\mathfrak{t})$ als Polynomring interpretieren. Und wo ein Polynomring ist, da ist die klassische Algebraische Geometrie nicht weit:

2.3.1 Notationen und etwas algebraische Geometrie

Hier werden ein paar Definitionen aufgefrischt und Notationen festgelegt. Dieses Thema ist ansonsten gut dokumentiert, siehe beispielsweise [Eis95, Kapitel 1.6], [Har77], [Kun97] oder [Mat89, Kapitel 4]. Wir starten mit einem beliebigen kommutativen Ring R. Sei immer noch $k = \overline{k}$.

Definition 2.3.2. Es bezeichne Spec(R) hier stets die Menge der *maximalen* Ideale von R:

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{m} \subset R \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal } \}$$

Diese Notation ist zwar für gewöhnlich für die Menge der Primideale reserviert. Hier wird allerdings die Notation des zugrundeliegenden Artikels [MVdB98] übernommen. Es besteht hier keine Verwechselungsgefahr, da durchgehend nur von maximalen Idealen die Rede sein wird.

Definition 2.3.3.

- Sei $I \subset R$ ein Ideal. Definiere seine Nullstellenmenge $V(I) := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{m}\} \subset \mathrm{Spec}(R)$.
- Sei $V \subset \mathrm{Spec}(R)$ eine Teilmenge. Definiere ihr Verschwindungsideal $I(V) := \bigcap\limits_{\mathfrak{m} \in V} \mathfrak{m} \subset R$.

Wir erinnern uns an folgende Rechenregeln:

Bemerkung 2.3.4 (Eigenschaften von $V(-)$ und $I(-)$). Es gelten

i) $V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$ für Ideale I, J in R, wobei das Produkt von zwei Idealen aus denjenigen Elementen besteht, die die Form von Summen von Produkten von je einem Element des einen und des anderen Ideals haben.

ii) $V(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$ für beliebige Familien Λ von Idealen I_Λ in R.

sowie (falls R eine endlich erzeugte k-Algebra ist)

iii) $I(V(\mathfrak{I})) = \bigcap\limits_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{I}} \mathfrak{m} = \mathrm{rad}(\mathfrak{I})$, wobei das Radikal eines Ideals $\mathfrak{I} \subset R$ definiert ist als $\mathrm{rad}(\mathfrak{I}) := \sqrt{\mathfrak{I}} := \{r \in R \mid \exists n : \ r^n \in \mathfrak{I}\}$

iv) $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$

v) $I(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = I(V(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I(V_\lambda))) = \mathrm{rad}(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I(V_\lambda))$

(vergleiche [Kun97, Kapitel I.3, Kapitel III.1], angewendet auf die maximalen Ideale, sowie [Mat89, Theorem 5.5] unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir uns hier über einer endlich erzeugten k-Algebra bewegen).

Definition 2.3.5 (Zariski-Abschluss). Der Zariski-Abschluss einer Menge $M \subset \mathrm{Spec}(R)$ ist definiert als $\overline{M} = V(I(M))$ ([Har77, Kapitel 2]).

In $\overline{M}$ kommen zu M noch alle maximalen Ideale hinzu, die den Durchschnitt der Ideale von M enthalten, ihn also nicht verkleinern. Dies definiert dank obiger Rechenregeln wie üblich die Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ (vergleiche [Kun97, Kapitel III, Satz 1.2]).
Für gewöhnlich hätte man unser $\mathrm{Spec}(R)$ mit $\mathfrak{m}$-$\mathrm{Spec}(R)$ bezeichnet. Welchen Effekt hat es, dass man sich nur für die maximalen Ideale, nicht für die Primideale in R interessiert?
Für Polynomringe $k[X_1, \ldots, X_n]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt das nächste klassische Resultat, das mit dem Hilbertschen Nullstellensatz eng verwandt ist (siehe [Mat89, Theorem 5.3]):

Satz 2.3.6. Sei $k = \overline{k}$. Wenn $\mathfrak{m} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal ist, dann folgt $\mathfrak{m} = (X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n)$ für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$.

Dies impliziert eine Bijektion zwischen der Menge der maximalen Ideale und k^n. Diese Korrespondenz ermöglicht es, zwischen algebraischen und geometrischen Fragestellungen hin- und herzuhüpfen. Genau das wollen wir später ausnutzen!
Wie sieht eine solche Korrespondenz nun für $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$ aus, was man nach Bemerkung 2.3.1 ja auch als Polynomring auffassen kann? Natürlich erhält man auch hier *irgendeine* Bijektion der maximalen Ideale zu k^n, oder auch zu $\mathfrak{t}$, aber die schönste Bijektion von allen wird von $\mathfrak{t}^*$ erbracht. Hier kann man nämlich unabhängig von der Wahl einer Basis arbeiten, wie es noch in Bemerkung 2.3.1 nötig war.
Um zu illustrieren, wie die Korrespondenz hier konkret aussieht, wird ein eigener Beweis gegeben, natürlich kann man die Aussage aber auch als Korollar von Satz 2.3.6 sehen.

Proposition 2.3.7. $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cong \mathfrak{t}^*$ als Bijektion von Mengen.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung von $\mathfrak{t}^*$ nach $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$: Sei $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ eine k-lineare Abbildung $\mathfrak{t} \to k$. Fasse α nun als (unitären) Algebrenhomomorphismus auf: Setze α multiplikativ auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ fort (wobei $k \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ identisch auf k abgebildet wird). Diese multiplikative Fortsetzung auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ einerseits und Einschränkung eines Algebrenhomomorphismus auf $\mathfrak{t}$ andererseits ermöglichen die Identifikation von $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}), k)$ mit $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{t}, k) = \mathfrak{t}^*$. Einem jeden $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ kann man nun seinen Kern als Element von $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}), k)$ zuordnen. So ein Kern ist ein Ideal in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, und zwar ein echtes:
$\alpha(1) \neq 0$ für alle fortgesetzten α (selbst für $\alpha = 0$, da immer $1 \mapsto 1!$), also ist $\ker(\alpha) \subsetneq \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ nie die gesamte Algebra $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$. Das Bild ist immer ganz k, und wegen $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\ker(\alpha) \cong k$ ist $\ker(\alpha)$ tatsächlich maximal. Wir haben mit $\alpha \mapsto \ker(\alpha)$ also eine Abbildung $\mathfrak{t}^* \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$ gefunden.

Nun zur Umkehrabbildung: Man nehme ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ und betrachte die Projektion $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}$. Es gilt $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m} \cong k$, denn einerseits ist $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m} \supset k$ eine endliche Körpererweiterung von k (siehe [Eis95, Theorem 4.19]), andererseits war $k = \overline{k}$ vorausgesetzt. Wir erhalten eine k-lineare Abbildung $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow k$ und durch Einschränken auf $\mathfrak{t}$ eine Abbildung in $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{t}, k)$, die wir mit α' bezeichnen.

In der Tat sind diese beiden Abbildungen invers zueinander: Starten wir mit $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$, so konstruieren wir zunächst $\alpha' : \mathfrak{t} \to \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m} = k$, müssen dies wieder zu einem Algebrenhomomorphismus $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}$ fortsetzen, und dessen Kern ist natürlich wieder das maximale Ideal $\mathfrak{m}$, mit dem wir gestartet waren. Beginnen wir dagegen mit $\alpha \in \mathfrak{t}^*$, so setzen wir es zunächst multiplikativ auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ fort und erhalten das maximale Ideal $\ker(\alpha)$. Wir bilden nun $\alpha' : \mathfrak{t} \to \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\ker(\alpha) = k$. Wegen

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & k \\
& \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\ker(\alpha) \arrow[ur, "1\mapsto 1"'] &
\end{tikzcd}$$

ist aber $\alpha' = \alpha$ als Algebrenhomomorphismen, aber damit natürlich auch $\alpha' = \alpha$ in $\mathfrak{t}^*$. ☺

Bemerkung 2.3.8. Aus diesem Beweis geht übrigens hervor, wie $(\mathfrak{t}^*, \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$ auf kanonische Weise (also unabhängig von einer Basiswahl) als affine algebraische Varietät aufgefasst werden kann, weil diese Struktur von $(\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})), \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$ geerbt wird.

2.3.2 Das maximale Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$

Definition 2.3.9 ($\mathfrak{m}_\alpha$). Obige Bijektion $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cong \mathfrak{t}^*$ erlaubt eine Zuordnung eines maximalen Ideals $\mathfrak{m}_\alpha$ in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ zu einem Element α aus $\mathfrak{t}^*$: $\mathfrak{m}_\alpha$ ist der Kern von α als unitärer Algebrenhomomorphismus.

Lemma 2.3.10 (Beschreibung von $\mathfrak{m}_\alpha$). $\mathfrak{m}_\alpha$ wird erzeugt von Elementen der Form $t - \alpha(t)$ für $t \in \mathfrak{t}$.

Beweis. Ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ist nach Satz 2.3.6 von der Form $(X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n)$; durch $\alpha(X_i) := \alpha_i$ wird zudem eine lineare Abbildung von $\mathrm{span}_k\{X_1, \ldots, X_n\}$ nach k festgelegt. Nun wird $\mathfrak{m}$ erst recht durch $\{X - \alpha(X) \mid X \in \mathrm{span}_k \{X_1, \ldots, X_n\}\}$ erzeugt. Überträgt man α und $\mathfrak{m}$ mit dem Isomorphismus $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cong k[X_1, \ldots, X_n]$ aus Bemerkung 2.3.1 auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, so erhält man $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ sowie das maximale Ideal $\{t - \alpha(t) \mid t \in \mathfrak{t}\}$, welches offensichtlich dem Kern von α entspricht, also $\mathfrak{m}_\alpha = (t - \alpha(t) \mid t \in \mathfrak{t})$. ☺

Wie man von zwei Idealen das Produkt definiert, so lässt sich auch die p-te Potenz eines Ideals bilden.

Lemma 2.3.11 (Beschreibung von $\mathfrak{m}_\alpha^p$). $\mathfrak{m}_\alpha^p$ wird erzeugt von $\left\{\prod_{i=1}^{p}(t_i - \alpha(t_i)) \mid t_i \in \mathfrak{t}\right\}$.

Beweis. Die Elemente in $\mathfrak{m}_\alpha^p$ sind Summen von lauter Termen der Form $\prod_{i=1}^p m_i$ mit $m_i \in \mathfrak{m}_\alpha$. Damit es nicht noch hässlicher wird, betrachte nur $m_i = d\cdot(t_i - \alpha(t_i))$, denn bis auf Summation sehen so die Elemente von $\mathfrak{m}_\alpha$ aus ($d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ darf irgendwas sein). Folglich ist so ein $\prod_{i=1}^p m_i$ in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot \prod_{i=1}^{p}(t_i - \alpha(t_i))$ enthalten, $\mathfrak{m}_\alpha^p$ wird in der Tat von $\prod_{i=1}^{p}(t_i - \alpha(t_i))$, $t_i \in \mathfrak{t}$, erzeugt. ☺

Bemerkung 2.3.12. Warum interessiert man sich hier so sehr für die maximalen Ideale in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$? Bald werden wir A-Moduln betrachten, auf denen dann via ϕ auch die Algebra $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ wirkt. Dann kann man Moduln M mit der Gewichtsraumzerlegung $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_\alpha$ betrachten, also

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{v \in M \mid t_\bullet v = \alpha(t)\cdot v \text{ für alle } t \in \mathfrak{t}\} \\ &= \{v \in M \mid (t-\alpha(t))_\bullet v = 0 \text{ für alle } t \in \mathfrak{t}\} \\ &= \{v \in M \mid (\mathfrak{m}_\alpha)_\bullet v = 0\}. \end{aligned}$$

Hat man die Gewichtsräume so geschrieben, sieht man leicht, wie man dies verallgemeinern kann: Später möchten wir Moduln mit einer verallgemeinerten Gewichtsraumzerlegung betrachten, also $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_{(\alpha)}$ mit

$$\begin{aligned} M_{(\alpha)} &= \{v \in M \mid (\mathfrak{m}_\alpha^p)_\bullet v = 0\} \\ &= \{v \in M \mid \ker(\alpha)^p{}_\bullet v = 0\}. \end{aligned}$$

Zur späteren Verwendung (gut, was ist zu diesem Zeitpunkt nicht zur späteren Verwendung gedacht?) erscheint hier eine momentan unmotivierte technische Aussage.

Lemma 2.3.13. Sei $\gamma \in \mathfrak{t}^*$. Es ist $\prod_{i=1}^{p}(t_i + \gamma(t_i)) \in \mathfrak{m}_\alpha^p$ genau dann, wenn $t_i + \gamma(t_i) \in \mathfrak{m}_\alpha$ für alle $1 \le i \le p$ ist.

Beweis. Die eine Richtung ist ganz einfach: Sind die p Faktoren in $\mathfrak{m}_\alpha$, so ist ihr Produkt in $\mathfrak{m}_\alpha^p$. Andersrum kann man mithilfe primärer Ideale argumentieren: $\mathfrak{m}_\alpha^p$ ist nach [AM69, Proposition 4.2] ein primäres Ideal, das heißt, aus $m_1 m_2 \in \mathfrak{m}_\alpha^p$ folgt, dass entweder $m_1 \in \mathfrak{m}_\alpha^p$, oder aber $m_2^r \in \mathfrak{m}_\alpha^p$ für eine hinreichend große Potenz r. Setze für unsere Zwecke $m_1 := \prod_{i=1}^{p-1}(t_i + \gamma(t_i))$ und $m_2 := (t_p + \gamma(t_p))$. m_1 kann nun aus Gradgründen nicht in $\mathfrak{m}_\alpha^p$ sein, da alle darin enthaltenen Polynome mindestens Grad p haben müssen und m_1 offenbar vom Grad $p-1$ ist. Also $m_2^r \in \mathfrak{m}_\alpha^p \subset \mathfrak{m}_\alpha$, und weil ein maximales Ideal prim ist, auch $m_2 \in \mathfrak{m}_\alpha$. Dasselbe Argument zieht auch für jeden anderen Faktor von $\prod_{i=1}^{p}(t_i + \gamma(t_i))$. ☺

In Lemma 2.4.15 möchten wir dies gerne so zitieren:

Korollar 2.3.14. $\prod_{i=1}^{p}(\beta(t_i) + t_i - \alpha(t_i)) \in \mathfrak{m}_\alpha^p$ genau dann, wenn $\beta(t_i) + t_i - \alpha(t_i) \in \mathfrak{m}_\alpha$ für alle $1 \le i \le p$.

2.4 $\mathcal{O}^{(p)}$ - Eine weitere Modulkategorie

Wir interessieren uns wie gesagt für A-grmod. Insbesondere würden wir am liebsten die einfachen Moduln darin beschreiben können. Dieses Ziel ist dummerweise zu hoch gesteckt, aber wir wittern immerhin die Chance, wenigstens deren Annihilatoren in A zu untersuchen. Der Annihilator eines Moduls M ist definiert als das beidseitige Ideal

$$\mathrm{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid a_\bullet m = 0 \text{ für alle } m \in M\} \subset A.$$

Wäre unsere Algebra kommutativ, würden wir jeden einfachen Modul L damit sogar bis auf Isomorphie wieder zurückgewinnen können: $L \cong A/\mathrm{Ann}_A(L)$! Für unsere Algebra A, die ja nichtkommutativ sein kann, sieht die Lage leider nicht ganz so rosig aus, aber trotzdem bleiben die Annihilatoren interessant, siehe dazu auch Abschnitt 3.1. Und die Annihilatoren einfacher Moduln in A-grmod *kann* man beschreiben! Es reicht dazu nämlich eine handliche Unterkategorie namens $\mathcal{O}^{(p)} \subset A$-grmod aus, in der man die Einfachen und ihre Annihilatoren viel leichter untersuchen kann, und trotzdem erhält man am Ende eine Beschreibung sämtlicher Annihilatoren einfacher Moduln aus A-grmod.

Bemerkung 2.4.1 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Diese Vorgehensweise bei der Suche nach den primitiven Idealen, nämlich

1. Einschränkung von der ganzen Modulkategorie auf eine handliche Unterkategorie,
2. Klassifikation der primitiven Ideale für diese Unterkategorie,
3. Einsicht, dass man hiermit schon alle primitiven Ideale beschrieben hat,

ist in der klassischen Situation von einhüllenden Algebren schon erprobt. Die 'handliche Unterkategorie' ist in diesem Fall die BGG-Kategorie $\mathcal{O} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-mod mit ihren einfachen Objekten $L(\lambda)$ (gegeben als eindeutig bestimmte einfache Quotienten von Vermamoduln zum Höchstgewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$), siehe [Hum08]. Es handelt sich hierbei um den Satz von Duflo [Jan83, Korollar 7.4]:

$$\left\{\begin{matrix}\text{primitive Ideale}\\ \text{in } \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Annihilatoren}\\ \text{von } L(\lambda) \in \mathcal{O}\end{matrix}\right\}.$$

Definition 2.4.2 (Die Kategorie $\mathcal{O}^{(p)}$). $\mathcal{O}^{(p)}$ ist definiert als die volle Unterkategorie von A-mod, deren Objekte als $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Linksmoduln isomorph zu Quotienten von $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p)$ sind. Die $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modulstruktur wird jeweils wie folgt erklärt:

- $M \in A$-mod wird via $d_\bullet m = \phi(d)_\bullet m$ für $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ zu einem Links-$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modul, also kann man $M \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-mod auffassen.
- $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p)$ wird mit der normalen Linksmultiplikation in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ betrachtet, $d_\bullet m = d\cdot m \in \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p)$.

Knapper formuliert gilt also für einen Modul $M \in \mathcal{O}^{(p)}$:

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p) \twoheadrightarrow M \qquad \text{als } \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})\text{-Moduln.}$$

Daher hat $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_{(\alpha)}$ eine verallgemeinerte Gewichtsraumzerlegung mit

$$M_{(\alpha)} := \{m \in M \mid (\mathfrak{m}_\alpha^p)_\bullet m := \phi(\mathfrak{m}_\alpha^p)_\bullet m = 0\} \cong \text{Quotient von } \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p.$$

Diese Zerlegung von M wirft die Frage auf, wie sie sich mit der Graduierung von $A = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} A_\alpha$ verträgt.

Lemma 2.4.3. Sei $M \in \mathcal{O}^{(p)} \subset A$-mod. Die Zerlegung $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_{(\alpha)}$ entspricht einer $\mathfrak{t}^*$-Graduierung des Moduls, das heißt $A_{\beta\bullet} M_{(\alpha)} \subset M_{(\alpha+\beta)}$.

Beweis. Man muss fr $a \in A_\beta$, $m \in M_{(\alpha)}$ zeigen, dass $a_\bullet m \in M_{(\alpha+\beta)}$ gilt. Anders gesagt: Ist $a \in A_\beta$, $\mathfrak{m}^p_{\alpha\bullet} m = 0$, dann ist auch $\mathfrak{m}^p_{\alpha+\beta\bullet}(a_\bullet m) = 0$.

Sei $\prod_{i=1}^{p}(t_i-(\alpha+\beta)(t_i))$ ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_{\alpha+\beta}^p$. Ziel ist, $\prod_{i=1}^{p}(t_i-(\alpha+\beta)(t_i))_{\bullet}\, am=0$ zu zeigen, unter der Voraussetzung, dass $\prod_{i=1}^{p}(t_i-\alpha(t_i))_{\bullet}\, m=0$ ist.

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{p}(t_i-(\alpha+\beta)(t_i))_{\bullet}\, am &= \prod_{i=1}^{p}((t_i-\beta(t_i))-\alpha(t_i))_{\bullet}\, am \\
&= \prod_{i=1}^{p-1}((t_i-\beta(t_i))-\alpha(t_i))_{\bullet}\, ((t_p-\beta(t_p))_{\bullet}\, am \;-\; \alpha(t_p)_{\bullet}\, am) \\
&= \prod_{i=1}^{p-1}((t_i-\beta(t_i))-\alpha(t_i))_{\bullet}\, ((t_pa-\beta(t_p)a)_{\bullet}\, m \;-\; \alpha(t_p)_{\bullet}\, am) \\
&= \prod_{i=1}^{p-1}((t_i-\beta(t_i))-\alpha(t_i))_{\bullet}\, (at_{p\bullet}\, m \;-\; \alpha(t_p)_{\bullet}\, am) \\
&\quad \text{denn } at_i=t_ia-[t_i,a]=t_ia-\beta(t_i)a \\
&= \prod_{i=1}^{p-1}((t_i-\beta(t_i))-\alpha(t_i))\cdot a_{\bullet}\, (t_p \;-\; \alpha(t_p))_{\bullet}\, m \\
&= a_{\bullet} \prod_{i=1}^{p}(t_i \;-\; \alpha(t_i))_{\bullet}\, m \\
&\quad \text{nach } p\text{-facher Wiederholung desselben Arguments} \\
&= a_{\bullet}\, 0 \;=\; 0
\end{aligned}
$$

☺

Korollar 2.4.4. $\mathcal{O}^{(p)} \subset A$-grmod ist eine volle Unterkategorie via $M \mapsto \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_{(\alpha)}$.

Beweis. Wir wissen bereits, wie man die Objekte in $\mathcal{O}^{(p)}$ als Objekte in A-grmod auffassen kann. Bisher ist aber für die Morphismen nur klar, dass $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{(p)}}(M,N) := \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M,N) \supset \mathrm{Hom}_{A\text{-grmod}}(M,N)$. Zeige: $\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A\text{-grmod}}(M,N)$ für $M,N\in\mathcal{O}^{(p)}$, zeige insbesondere, dass $f(M_{(\alpha)})\subset N_{(\alpha)}$ gilt:
Hierzu denke man wieder an die Links-Sym$(\mathfrak{t})$-Modulstruktur auf M und N, und damit ist

$$\mathfrak{m}_{\alpha\bullet}^p\, f(m)=\phi(\mathfrak{m}_\alpha^p)(f(m))=f(\phi(\mathfrak{m}_\alpha^p)m)=f(0)=0$$

für alle $m\in M_{(\alpha)}$, wie gewünscht. ☺

Bemerkung 2.4.5 (Die $\mathfrak{t}^*$-Graduierungen von $\mathcal{O}^{(p)}$). Man muss mit der Graduierung von $\mathcal{O}^{(p)}$-Moduln aufpassen, denn man hat zwei mögliche interessante Graduierungen für manche Moduln $M\in\mathcal{O}^{(p)}$: Einerseits handelt es sich bei allen Objekten aus $\mathcal{O}^{(p)}$ um A-Moduln, und ein Quotient von A kann die $\mathfrak{t}^*$-Graduierung von A erben. Die dadurch erhaltenen Graduierungen werden mit $M=\bigoplus M_\alpha$ notiert. Andererseits haben wir soeben die $\mathfrak{t}^*$-Graduierung über verallgemeinerte Gewichtsräume eingeführt. Sie wird immer mit $M=\bigoplus M_{(\alpha)}$ bezeichnet.

Bemerkung 2.4.6 (Eigenschaften von $\mathcal{O}^{(p)}$). Wir können außerdem festhalten, dass $\mathcal{O}^{(p)}$ folgende Eigenschaften hat:

- $\mathcal{O}^{(p)}$ ist abgeschlossen unter Quotienten, denn auf Quotienten M/U von $M\in\mathcal{O}^{(p)}$ vererbt sich die Surjektion
$$\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p) \twoheadrightarrow M \twoheadrightarrow M/U.$$

- $\mathcal{O}^{(p)}$ ist jedoch *nicht* abgeschlossen unter direkten Summen, da in

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p)$$

  kein Summand mit Vielfachheit auftritt und somit nicht gewährleistet werden kann, dass die Summe von zwei Moduln $M, N \in \mathcal{O}^{(p)}$ immer ein Quotient von $\bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p)$ ist.

Kommen wir noch einmal auf das klassische Vorbild zurück:

Bemerkung 2.4.7 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Wie oben angesprochen, übernimmt die Kategorie $\mathcal{O}^{(p)}$ aus [MVdB98] die Rolle der BGG-Kategorie $\mathcal{O}$, wenn man die analoge Aussage zum Satz von Duflo beweisen will. Wie groß sind die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen $\mathcal{O}^{(p)}$ und $\mathcal{O}$?

- $\mathcal{O}$ ist eine abelsche Kategorie [Hum08, Theorem 1.1], $\mathcal{O}^{(p)}$ ist hingegen nicht unter direkten Summen abgeschlossen.

- Moduln aus $\mathcal{O}$ haben eine $\mathfrak{h}^*$-Gewichtsraumzerlegung $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} M_\lambda$ [Hum08, Kapitel 1.1] mit

$$\begin{aligned} M_\lambda &= \{v \in M \mid (\mathfrak{h} - \lambda(\mathfrak{h}))_\bullet v = 0\} \\ &= \{v \in M \mid \ker(\lambda)_\bullet v = 0\}, \end{aligned}$$

  wobei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ zu einem Algebrenhomomorphismus ausgedehnt wurde und somit $\ker(\lambda) \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ gilt. Moduln aus $\mathcal{O}^{(p)}$ besitzen dagegen eine *verallgemeinerte* $\mathfrak{t}^*$-Gewichtsraumzerlegung $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_{(\alpha)}$ mit

$$\begin{aligned} M_{(\alpha)} &= \{v \in M \mid (\mathfrak{m}_\alpha^p)_\bullet v = 0\} \\ &= \{v \in M \mid \ker(\alpha)^p{}_\bullet v = 0\}. \end{aligned}$$

  Damit besitzt die Kategorie $\mathcal{O}^{(p)}$ mehr Ähnlichkeit mit der p-aufgedickten Kategorie $\mathcal{O}$ als mit der BGG-Kategorie $\mathcal{O}$ (siehe [MS05, Kapitel 3.1] zur Definition der aufgedickten Kategorie $\mathcal{O}$). Für $p = 1$ fallen die aufgedickte und die gewöhnliche Kategorie $\mathcal{O}$ jedoch zusammen. In Abschnitt 2.4.2 werden wir sehen, dass die einfachen Moduln aus $\mathcal{O}^{(p)}$ alle schon in $\mathcal{O}^{(1)}$ leben.

2.4.1 Moduln aus $\mathcal{O}^{(p)}$ und ihre Träger in $\mathfrak{t}^*$

Definition 2.4.8 (Der Träger eines Moduls). Sei $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} M_\alpha \in A$-grmod ein Modul mit beliebiger Graduierung. Definiere den Träger des Moduls als

$$\mathrm{Supp}\, M := \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid M_\alpha \neq 0\}.$$

Lemma 2.4.9. Sei $M \in \mathcal{O}^{(p)}$ mit der Graduierung $M = \bigoplus M_{(\alpha)}$, dann gilt $\mathrm{Supp}\, M \subset V(\ker\phi)$ (ersteres ist Teilmenge von $\mathfrak{t}^*$, letzteres Teilmenge von $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$, verwende in dieser Aussage die Identifikation beider Mengen aus Proposition 2.3.7).

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Supp} M &= \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid M_{(\alpha)} \neq 0\} \\
&= \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid (\mathfrak{m}_\alpha^p)_\bullet m = 0 \text{ für ein } m \in M, m \neq 0\} \\
&\leftrightarrow \{\mathfrak{m}_\alpha \in \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \mid (\mathfrak{m}_\alpha^p)_\bullet m = 0 \text{ für ein } m \in M, m \neq 0\} \\
&= \{\mathfrak{m}_\alpha \in \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \mid (\mathfrak{m}_\alpha)_\bullet m' = 0 \text{ für ein } m' \in M, m' \neq 0\} \\
&= \{\mathfrak{m}_\alpha \in \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \mid \phi(\mathfrak{m}_\alpha)_\bullet m' = 0 \text{ für ein } m' \in M, m' \neq 0\} \\
&= \{\mathfrak{m}_\alpha \in \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \mid \phi(\mathfrak{m}_\alpha)_\bullet m' = 0 \text{ für ein } m' \in M, m' \neq 0 \text{ und } \ker\phi \subset \mathfrak{m}_\alpha\} \\
&\quad \text{(leere Zusatzbedingung, siehe unten)} \\
&\subset \{\mathfrak{m}_\alpha \in \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \mid \ker\phi \subset \mathfrak{m}_\alpha\} \\
&= V(\ker\phi),
\end{aligned}
$$

denn $\ker\phi \subset \mathfrak{m}_\alpha$ ist hier tatsächlich eine leere Bedingung: Gäbe es ein $\mathfrak{m}_\alpha$ mit $\ker(\phi) \not\subseteq \mathfrak{m}_\alpha$, so müsste $\mathfrak{m}_\alpha + \ker(\phi) = \operatorname{Sym}(\mathfrak{t})$ sein, sonst hätte man ja durch die Vereinigung ein echt größeres Ideal konstruiert. Also ist $1 = x + y \ \in \operatorname{Sym}(\mathfrak{t})$ mit $x \in \mathfrak{m}_\alpha$ und $y \in \ker(\phi)$, und

$$0 \neq 1_\bullet m' = \phi(1)_\bullet m' = \phi(x)_\bullet m' + \phi(y)_\bullet m' = 0 + 0 = 0,$$

Widerspruch. ☺

Wir halten fest: Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ haben ihren Träger höchstens in $V(\ker\phi)$. Aber im nächsten Abschnitt sehen wir, wie man für beliebiges $\alpha \in V(\ker\phi)$ einen Modul hinschreibt, der in $\mathcal{O}^{(p)}$ ist und in dessen Träger auch das α vorkommt. Damit muss man sich bei der Bestimmung des Trägers eines Moduls aus $\mathcal{O}^{(p)}$ nicht mehr ganz $\mathfrak{t}^*$ anschauen, sondern nur noch $V(\ker(\phi))$ - weniger reicht aber auch nicht.

2.4.2 Die Einfachen und die Projektiven in $\mathcal{O}^{(p)}$

Definition 2.4.10 ($M^{(p)}(\alpha)$ und $L(\alpha)$). Sei $\alpha \in V(\ker\phi) \subset \mathfrak{t}^*$. Wir definieren die folgenden Moduln in A-grmod:

- $M^{(p)}(\alpha) \ := \ A/A\mathfrak{m}_\alpha^p$
- $L(\alpha) \ :=$ Der eindeutig bestimmte einfache Quotient von $M^{(p)}(\alpha)$, siehe Proposition 2.4.19.

Hierbei ist $A\mathfrak{m}_\alpha^p := A \cdot \phi(\mathfrak{m}_\alpha^p)$ gemeint, also das Linksideal in A, das vom Bild von $\mathfrak{m}_\alpha^p$ unter ϕ erzeugt wird.

Bemerkung 2.4.11. Nach ein paar technischen Vorbemerkungen sehen wir in Bemerkung 2.4.14, dass $M^{(p)}(\alpha) \in \mathcal{O}^{(p)}$ ist.

Bemerkung 2.4.12. Wie schon gesagt: Hinschreiben kann man diese Definition natürlich auch für andere α's in $\mathfrak{t}^*$, nach Lemma 2.4.9 tauchen die aber niemals im Träger eines Moduls in $\mathcal{O}^{(p)}$ auf.

Wenn wir im Folgenden mit $M^{(p)}(\alpha)$ rechnen wollen, brauchen wir ein paar wirklich trockene Aussagen, die zunächst übergangen werden können:

Lemma 2.4.13 (Trockenlemma). Hier sind ein paar zusammengetragene Fakten über A und $M^{(p)}(\alpha)$:

i) Ein zweiseitiges Ideal I in A erbt die Graduierung von A durch $I_\alpha := I \cap A_\alpha$ (mit anderen Worten: I ist dann ein homogenes Ideal).

ii) $\phi(\mathfrak{m}_\alpha^p) \subset A_0$ (und es gilt ganz allgemein $\phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \subset A_0$).

iii) $A/A\mathfrak{m}_\alpha^p = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p$.

iv) Für die geklammerte Graduierung gilt:
$(A/A\mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)} = \left(\bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p \right)_{(\gamma)} = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} (A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)}$.

v) Für die ungeklammerte Graduierung gilt:
$(A/A\mathfrak{m}_\alpha^p)_\gamma = \left(\bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p \right)_\gamma = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} (A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p)_\gamma = A_\gamma / A_\gamma \mathfrak{m}_\alpha^p$.

vi) Für die Invarianten unter der Wirkung eines Unterraums $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ gilt: $A^{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta^{\mathfrak{g}}$

vii) Für u zentral in A gilt $A/A(u) = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta(u)$.

viii) Seien γ und β aus $\mathfrak{t}^*$. Es gilt
$$\mathfrak{m}_\gamma A_\beta = A_\beta \mathfrak{m}_{\gamma-\beta}.$$

All diese Aussagen liegen eigentlich auf der Hand, sind hier der Vollständigkeit halber aber nochmal bewiesen.

Beweis.

i) Mit $I_\alpha := I \cap A_\alpha$ ist $I = \bigoplus_\alpha I_\alpha$: Wie jedes Element aus A lässt sich $a \in I$ eindeutig schreiben als $a = \sum_\beta a_\beta$ mit $a_\beta \in A_\beta$. Diese a_β's sind wieder in I enthalten: Ein zweiseitiges Ideal ist abgeschlossen unter der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung, also kann man $\mathfrak{t}$ auf a wirken lassen und ein Diagonalargument anwenden, $[t,a] = \sum [t, a_\beta] = \sum \beta(t) a_\beta \in I$, Subtraktion von $\gamma(t)a$ reduziert die Zahl der Summanden um 1, das Ergebnis a' liegt aber wieder in I. Fahre fort, bis nur noch ein einziger Summand $a''_\beta \in I$ übrigbleibt. Der muss dann nur noch umskaliert werden, um $a_\beta \in I$ zu sehen.

ii) $\phi(\mathfrak{m}_\alpha^p) \subset \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \subset A_0$, weil $[\phi(t), \phi(d)] = \phi([t,d]) = \phi(0) = 0 \cdot \phi(d)$ für $t \in \mathfrak{t}$ und $\phi(d) \in \phi(\mathfrak{m}_\alpha^p)$ gilt, wie in Bemerkung 2.1.9 bereits festgestellt wurde.

iii) Wegen $\phi(\mathfrak{m}_\alpha^p) \subset A_0$ ist $A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p \subset A_\beta$, also macht $A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p$ Sinn. Projiziere jetzt summandenweise:
$$A \twoheadrightarrow \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p,$$
der Kern ist gerade $\bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p = A\mathfrak{m}_\alpha^p$.

iv) Wir möchten für die geklammerte Graduierung
$$(A/A\mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)} = \left(\bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p \right)_{(\gamma)} = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} (A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)}$$
zeigen. Die erste Gleichheit folgt unmittelbar aus Teil (iii). Die Inklusion
$$\left(\bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p \right)_{(\gamma)} \supset \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} (A_\beta / A_\beta \mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)}$$

ist klar, weil aus $\mathfrak{m}_{\gamma\bullet}^{p} a = 0$ und $\mathfrak{m}_{\gamma\bullet}^{p} a' = 0$ folgt, dass auch $\mathfrak{m}_{\gamma\bullet}^{p}(a + a') = 0$ für $a \in (A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)}$ und $a' \in (A_{\beta'}/A_{\beta'}\mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)}$ gilt. Die andere Inklusion

$$\left(\bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p\right)_{(\gamma)} \subset \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} (A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p)_{(\gamma)}$$

schließt man aus der linearen Unabhängigkeit von solchen a und a' wie oben (dieses Argument funktioniert ebenso für beliebige Summen von Elementen aus verschiedenen $A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p$) Deswegen darf man nämlich durch Koeffizientenvergleich aus $\mathfrak{m}_{\gamma\bullet}^{p}(a+a') = 0$ folgern, dass $\mathfrak{m}_{\gamma\bullet}^{p} a = 0$ und $\mathfrak{m}_{\gamma\bullet}^{p} a' = 0$ gilt (hierbei geht auch ein, dass sich die Multiplikation mit $\mathfrak{m}_\gamma^p$ auf $A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p$ einschränken lässt, weil $\mathfrak{m}_\gamma^p$ in A_0 lebt).

v) Für die ungeklammerte Graduierung gelten dieselben Argumente wie in Teil (iv) (nur dass man hier ausnutzt, dass sich die adjungierte $\mathfrak{t}$-Wirkung auf jedes $A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p$ einschränken lässt) Die dritte Gleichheit gilt, weil $A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}_\alpha^p$ bezüglich der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung vom Gewicht β ist - damit sind alle Summanden außer $A_\gamma/A_\gamma\mathfrak{m}_\alpha^p$ schon Null gewesen.

vi) $A^\mathfrak{g} = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta^\mathfrak{g}$: Dies funktioniert wieder genauso: Die Inklusion $\supset$ ist klar, und die Inklusion $\subset$ liegt daran, dass aus $[\mathfrak{g}, a + a'] = 0$ folgt, dass auch $[\mathfrak{g}, a] = 0$ und $[\mathfrak{g}, a'] = 0$ für a und a' gilt (a und a' sind wie oben gewählt; das Argument lässt sich auf beliebige Summen ausdehnen), denn die A_β sind untereinander linear unabhängig und abgeschlossen unter der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung, also auch unter der induzierten $\mathfrak{g}$-Wirkung.

vii) $A/A(u) = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta/A_\beta(u)$: Wir haben es bei $A(u)$ mit einem beidseitigen Ideal in A zu tun, weil u zentral ist. Nach Punkt (i) ist $A(u)$ dann homogen. Zugleich ist $u \in A_0$ (wieder wegen der Zentralität von u) und damit folgt $(A(u))_\beta = A_\beta \cap A(u) = A_\beta(u)$. Schließlich gilt

$$A/A(u) = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} (A/A(u))_\beta = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta/(A(u))_\beta = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta/A_\beta(u).$$

viii) Sei a_β nach (A2) ein Erzeuger von A_β, das heißt $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})a_\beta = A_\beta$. Ein Element $d \in \mathfrak{m}_\gamma$ wird nach Lemma 2.3.10 von Elementen der Form $t - \gamma(t)$ für $t \in \mathfrak{t}$ erzeugt, und für die gilt

$$\begin{aligned}(t-\gamma(t))a_\beta &= [t, a_\beta] + a_\beta t - \gamma(t)a_\beta\\ &= \beta(t)a_\beta + a_\beta t - \gamma(t)a_\beta\\ &= (\beta-\gamma)(t)a_\beta + a_\beta t\\ &= a_\beta(t - (\gamma-\beta)(t)),\end{aligned}$$

und $t - (\gamma - \beta)(t)$ ist ganz eindeutig in $\mathfrak{m}_{\gamma-\beta}$, womit

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})(t - \gamma(t)) \cdot A_\beta \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})A_\beta\mathfrak{m}_{\gamma-\beta} = A_\beta\mathfrak{m}_{\gamma-\beta}$$

und damit auch

$$\mathfrak{m}_\gamma A_\beta \subset A_\beta\mathfrak{m}_{\gamma-\beta}$$

gezeigt sind. Andererseits kann man diese Rechnung auch von hinten aufzäumen und zeigt die andere Inklusion

$$A_\beta\mathfrak{m}_{\gamma-\beta} \subset \mathfrak{m}_\gamma A_\beta$$

via

$$A_\beta \cdot \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})(t - (\gamma-\beta)(t)) \subset \mathfrak{m}_\gamma A_\beta \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{m}_\gamma A_\beta$$

(man muss ein bisschen darauf aufpassen, was beim Vertauschen von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ mit a_β passiert, aber die gewünschten Inklusionen funktionieren). ☺

Bemerkung 2.4.14. $M^{(p)}(\alpha)$ ist in $\mathcal{O}^{(p)}$ enthalten:

- Die Links-A-Modulstruktur ist durch die gewöhnliche Linksmultiplikation in A erklärt
- Die $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modul-Struktur ist via $\phi : \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \to A$ gegeben durch $d_\bullet m = \phi(d)_\bullet m = \phi(d) \cdot m$
- Der $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modul-Isomorphismus zu einem Quotienten von $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p)$ ist gegeben durch

$$\bigoplus_{\alpha+\beta \in \mathfrak{t}^*} (\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}^p_{\alpha+\beta}) \twoheadrightarrow \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta/\mathfrak{m}^p_{\alpha+\beta}A_\beta = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}^p_\alpha = A/A\mathfrak{m}^p_\alpha,$$

  wobei die erste Surjektion unter Berücksichtigung von (A2) gegeben ist, wonach jeder Gewichtsraum A_β Quotient von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ ist (beachte den kleinen Indextrick: Wir verwenden die Surjektion $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow A_\beta$ in dem Summanden, in dem $\mathfrak{m}^p_{\alpha+\beta}$ rausgeteilt wird). Die zweite Gleichheit kommt von $\mathfrak{m}_\gamma A_\beta = A_\beta \mathfrak{m}_{\gamma-\beta}$ aus Trockenlemma 2.4.13.viii her.

Lemma 2.4.15 (Gewichtsräume von $M^{(p)}(\alpha)$). Seien $\alpha, \gamma \in V(\ker\phi)$.

i) Es gilt $M^{(p)}(\alpha)_{(\gamma)} = (A/A\mathfrak{m}^p_\alpha)_{(\gamma)} = A_{\gamma-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}^p_\alpha$.

ii) Es gilt insbesondere $M^{(p)}(\alpha)_{(\alpha)} = (A/A\mathfrak{m}^p_\alpha)_{(\alpha)} = A_0/A_0\mathfrak{m}^p_\alpha$.

iii) Es folgt damit auch $M^{(p)}(\alpha)_{(\gamma)} = (A/A\mathfrak{m}^p_\alpha)_{\gamma-\alpha} = M^{(p)}(\alpha)_{\gamma-\alpha}$.

Man bemerke, dass der letzte Punkt endlich das Verhältnis der geklammerten zur ungeklammerten Graduierung aufklärt!

Beweis.

i) Es gilt, dass $(M^{(p)}(\alpha))_{(\gamma)} = A_{\gamma-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}^p_\alpha$ ist:
Bekanntermaßen ist

$$M^{(p)}(\alpha)_{(\gamma)} = (A/A\mathfrak{m}^p_\alpha)_{(\gamma)} = \left(\bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}^p_\alpha\right)_{(\gamma)} = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{t}^*} (A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}^p_\alpha)_{(\gamma)}$$

(unter Verwendung des Trockenlemmas 2.4.13, Teil (iii) und (iv)), demnach muss gezeigt werden, dass genau für $\beta = \gamma - \alpha$ der Gewichtsraum $(A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}^p_\alpha)_{(\gamma)}$ ungleich Null ist. Forme ihn zu diesem Zweck etwas um:

$$(A_\beta/A_\beta\mathfrak{m}^p_\alpha)_{(\gamma)} = \{\overline{a} \mid \mathfrak{m}^p_\gamma \cdot \overline{a} = 0\} = \{\overline{a} \mid \mathfrak{m}^p_\gamma \cdot a \subset A_\beta \cdot \mathfrak{m}^p_\alpha\}.$$

Überlege, für welche β das Produkt $\prod_{i=1}^p (t_i - \gamma(t_i)) \cdot a$ in $A_\beta\mathfrak{m}^p_\alpha$ liegt, für $a \in A_\beta$ und Erzeuger $\prod_{i=1}^p (t_i - \gamma(t_i))$ von $\mathfrak{m}^p_\gamma \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, wobei $t_i \in \mathfrak{t}$.
Man rechnet

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p (t_i - \gamma(t_i)) \cdot a &= \prod_{i=1}^{p-1} (t_i - \gamma(t_i))([t_p, a] + a \cdot t_p - \gamma(t_p))a \\ &= \prod_{i=1}^{p-1} (t_i - \alpha(t_i)) \cdot a(\beta(t_p) + t_p - \gamma(t_p)) \\ &= a \cdot \prod_{i=1}^{p} (\beta(t_i) + t_i - \gamma(t_i)). \end{aligned}$$

$\prod_{i=1}^{p}(\beta(t_i)+t_i-\gamma(t_i))$ soll nun in $\mathfrak{m}_\alpha^p$ sein, also $\beta(t_i)+t_i-\gamma(t_i)\in\mathfrak{m}_\alpha$, wie im Abschnitt über das maximale Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$ in Korollar 2.3.14 gezeigt wurde.
Das ist gleichbedeutend mit $\alpha(\beta(t_i)+t_i-\gamma(t_i))=0$, bzw. $\beta(t_i)=\gamma(t_i)-\alpha(t_i)$ für alle $t_i\in\mathfrak{t}$.

ii) Folgt mit $\gamma:=\alpha$.

iii) Mit dem Trockenlemma 2.4.13, Teil (iii) folgt aus der ersten Aussage, dass gilt:

$$\begin{aligned} M^{(p)}(\alpha)_{(\gamma)} &= A_{\gamma-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha^p \\ &= (A/A\mathfrak{m}_\alpha^p)_{\gamma-\alpha} \\ &= M^{(p)}(\alpha)_{\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$ ☺

Korollar 2.4.16. $M^{(p)}(\alpha)$ wird über A bzgl. der geklammerten Graduierung in Grad α erzeugt.

Beweis. $M^{(p)}(\alpha)=A/A\mathfrak{m}_\alpha^p$ von der $\overline{1}$ aus $A_0/A_0\mathfrak{m}_\alpha^p$ und damit in Grad 0 bzgl. der ungeklammerten Graduierung erzeugt. Wir haben aber soeben im Gewichtsraumlemma 2.4.15 gesehen, dass $M^{(p)}(\alpha)_{(\alpha)}=M^{(p)}(\alpha)_{\alpha-\alpha}=M^{(p)}(\alpha)_0$ ist. Bezüglich der geklammerten Graduierung befindet sich $\overline{1}$ also in Grad α. ☺

Die folgenden Sätze entsprechen [MVdB98, Proposition 3.1.7] und rechtfertigen sowohl die Überschrift dieses Abschnitts ($M^{(p)}(\alpha)$ ist projektiv in $\mathcal{O}^{(p)}$) als auch die Definition von $L(\alpha)$ (der eindeutig bestimmte einfache Kopf von $M^{(p)}(\alpha)$).

Proposition 2.4.17 ($M^{(p)}(\alpha)$ ist projektiv in $\mathcal{O}^{(p)}$). Sei α in $V(\ker\phi)$.

i) $M\in\mathcal{O}^{(p)} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M^{(p)}(\alpha),M)=M_{(\alpha)}$

ii) $M^{(p)}(\alpha)$ ist projektives Objekt in $\mathcal{O}^{(p)}$

Beweis.

i) $M\in\mathcal{O}^{(p)} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M^{(p)}(\alpha),M)=M_{(\alpha)}$:
$M^{(p)}(\alpha)=A/A\mathfrak{m}_\alpha^p=A\cdot\overline{1}$, also wird $f\in\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M^{(p)}(\alpha),M)$ bereits vollständig durch $f(\overline{1})$ festgelegt. Man kann also $\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M^{(p)}(\alpha),M)$ und $\{f(\overline{1})\ \in M\mid f\in\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),M)\}$ als A-Moduln miteinander identifizieren. Nun sind genau die $m\in M$ als Bilder $f(\overline{1})$ von $\overline{1}$ erlaubt, für die $\mathfrak{m}_\alpha^p\bullet m=0$ ist. Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M^{(p)}(\alpha),M) &= \{f(\overline{1})\ \in M\mid f\in\ \mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),M)\} \\ &= \{m\in\ M\mid\mathfrak{m}_\alpha^p\bullet m=0\}, \end{aligned}$$

und Letzteres ist nach Definition der Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ genau $M_{(\alpha)}$.

ii) $M^{(p)}(\alpha)$ ist projektiv in $\mathcal{O}^{(p)}$:
Dazu merken wir zunächst an, dass die Epimorphismen in $\mathcal{O}^{(p)}$ gerade die gewöhnlichen Surjektionen aus A-mod (zwischen Objekten, die auch in $\mathcal{O}^{(p)}$ liegen) sind. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),N)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),f)}\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),N')$$

surjektiv ist, sofern $N\overset{f}{\twoheadrightarrow}N'\to 0$ surjektiv war. Nun ist aber

$$\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),N)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),f)}\mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha),N')$$

nichts anderes als

$$N_{(\alpha)} \to N'_{(\alpha)},$$

und diese Abbildung ist surjektiv, weil Gewichtsräume zu nehmen exakt ist (alle auftretenden Morphismen sind $\mathfrak{t}^*$-graduiert). ☺

Bemerkung 2.4.18 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Dieser Modul $M^{(p)}(\alpha)$ spielt die Rolle des Vermamoduls $M(\lambda)$ aus Kategorie $\mathcal{O}$. Wie $M(\lambda)$ über $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ von einem Höchstgewichtsvektor vom Gewicht λ erzeugt wird, wird auch $M^{(p)}(\alpha) = A/A\mathfrak{m}_\alpha^p$ über A in Grad (α) erzeugt (siehe Korollar 2.4.16). Soeben haben wir in Proposition 2.4.17.i gesehen, dass die $M^{(p)}(\alpha)$'s allesamt projektiv sind. Diese Aussage gilt nicht so allgemein für Vermamoduln, hier muss man voraussetzen, dass λ ein dominantes Gewicht ist, um Projektivität von $M(\lambda)$ zu bekommen ([Jan83, Lemma 4.8] oder [Hum08, Proposition 3.8]). Auf Vermamoduln zu einem dominanten Gewicht lässt sich aber auch Aussage 2.4.17.ii übertragen, eine Identifikation von $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(M(\lambda), M)$ mit M_λ (für $M \in \mathcal{O}_\lambda$) findet sich im Beweis zu [Jan83, Lemma 4.8].

Proposition 2.4.19 (Der einfache Quotient $L(\alpha)$ von $M^{(p)}(\alpha)$).

i) $M^{(p)}(\alpha)$ hat genau einen, von p unabhängigen, einfachen Quotienten $=: L(\alpha) \in \mathcal{O}^{(1)}$

ii) Alle einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ haben die Form $L(\alpha)$

iii) $\dim_k M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \le 1$ und damit $\dim_k L(\alpha)_{(\beta)} \le 1$ für alle $\beta \in V(\ker\phi)$

iv) Ist $L(\alpha)_{(\beta)} \neq 0$, so ist $L(\alpha)_{(\beta)} \cong A_{\beta-\alpha}/A_{\beta-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$

v) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $L(\alpha_1) \cong L(\alpha_2)$
- $\mathrm{Supp}\, L(\alpha_1) \cap \mathrm{Supp}\, L(\alpha_2) \neq \emptyset$
- $M^{(p)}(\alpha_1) \cong M^{(p)}(\alpha_2)$

Beweis.

i) $M^{(p)}(\alpha)$ hat genau einen, von p unabhängigen, einfachen Quotienten $=: L(\alpha) \in \mathcal{O}^{(1)}$:
Äquivalenterweise zeigt man, dass es genau einen maximalen echten Untermodul gibt - er besteht aus der Summe aller echten Untermoduln. Von dieser Summe muss gezeigt werden, dass es sich dabei wieder um einen echten Untermodul handelt.
$M^{(p)}(\alpha)$ ist über A von $\overline{1}$ erzeugt, daher ist $U \subset M^{(p)}(\alpha)$ genau dann ein echter Untermodul, wenn $\overline{1} \notin U$ ist. Die $\overline{1}$ lebt im Gewichtsraum $M^{(p)}(\alpha)_{(\alpha)}$, das heißt, U ist genau dann ein echter Untermodul, wenn $U_{(\alpha)} = U \cap M^{(p)}(\alpha)_{(\alpha)}$ die $\overline{1}$ nicht enthält, wenn also $U_{(\alpha)}$ ein echter A_0-Untermodul von $M^{(p)}(\alpha)_{(\alpha)} = A_0/A_0\mathfrak{m}_\alpha^p$ ist. Jedoch ist $A_0/A_0\mathfrak{m}_\alpha^p$ als $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modul Quotient von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p$. $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$ (Von den maximalen Idealen in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ sind gerade diejenigen in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p$ enthalten, die $\mathfrak{m}_\alpha^p$ enthalten. Enthält ein maximales Ideal (allgemein ein Primideal) allerdings die Potenz eines anderen Ideals, so auch schon das Ideal selbst. $\mathfrak{m}_\alpha$ ist also das einzige maximale Ideal in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p$ und jedem Quotienten davon). Die $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Quotientenabbildung

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p \twoheadrightarrow A_0/A_0\mathfrak{m}_\alpha^p$$

ist für $A_0 = \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cdot 1$ ein Ringhomomorphismus, und so ist auch $A_0/A_0\mathfrak{m}_\alpha^p$ ein lokaler Ring. Damit gibt es auch hierin nur genau ein maximales Ideal, bzw. nur genau einen maximalen A_0-Modul. Darin ist für jeden echten Untermodul U auch $U_{(\alpha)}$ enthalten, weswegen die Summe aller Untermoduln ebenfalls darin liegt und insbesondere die $\overline{1}$ nicht enthält. Wir haben damit den einzigen maximalen Untermodul von $M^{(p)}(\alpha)$ konstruiert, und so erhalten wir dessen eindeutigen einfachen Quotienten $L^{(p)}(\alpha)$. Die Unabhängigkeit von p folgt aus der Verkettung der Projektionen

$$M^{(p)}(\alpha) \twoheadrightarrow M^{(1)}(\alpha) \twoheadrightarrow L^{(1)}(\alpha)$$

und der eben bereits gezeigten Tatsache, dass $M^{(p)}(\alpha)$ nur den eindeutig bestimmten einfachen Quotienten $L^{(p)}(\alpha)$ besitzt, demnach ist $L^{(p)}(\alpha) = L^{(1)}(\alpha)$ und wir können den einfachen Kopf stattdessen zu Recht mit $L(\alpha)$ bezeichnen.

ii) Alle einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ haben die Form $L(\alpha)$:
Sei $L \in \mathcal{O}^{(p)}$ einfach. Da L nicht null sein soll, gibt es einen Gewichtsraum $L_{(\alpha)} \neq 0$. Wegen $L_{(\alpha)} = \mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha), L)$ bildet also $M^{(p)}(\alpha)$ surjektiv auf unser L ab. $M^{(p)}(\alpha)$ hat aber nur den einen einfachen Quotienten $L(\alpha)$. Also $L(\alpha) \cong L$.

iii) $\dim_k M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \leq 1$ und damit $\dim_k L(\alpha)_{(\beta)} \leq 1$ für alle $\beta \in V(\ker\phi)$:
Letzteres folgt aus ersterem, weil $L(\alpha)$ Quotient von $M^{(1)}(\alpha)$ ist. $\dim_k M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \leq 1$ gilt, weil wie eben gezeigt $(M^{(1)}(\alpha))_{(\beta)} = A_{\beta-\alpha}/A_{\beta-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$ ist und

$$\begin{aligned} k \;\cong\; (\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\beta) &\twoheadrightarrow A_{\beta-\alpha}/A_{\beta-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha \\ &= (M^{(1)}(\alpha))_{(\beta)}. \end{aligned}$$

iv) Ist $L(\alpha)_{(\beta)} \neq 0$, so ist $L(\alpha)_{(\beta)} \cong A_{\beta-\alpha}/A_{\beta-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$:
$L(\alpha)$ ist der Quotient von $M^{(1)}(\alpha)$ in $\mathcal{O}^{(p)} \subset A$-grmod, und weil $M^{(1)}(\alpha) \twoheadrightarrow L(\alpha)$ graderhaltend ist, schränkt sich die Surjektion auf $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \twoheadrightarrow L(\alpha)_{(\beta)}$ ein. Aus Dimensionsgründen - für die vorangegangene Aussage (iii) haben wir soeben nachgerechnet, dass beide Gewichtsräume dieselbe Dimension haben - muss dies ein k-linearer Isomorphismus gewesen sein. Also ist $A_{\beta-\alpha}/A_{\beta-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha \cong M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \cong L(\alpha)_{(\beta)}$.

v) Man rechnet folgende zwei Äquivalenzen nach:

- $L(\alpha_1) \cong L(\alpha_2) \quad\Leftrightarrow\quad M^{(p)}(\alpha_1) \cong M^{(p)}(\alpha_2)$:
Diese Äquivalenz folgt daraus, dass $M^{(p)}(\alpha)$ in $\mathcal{O}^{(p)}$ eine projektive Decke von $L(\alpha)$ ist: Nach 2.4.17.ii gilt, dass $M^{(p)}(\alpha)$ projektiv ist. Die Einschränkung der Projektion $M^{(p)}(\alpha) \twoheadrightarrow L(\alpha)$ auf einen beliebigen echten Untermodul $U \subset M^{(p)}(\alpha)$ ist aber Null, weil U in dem eindeutig bestimmten maximalen Untermodul von $M^{(p)}(\alpha)$ enthalten sein muss, und damit ist $M^{(p)}(\alpha)$ projektive Decke von $L(\alpha)$. Ist nun $L(\alpha_1) \cong L(\alpha_2)$, so wären sowohl $M^{(p)}(\alpha_1)$ als auch $M^{(p)}(\alpha_2)$ eine projektive Decke von, sagen wir, $L(\alpha_1)$. Projektive Decken sind aber immer bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (wobei man für $\mathcal{O}^{(p)}$ wie in [AF92, Lemma 17.17] argumentieren darf), also schließen wir $M^{(p)}(\alpha_1) \cong M^{(p)}(\alpha_2)$. Andersherum folgt aus $M^{(p)}(\alpha_1) \cong M^{(p)}(\alpha_2)$, dass sagen wir $M^{(p)}(\alpha_1)$ sowohl auf $L(\alpha_1)$ als auch auf $L(\alpha_2)$ projiziert. Nach Teil (i) kann das aber nur eintreten, wenn $L(\alpha_1) \cong L(\alpha_2)$ ist.
- $L(\alpha_1) \cong L(\alpha_2) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Supp}\, L(\alpha_1) \cap \mathrm{Supp}\, L(\alpha_2) \neq \emptyset$:
Die Hinrichtung ist natürlich trivial, und die Rückrichtung bekommt man ganz leicht: Sei α ein Gewicht im Schnitt der beiden Träger. Proposition 2.4.17.i zufolge gibt es dann Abbildungen $M^{(p)}(\alpha) \to L(\alpha_1)$ und $M^{(p)}(\alpha) \to L(\alpha_2)$, die beide nicht null sind und daher sogar surjektiv sein müssen, weil $L(\alpha_1)$ und $L(\alpha_2)$ einfach sind. Beide sind also Quotienten von $M^{(p)}(\alpha)$, aber dessen Quotient ist nach Teil (i) dieser Proposition bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Es folgt $L(\alpha_1) \cong L(\alpha_2)$. ☺

Bemerkung 2.4.20 (Verbindungen zu universell einhüllenden Algebren).
Wie der Modul $M^{(p)}(\alpha)$ einen Vermamodul $M(\lambda)$ imitiert, so entspricht sein einfacher Quotient $L(\alpha) \in \mathcal{O}^{(p)}$ dem einfachen Quotienten $L(\lambda) \in \mathcal{O}$: Hier bestehen wesentliche Gemeinsamkeiten, denn auch für $L(\lambda)$ gilt:

- $M(\lambda)$ hat genau einen einfachen Quotienten $L(\lambda)$ (siehe [Hum08, Theorem 1.2 (f)]).
- Jeder einfache Modul in $\mathcal{O}$ ist isomorph zu einem $L(\lambda)$ (siehe [Hum08, Theorem 1.3]).

Aber es gibt dennoch Unterschiede:

- Die Dimensionen der Gewichtsräume sind für $L(\alpha) \in \mathcal{O}^{(p)}$ deutlich langweiliger (nur 0 oder 1) als die von $L(\lambda) \in \mathcal{O}$ (hier braucht man nämlich selbst für endlichdimensionales $L(\lambda)$ Charakterformeln [Hum78, Kapitel 24]).
- Aus dem Vergleich der Träger von $L(\lambda)$ und $L(\mu)$ lassen sich nicht so viele Rückschlüsse ziehen, ob $L(\lambda) \cong L(\mu)$ gilt, wird nur davon entschieden, ob $\lambda = \mu$ ist (siehe [Hum08, Theorem 1.3]).

Bemerkung 2.4.21. Will man nun die einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ beschreiben, so lässt sich diese Fragestellung mithilfe der letzten Proposition reduzieren:

i) Wir sind natürlich nur bis auf Isomorphie an den einfachen Moduln interessiert. Nach Proposition 2.4.19.ii ist es dafür ausreichend, nur die einfachen Quotienten $L(\alpha)$ von $M^{(p)}(\alpha)$ zu betrachten, weil sie eine vollständige Liste der Isomorphieklassen von einfachen Moduln liefern.

Folgende zwei Eigenschaften der $L(\alpha)$'s legen nahe, dass man sich auf ihren Träger konzentrieren sollte:

ii) In Proposition 2.4.19.v haben wir gesehen, dass zwei einfache Moduln schon isomorph sind, sobald sie sich auch nur ein einziges Gewicht teilen!

iii) Dank der Eindimensionalität der Gewichtsräume ist die Angabe, welche Gewichte auftreten, schon eine interessante Beschreibung des Moduls selbst. Dies hat man in Proposition 2.4.19.v sehen können.

Zuletzt können wir unsere Suche nach Gewichten etwas eingrenzen:

iv) Alle Gewichte von $L(\alpha)$ liegen nach Lemma 2.4.9 in $V(\ker\phi) \subset \mathfrak{t}^*$.

2.4.3 Zwei Relationen zwischen den Gewichten von Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$

Nach der vorangegangenen Bemerkung ist klar, dass wir uns für die Gewichte der $L(\alpha)$'s interessieren. Wir stellen nun zwei Werkzeuge zur leichteren Beschreibung des Trägers von $L(\alpha)$ vor, zuerst drängt sich die Definition der folgenden Äquivalenzrelation auf den Gewichten in $V(\ker\phi)$ auf:

Definition 2.4.22 (Äquivalenzrelation auf $V(\ker\phi) \subset \mathfrak{t}^*$). Seien $\alpha, \beta \in V(\ker\phi)$, dann führe für

$$L(\alpha) \cong L(\beta) \quad (\text{bzw. } \beta \in \operatorname{Supp} L(\alpha))$$

die Äquivalenzrelation

$$\alpha \sim \beta$$

ein.

$L(\alpha)$ ist ein Quotient von $M^{(1)}(\alpha)$, und auch darin waren nach Proposition 2.4.19.iii alle Gewichtsräume eindimensional. Der Träger eines $L(\alpha)$'s kann also auch beschrieben werden, indem man ihn aus dem Träger des $M^{(1)}(\alpha)$ 'ausschneidet'. Dazu muss man zuerst den Träger des eindeutig bestimmten maximalen Untermoduls von $M^{(1)}(\alpha)$ ausfindig machen. Umsetzen lässt sich das, indem man der Frage nachgeht, was das A-Erzeugnis eines einzelnen Gewichtsraums $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ in $M^{(1)}(\alpha)$ ist. Zudem kann man die Zerlegung $A = \bigoplus A_\gamma$ ausnutzen und das Erzeugnis für jedes einzelne A_γ bestimmen. Das motiviert die nächste Definition:

Definition 2.4.23 (Relation auf $\boldsymbol{V(\ker\phi) \subset \mathfrak{t}^*}$). Seien $\alpha, \beta, \gamma \in V(\ker\phi)$, dann schreibe

$$\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma,$$

falls

$$A_{\gamma-\beta} \cdot \Big(M^{(1)}(\alpha)\Big)_{(\beta)} \neq 0$$

ist.

Bemerkung 2.4.24. Da zuvor in Proposition 2.4.19 gezeigt wurde, dass die Gewichtsräume von $M^{(1)}(\alpha)$ alle höchstens eindimensional sind, und weil man aus Lemma 2.4.3 weiß, dass $M^{(1)}(\alpha) = \bigoplus M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ ein $\mathfrak{t}^*$-graduierter Modul ist, könnte man $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ auch mithilfe der Bedingung, dass

$$A_{\gamma-\beta} \cdot \Big(M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}\Big) = \Big(M^{(1)}(\alpha)\Big)_{(\gamma)}$$

sein muss, definieren.

Bemerkung 2.4.25 (Anschauliche Beschreibung von $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$). Was bedeutet also die Relation $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$? Die Frage, für welche γ denn nun $A_{\gamma-\beta} \cdot \big(M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}\big)$ ungleich Null ist, lässt sich zu der Frage umformulieren, welche Gewichtsräume vom β-Gewichtsraum aus durch die A-Wirkung erreichbar sind. Nach Lemma 2.4.3 kann dies - wenn überhaupt - nur durch $A_{\gamma-\beta}$ bewirkt werden. Die Beschreibung eines Untermoduls in $M^{(1)}(\alpha)$ kann auf diese Weise ohne beklagenswerten Informationsverlust auf die Beschreibung seines Trägers heruntergebrochen werden. Dies ist insbesondere bei der Konstruktion eines maximalen Untermoduls und damit des einfachen Quotienten $L(\alpha)$ von Interesse. Dabei haben wir uns aus gutem Grund auf den Fall $p = 1$ beschränkt. Schließlich hat man in Proposition 2.4.19.i gezeigt, dass $L(\alpha)$ nicht von p abhängt. Zugleich weiß man für $p = 1$, dass jeder Gewichtsraum von $M^{(1)}(\alpha)$ höchstens eindimensional ist, das Bild ist also besonders unkompliziert.

Bemerkung 2.4.26. Es gilt:

i) $\sim$ ist in der Tat eine Äquivalenzrelation.

ii) $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ ist reflexiv und transitiv, aber *nicht symmetrisch*: Die Reflexivität ist klar, weil A_0 die 1 enthält, und die Transitivität ergibt sich aus Bemerkung 2.4.24. Wir sehen später anhand des Beispiels der Weylalgebra in 5.5, dass $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ nicht symmetrisch sein muss.

Nun folgen ein paar Grundlagen über das Verhalten von $\sim$ und $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$, die [MVdB98, Lemma 3.1.8] sowie [MVdB98, Lemma 3.1.9] entnommen sind:

Lemma 2.4.27 (Verhalten von $\sim$). Ist $M \in \mathcal{O}^{(p)}$, so ist sein Träger $\mathrm{Supp}\,(M)$ die Vereinigung von Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathrm{Supp}(M)$, also ist $M_{(\alpha)} \neq 0$. Nach Proposition 2.4.17 ist $M_{(\alpha)} = \mathrm{Hom}_A(M^{(p)}(\alpha), M)$, und so gibt es einen Homomorphismus $f : M^{(p)}(\alpha) \to M$, der nicht null ist. Damit erscheint der einfache Kopf $L(\alpha)$ von $M^{(p)}(\alpha)$ als Subquotient von M (bis auf Isomorphie). Jedes $L(\beta)$ mit $\beta \sim \alpha$ ist isomorph zu $L(\alpha)$. Aufgrund der Projektivität von $M^{(p)}(\beta)$ erhält man

$$\begin{tikzcd} L(\beta) \arrow[r, "\cong"] & L(\alpha) \\ M^{(p)}(\beta) \arrow[u, two heads] \arrow[r, dashed, "\exists"] & M^{(p)}(\alpha) \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

und weiter (für $U = f(\text{max. Untermodul von } M^{(p)}(\alpha))$)

$$\begin{tikzcd} L(\beta) \arrow[r, "\cong"] & L(\alpha) \arrow[r, "\overline{f}\neq 0"] & M/U \\ M^{(p)}(\beta) \arrow[u, two heads] \arrow[r, dashed, "\exists"] & M^{(p)}(\alpha) \arrow[u, two heads] \arrow[r, "f"] & M. \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

Wir können dank der Kommutativität dieses Diagramms nichttrivial von $M^{(p)}(\beta)$ nach M abbilden. Wieder nach dem Argument von Proposition 2.4.17 folgt $M_{(\beta)} \neq 0$. Also befindet sich auch jedes β aus der Äquivalenzklasse von α im Träger von M. ☺

Lemma 2.4.28 (Verhalten von $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$). Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V(\ker(\phi))$.

i) $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ ist eine transitive Relation auf $V(\ker\phi)$.

ii) $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ impliziert $\beta, \gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha)$ sowie $\gamma - \beta \in \operatorname{Supp} A$.

iii) $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ gilt genau dann, wenn $A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha} \nsubseteq A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$ ist.

iv)
$$\left\{ \text{Untermoduln von } M^{(1)}(\alpha) \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \text{Unter } \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \text{ abgeschlossene Teilmengen von } \operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha) \right\}$$
$$U \mapsto \operatorname{Supp} U$$

v) $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ und $\gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta$ gelten genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ und $\beta, \gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha)$ gilt.

vi) $\beta \sim \gamma$ gilt genau dann, wenn $A_{\beta-\gamma}A_{\gamma-\beta} \nsubseteq \mathfrak{m}_\beta A_0$ ist.

Beweis. i) $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ ist eine transitive Relation auf $V(\ker\phi)$:
Zu zeigen: $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \delta$, dann ist auch $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \delta$. Dies bedeutet nach obigem Kommentar, dass

$$A_{\gamma-\beta} \cdot \left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\beta)} = \left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\gamma)} \neq 0$$

sowie

$$A_{\delta-\gamma} \cdot \left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\gamma)} = \left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\delta)} \neq 0$$

sind. Nach der ersten Bedingung ist es möglich, $a \in A_{\gamma-\beta}$ und $m \in \left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\beta)}$ mit $am \neq 0$ zu wählen. Da die Gewichtsräume nach Proposition 2.4.19.iii alle eindimensional sind, ist der k-Span von am gerade der Gewichtsraum $\left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\gamma)}$. Damit ist auch $a'(am) \neq 0$ für ein $a' \in A_{\delta-\gamma}$ wegen der zweiten Bedingung. $a'a$ lebt in $A_{\delta-\gamma} \cdot A_{\gamma-\beta} \subset A_{\delta-\beta}$, und damit ist $(a'a)m \in A_{\delta-\beta} \cdot \left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\beta)} \neq 0$. Dies ist nach Definition äquivalent zu $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \delta$.

ii) $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ impliziert $\beta, \gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha)$ sowie $\gamma - \beta \in \operatorname{Supp} A$:
$\beta, \gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha)$ muss stimmen, denn sonst wären die Gewichtsräume $\left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\beta)}$ und $\left(M^{(1)}(\alpha)\right)_{(\gamma)}$ von vornherein Null gewesen. Ebenso erklärt sich $\gamma - \beta \in \operatorname{Supp} A$, ansonsten wäre $A_{\gamma-\beta}$ Null gewesen.

iii) $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ gilt genau dann, wenn $A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha} \nsubseteq A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$ ist: Nach Definition ist $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ genau dann, wenn $A_{\gamma-\beta} \cdot \big(M^{(1)}(\alpha)\big)_{(\beta)} \neq 0$ ist. Ausgeschrieben unter Verwendung obiger Bemerkung ist das gerade

$$A_{\gamma-\beta} \cdot (A_{\beta-\alpha}/A_{\beta-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha^p) \;=\; A_{\gamma-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha^p \;\neq\; 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha} \nsubseteq A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$ ist.

iv) $\{$ Untermoduln von $M^{(1)}(\alpha)\} \;\leftrightarrow\; \{$Unter $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ abg. Teilmengen von Supp $M^{(1)}(\alpha)\}$:
Diese Korrespondenz wird dadurch gegeben, dass einerseits ein Untermodul von $M^{(1)}(\alpha)$ seinem Träger zugeordnet wird, und andererseits eine Teilmenge von Supp $M^{(1)}(\alpha)$ auf die Summe der entsprechenden Gewichtsräume in $M^{(1)}(\alpha)$ abgebildet wird. Dies ist wohldefiniert, weil es äquivalent ist, A-Untermodul von $M^{(1)}(\alpha)$ zu sein und einen unter $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ abgeschlossenen Träger zu besitzen. Es ist klar, dass Hin- und Rückrichtung zueinander invers sind, denn weil die Gewichtsräume in $M^{(1)}(\alpha)$ alle eindimensional sind, ist ein Untermodul schon eindeutig durch die auftretenden Gewichte bestimmt.

v) $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ und $\gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta$ genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ und $\beta, \gamma \in$ Supp $M^{(1)}(\alpha)$:
Sei zunächst $\beta \sim \gamma$. Nach 2.4.27 ist γ daher ein Gewicht von jedem Modul, für den auch β ein Gewicht ist, und umgekehrt. Dies gilt insbesondere für Untermoduln von $M^{(1)}(\alpha)$. In $A \cdot M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ lebt aber nur dann etwas im Gewichtsraum zu γ, wenn $A_{\gamma-\beta} \cdot M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \neq 0$ war, wenn also $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ gilt. Genauso gilt dann auch $\gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta$.

Sei jetzt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ und $\gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta$ vorausgesetzt. Daraus folgt direkt, dass $\beta, \gamma \in$ Supp $M^{(1)}(\alpha)$ gilt. Also sind die entsprechenden Gewichtsräume beide nicht null, und wir können Homomorphismen

$$M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} = \mathrm{Hom}_A(M^{(1)}(\beta), M^{(1)}(\alpha)) \;\ni\; f \neq 0$$

und

$$M^{(1)}(\alpha)_{(\gamma)} = \mathrm{Hom}_A(M^{(1)}(\gamma), M^{(1)}(\alpha)) \;\ni\; g \neq 0$$

wählen. Deren Bilder in $M^{(1)}(\alpha)$ stimmen überein: Es gilt $\mathrm{im}(f) = A \cdot f(\overline{1})$ und $\mathrm{im}(g) = A \cdot g(\overline{1})$, und wie im Beweis von Proposition 2.4.17.i gesehen, ist $f(\overline{1}) \in M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ und $g(\overline{1}) \in M^{(1)}(\alpha)_{(\gamma)}$. Zugleich bedeutet $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$, dass

$$A_{\gamma-\beta} \cdot \Big(M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}\Big) = \Big(M^{(1)}(\alpha)\Big)_{(\gamma)},$$

weswegen es ein $a \in A$ mit $a \cdot f(\overline{1}) = g(\overline{1})$ gibt. Daraus folgt

$$\mathrm{im}(f) = A \cdot f(\overline{1}) \supset A \cdot a \cdot f(\overline{1}) = A \cdot g(\overline{1}) = \mathrm{im}(g),$$

und wegen $\gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta$ bekommt man auf die gleiche Weise $\mathrm{im}(g) \supset \mathrm{im}(f)$. Nun haben wir Quotientenabbildungen

$$M^{(1)}(\beta) \overset{f}{\twoheadrightarrow} \mathrm{im}(f) \twoheadrightarrow L(\beta) \;=\; \text{einfacher Kopf von } M^{(1)}(\beta) \text{ bzw. } \mathrm{im}(f)$$

sowie

$$M^{(1)}(\gamma) \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathrm{im}(g) \twoheadrightarrow L(\gamma) \;=\; \text{einfacher Kopf von } M^{(1)}(\gamma) \text{ bzw. } \mathrm{im}(g).$$

Weil $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(g)$ ist, hätte $M^{(1)}(\beta)$ damit zwei einfache Köpfe. Nach Proposition 2.4.19 gibt es aber nur genau einen einfachen Quotienten von jedem $M^{(1)}(\beta)$, sodass $L(\beta) \cong L(\gamma)$ folgt, was wir mit $\beta \sim \gamma$ bezeichnet hatten.

vi) $\beta \sim \gamma$ genau dann, wenn $A_{\beta-\gamma}A_{\gamma-\beta} \not\subseteq \mathfrak{m}_\beta A_0$:
Dies ist eine Zusammenfassung von mehreren Aussagen dieser Proposition. Es ist $\beta \sim \gamma$ (und damit trivialerweise $\beta, \gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\beta)$) genau dann, wenn $\beta \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \gamma$ und $\gamma \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \beta$. Äquivalent zu Letzterem ist nach Teil (iii) dieser Proposition die Formulierung

$$A_{\beta-\gamma}A_{\gamma-\beta} \not\subseteq A_{\beta-\beta}\mathfrak{m}_\beta.$$

Die Hinrichtung unserer gewünschten Aussage folgt nun zusammen mit

$$A_{\beta-\beta}\mathfrak{m}_\beta = A_0\mathfrak{m}_\beta = \mathfrak{m}_\beta A_0,$$

wobei verwendet wird, dass A_0 mit allem aus $\phi(\mathfrak{t})$ und damit auch mit $\phi(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t}))$ vertauscht. Die Rückrichtung geht ebenso schnell: Aus $A_{\beta-\gamma}A_{\gamma-\beta} \not\subseteq \mathfrak{m}_\beta A_0$ bekommen wir $\gamma \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \beta$ zurück. Daraus geht hervor, dass $\gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\beta)$ war, und weil $M^{(1)}(\beta)$ von $M^{(1)}(\beta)_{(\beta)}$ erzeugt wird (siehe Korollar 2.4.16), erhält man auch $\beta \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \gamma$. Daraus folgt schließlich wieder $\beta \sim \gamma$. ☺

Der vorletzte Punkt, dass $\beta \sim \gamma$ genau dann gilt, wenn insbesondere $\beta \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \gamma$ und $\gamma \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \beta$ erfüllt sind, beleuchtet das Verhältnis von $\sim$ und $\underset{\beta}{\rightsquigarrow}$: Es wird klarer, wenn man für $\sim$ nicht die ursprüngliche Definition ($L(\beta) \cong L(\gamma)$) heranzieht, sondern die, dass $\gamma \in \operatorname{Supp} L(\beta)$ ist. Bei der Konstruktion von $L(\beta)$ bediente man sich des Moduls $M^{(1)}(\beta)$ und teilte dessen maximalen Untermodul raus. Der gesamte Modul wird von $M^{(1)}(\beta)_{(\beta)}$ erzeugt, also gilt sicherlich für alle Gewichte γ von $M^{(1)}(\beta)$ und damit alle potentiellen Gewichte von $L(\beta)$, dass $\beta \underset{\beta}{\rightsquigarrow} \gamma$ gewesen sein muss. Die entscheidende Frage ist also eher, wann man *umgekehrt* vom Gewichtsraum zu γ wieder zurück in den alles erzeugenden Gewichtsraum $M^{(1)}(\beta)_{(\beta)}$ laufen kann. Ist dies nicht möglich, so befand man sich im (maximalen) Untermodul, γ wird beim Übergang zum Quotienten abgeschnitten und taucht als Gewicht von $L(\beta)$ nicht mehr auf. Kommt man dagegen von γ wieder zu β, so kann es nicht abgeschnitten werden und bleibt dem $L(\beta)$ erhalten.
Beispiele dazu folgen in Abschnitt 5.5.

3 Die Beziehung zwischen dem Annihilator $J(\alpha)$ und dem Träger $\langle\alpha\rangle$ eines einfachen Moduls $L(\alpha)$ in $\mathcal{O}^{(p)}$

3.1 Allgemeines zu Annihilatoren und primitiven Idealen

Der Begriff des Annihilators ist bereits gefallen, aber dieser Abschnitt widmet sich dem Thema nochmal ausführlich. Insbesondere wird erläutert, warum der Annihilator eines einfachen Moduls fast so interessant wie der Modul selbst ist.

3.1.1 Annihilatoren

Zunächst einmal folgen ein paar ganz allgemeine Feststellungen für beliebige Moduln über beliebigen (insbesondere nichtkommutativen) Algebren. Wir wiederholen die Definition des Annihilators:

Definition 3.1.1 (Annihilator eines Moduls). Der Annihilator eines Linksmoduls M über der Algebra A ist definiert als

$$\mathrm{Ann}_A(M) \ := \ \{a \in A \mid a_\bullet M = 0\} \ \subset A.$$

Lemma 3.1.2. Der Annihilator $J := \mathrm{Ann}_A(M)$ ist ein zweiseitiges Ideal von A.

Beweis. Seien $a, b \in A$. Wegen

$$(a \cdot J \cdot b)_\bullet M = a_\bullet (J_\bullet (b_\bullet M)) \subset a_\bullet (J_\bullet M) = a_\bullet (0) = 0$$

annihiliert auch $a \cdot J \cdot b$ den Modul M, also $a \cdot J \cdot b \subset J$. ☺

Folgende Bemerkung erläutert, warum der Annihilator eines einfachen Moduls ein wichtiges Hilfsmittel ist, den einfachen Modul selbst zu beschreiben - im nichtkommutativen Fall jedoch auch nicht überschätzt werden darf:

Bemerkung 3.1.3 (Vergleich des kommutativen und des nichtkommutativen Falls). Betrachte einen einfachen Links-A-Modul L. Wir beschreiben seinen Annihilator für den Fall, dass A kommutativ ist, sowie den Fall, dass A nicht kommutativ ist.

- L ist in jedem Fall zwangsläufig isomorph zu $A/\mathfrak{m}$ für ein maximales Linksideal $\mathfrak{m} \subset A$ (Man beachte die notationelle Fallgrube - $\mathfrak{m}$ hat nichts mit den maximalen Idealen aus $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ zu tun): Erstens wird L von einem beliebigen Element $l \in L \setminus \{0\}$ erzeugt,

$$\begin{aligned} A &\twoheadrightarrow L \\ a &\mapsto a_\bullet l, \end{aligned}$$

  und diesbezüglich resultieren Linksideale $\mathfrak{I} \subset A$, die den Kern enthalten, in echten Untermoduln $\mathfrak{I}_\bullet l$ von L, die natürlich allesamt Null gewesen sein müssen. Der Kern muss daher ein maximales Linksideal $\mathfrak{m}$ gewesen sein.

- Unabhängig von Kommutativität gilt stets $\mathrm{Ann}_A(L) \subset \mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ann}_A(L) &= \{a \in A \mid a_\bullet L = 0\} \\ &= \{a \in A \mid a_\bullet A/\mathfrak{m} = 0\} \\ &= \{a \in A \mid a \cdot A \subset \mathfrak{m}\} \\ &\subset \{a \in A \mid a \cdot 1 \subset \mathfrak{m}\} \\ &= \mathfrak{m} \end{aligned}$$

- Ist A kommutativ, so gilt sogar $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}_A(L)$, und der einfache Modul lässt sich bis auf Isomorphie durch seinen Annihilator beschreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &\subset \{a \in A \mid A \cdot a \subset \mathfrak{m}\}\\ &= \{a \in A \mid a \cdot A \subset \mathfrak{m}\}\\ &= \mathrm{Ann}_A(L)\end{aligned}$$

- Ist A jedoch nicht kommutativ, so kann dieser Schritt nicht getan werden (und es wäre auch seltsam, da $\mathfrak{m}$ nur ein Linksideal zu sein braucht, $\mathrm{Ann}_A(L)$ jedoch zweiseitiges Ideal ist). Dennoch sind die Annihilatoren bei der Beschreibung einfacher Moduln immer noch von Interesse.

3.1.2 Primitive Ideale

Weil die Annihilatoren einfacher Moduln also von besonderem Interesse sind, bekommen sie einen eigenen Namen:

Definition 3.1.4 (Primitives Ideal). Ein Ideal $\mathfrak{J} \subset A$ heißt primitiv, wenn es der Annihilator eines einfachen Links-A-Moduls ist.

Später betrachten wir zudem Quotienten des Rings A nach einem primitiven Ideal:

Definition 3.1.5 (Primitiver Quotient). Ist $\mathfrak{J} \subset A$ primitives Ideal, so bezeichnet man $A/\mathfrak{J}$ als primitiven Quotienten.

So ein primitiver Quotient hat dann natürlich einen treuen einfachen Linksmodul:

Definition 3.1.6 (Primitiver Ring). A heißt links-primitiv, falls A einen treuen einfachen Linksmodul hat [Lam91, Kapitel 11].

3.2 Die Beschreibung primitiver Ideale in der Algebra A mittels abgeschlossener Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}$ in $\mathfrak{t}^*$

Zur Erinnerung: Wir wollen etwas über die einfachen Moduln von A-grmod aussagen. Bislang haben wir zwei verschiedene Herangehensweisen an diese Fragestellung gesehen:

- Im Kapitel zuvor haben wir die Technik vorgestellt, die einfachen Moduln $L(\alpha)$ mithilfe ihrer Träger zu beschreiben - allerdings ist das nur in der Unterkategorie $\mathcal{O}^{(p)} \subset A$-grmod zufriedenstellend, da dort die $L(\alpha)$'s eine Liste aller einfachen Moduln bilden. In A-grmod mag es noch viel mehr Einfache geben!

- Soeben haben wir jedoch festgestellt, dass man anstelle der Einfachen selbst ihre Annihilatoren studieren kann, auch wenn das im nichtkommutativen Fall mit Informationsverlust verbunden ist. Trotzdem erhofft man sich wenigstens dafür interessante Resultate.

Es liegt nun aber auf der Hand, diese beiden Ansätze zu verbinden. Erstaunlicherweise wird man am Ende dieses Abschnitts feststellen, dass man *alle primitiven Ideale* für A-grmod bekommt, wenn man sich nur diejenigen für $\mathcal{O}^{(p)}$ anguckt - und die wiederum lassen sich über die Träger der Einfachen bestimmen.
Aber nicht nur das: Bislang wurde alles aus algebraischen Augen betrachtet und der Träger war einfach nur eine Ansammlung von Gewichten, bald erhält man jedoch für die Träger eine wahrlich schöne geometrische Beschreibung.

3.2.1 Die primitiven Ideale $J(\alpha)$ von A

Zurück zu unserer Algebra $A = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta$ und den einfachen A-Moduln $L(\alpha)$. Wir legen eine Notation fest:

Definition 3.2.1 (Der Annihilator von $L(\alpha)$). Wir setzen

$$J(\alpha) \;:=\; \mathrm{Ann}_A(L(\alpha)) \;:=\; \{a \in A \mid a_\bullet L(\alpha) = 0\} \;\subset A.$$

Lemma 3.2.2. Es gilt

$$J(\alpha) = J(\alpha) \cap \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} J(\alpha)_\beta.$$

Beweis. Bereits in 2.4.13 hat man erkannt, dass zweiseitige Ideale auf diese Weise die Gewichtsraumzerlegung der Algebra A erben. Zudem haben wir in Lemma 3.1.2 gesehen, dass der Annihilator tatsächlich stets ein zweiseitiges Ideal ist. ☺

Der Annihilator ist damit ein homogenes Ideal im Sinne von Definition 2.1.8.

3.2.2 Der Träger eines einfachen Moduls - aufgefasst als Region $\langle\alpha\rangle$ in $\mathfrak{t}^*$

Der Wechsel von der algebraischen zur geometrischen Perspektive bringt eine neue Notation für einen guten alten Bekannten mit sich:

Definition 3.2.3 (Die Regionen in $V(\ker(\phi))$). Sei $\alpha \in V(\ker\phi)$, dann bezeichne die Äquivalenzklasse von α unter $\sim$ mit

$$\langle\alpha\rangle \subset V(\ker(\phi)) \subset \mathfrak{t}^*.$$

Bemerkung 3.2.4. Es gilt $\langle\alpha\rangle = \mathrm{Supp}\, L(\alpha)$.

Bemerkung 3.2.5. Wir möchten in Zukunft den Zariski-Abschluss $\overline{\langle\alpha\rangle}$ von $\langle\alpha\rangle$ in $V(\ker(\phi))$ betrachten: Er stimmt mit dem Zariski-Abschluss in ganz $\mathfrak{t}^* = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$ überein, da $V(\ker(\phi)) \subset \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$ nach Definition selber abgeschlossen ist.

An dieser Stelle mag es etwas seltsam erscheinen, dass man den Träger - bisher noch ohne geometrische Beschreibung - Zariski-abschließt, doch wenn in den späteren Kapiteln eine geometrische Beschreibung nachgeliefert wird, erhält dies nachträglich einen Sinn. Vorerst belassen wir es bei der Bemerkung, dass es sich bei $\langle\alpha\rangle$ immerhin um Punkte in $\mathfrak{t}^* \cong k^n$ handelt, und bleiben ansonsten gedanklich auf der algebraischen Seite, wenn wir von $\langle\alpha\rangle$ und $\overline{\langle\alpha\rangle}$ sprechen.

Bemerkung 3.2.6 (Das Radikal eines Ideals). Wir erinnern nochmal kurz an Bemerkung 2.3.4, dass für Ideale $\mathfrak{I} \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$

$$I(V(\mathfrak{I})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{I})$$

sowie für $V_1, V_2 \subset \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}))$

$$I(V_1 \cap V_2) = \mathrm{rad}(I(V_1) + I(V_2))$$

gilt. Sind aber V_1 und V_2 endliche Mengen, so kann man sogar

$$I(V_1 \cap V_2) = I(V_1) + I(V_2)$$

nachweisen: Das Besondere daran ist die Inklusion $I(V_1 \cap V_2) \subset I(V_1) + I(V_2)$, denn die andere Richtung ist wegen $I(V_1 \cap V_2) = \mathrm{rad}(I(V_1) + I(V_2)) \supset I(V_1) + I(V_2)$ ohnehin erfüllt. Dabei kommt es darauf an, dass man für zwei endliche disjunkte Teilmengen $M, N \subset \mathrm{Spec}(R)$ schon folgern kann, dass $I(M)+I(N)=R$ gilt, wie wir gleich sehen. Dies kann man auf $V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)$ und $V_2 \setminus (V_1 \cap V_2)$ anwenden:

$$1 = h_1 + h_2 \in I(V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)) + I(V_2 \setminus (V_1 \cap V_2)),$$

also gilt für $f \in I(V_1 \cap V_2)$, dass

$$\begin{array}{rcrr} f = f \cdot 1 = & & f \cdot h_1 + & f \cdot h_2 \\ & \in & I(V_1 \cap V_2) \cdot I(V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)) + & I(V_1 \cap V_2) \cdot I(V_2 \setminus (V_1 \cap V_2)) \\ & \subset & I(V_1 \cap V_2) \cap I(V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)) + & I(V_1 \cap V_2) \cap I(V_2 \setminus (V_1 \cap V_2)) \\ & = & I(V_1 \cap V_2 \ \cup \ V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)) + & I(V_1 \cap V_2 \cup \ V_2 \setminus (V_1 \cap V_2)) \\ & = & I(V_1) + & I(V_2), \end{array}$$

wie gewünscht. Angenommen, für unsere zwei endlichen disjunkten Teilmengen $M, N \subset \mathrm{Spec}(R)$ wäre $I(M)+I(N)=R$ falsch. Dann gäbe es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_x \subset R$, sodass

$$\bigcap_{m \in M} \mathfrak{m}_m + \bigcap_{n \in N} \mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_x$$

gelten würde, und damit auch

$$\begin{aligned} \{x\} = V(\mathfrak{m}_x) &\subset V\left(\bigcap_{m \in M} \mathfrak{m}_m + \bigcap_{n \in N} \mathfrak{m}_n\right) \\ &= V\left(\bigcap_{m \in M} \mathfrak{m}_m\right) \cap V\left(\bigcap_{n \in N} \mathfrak{m}_n\right) \\ &= \left(\bigcup_{m \in M} V(\mathfrak{m}_m)\right) \cap \left(\bigcup_{n \in N} V(\mathfrak{m}_n)\right) \\ &= M \cap N \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

Widerspruch.

3.2.3 EXKURS: Prime und semiprime Ringe

Wir brauchen gleich die Begriffe 'prim' und 'semiprim'. Hier also eine kleine Einführung dazu. Wir orientieren uns dabei an [Lam91, Kapitel 10]. Sei R wieder ein möglicherweise nichtkommutativer Ring. Viele Definitionen für kommutative Ringe, wie beispielsweise die eines Primideals, könnte man einfach elementweise auf nichtkommutative Ringe übertragen - man kann die Definitonen aber auch über (stets zweiseitige) Ideale formulieren und damit verallgemeinern. Für Primideale sieht das dann beispielsweise folgendermaßen aus:

Definition 3.2.7 (Primideal). Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt prim, falls für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ folgt, dass $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ ist.

Bemerkung 3.2.8. Ist ein Ideal primitiv, so ist es auch schon prim: Nimmt man $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathrm{Ann}_R(L)$ an, und liegt $\mathfrak{b}$ nicht schon in $\mathrm{Ann}_R(L)$, so gilt $\mathfrak{b}_\bullet L = L$, weil L einfach war. Dann rechnet man nach, dass

$$\mathfrak{a}_\bullet L = \mathfrak{a}_\bullet(\mathfrak{b}_\bullet L) \subset \mathrm{Ann}_R(L)_\bullet L = 0$$

ist, womit $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}_R(L)$ bewiesen ist.

Definition 3.2.9 (Semiprimes Ideal). Ein Ideal $\mathfrak{s} \subset R$ heißt semiprim, falls für alle Ideale $\mathfrak{a} \subset R$ mit $\mathfrak{a}^2 \subset \mathfrak{s}$ folgt, dass $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ ist.

Diese Definition verallgemeinert dagegen das Konzept von Idealen, die ihrem eigenen Radikal entsprechen. Untermauert wird dies durch folgende Bemerkung:

Bemerkung 3.2.10. In der kommutativen Welt ist ein Ideal genau dann sein eigenes Radikal, wenn es sich als Schnitt von Primidealen schreiben lässt. Dies kann unverändert in die nichtkommutative Welt übertragen werden: Es ist $\mathfrak{s}$ semiprim genau dann, wenn $\mathfrak{s} = \bigcap \mathfrak{p}$ Schnitt von (geeigneten) Primidealen $\mathfrak{p}$ ist (vergleiche [Lam91, Theorem 10.11]).

Weiter geht's mit den Verallgemeinerungen:

Definition 3.2.11. Der Ring R heißt prim, sofern das Nullideal (0) darin prim ist.

Dies soll natürlich herkömmliche Regularität nachbauen!

Definition 3.2.12. Der Ring R heißt semiprim, sofern das Nullideal (0) darin semiprim ist.

Dies imitiert 'reduzierte Ringe', also solche ohne nilpotente Elemente (außer der 0).
Folgende praktische Schnellübersicht über die versammelten Ringe sei hier aus [Lam91] wiedergegeben:

Bemerkung 3.2.13.

- Reduzierter Ring (kommutativ): $a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ (keine nilpotenten Elemente außer 0)
- Reduzierter Ring (nichtkommutativ): $a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ (keine nilpotenten Elemente außer 0)
- Semiprimer Ring: $\mathfrak{a}^2 \subset (0) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a} = (0)$
- Integritätsring (kommutativ): $ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$ (keine Nullteiler)
- Integritätsring (nichtkommutativ): $ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$ (Keine Rechts- oder Linksnullteiler)
- Primer Ring: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (0) \ \Rightarrow \mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{b} = (0)$
- Körper: Einheiten$(R) = R \setminus 0$
- Divisionsring: Einheiten$(R) = R \setminus 0$
- Primitiver Ring: besitzt einen treuen einfachen Linksmodul

Insgesamt hängen die verschiedenen Begriffe wie folgt zusammen:

komm. Ringe		nichtkomm. Ringe (Elementw. verallg.)		nichtkomm. Ringe (verallg. via Ideale)
komm. reduzierte Ringe	$\subset$	reduzierte Ringe	$\subset$	semiprime Ringe
$\cup$		$\cup$		$\cup$
Integritätsringe	$\subset$	nichtkomm. Int'ringe	$\subset$	prime Ringe
$\cup$		$\cup$		$\cup$
Körper	$\subset$	Divisionsringe	$\subset$	primitive Ringe

3.2.4 Die Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen $J(\alpha)$ und $\overline{\langle\alpha\rangle}$

Man erinnere sich an Lemma 3.2.2, dass $J(\alpha) = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} J(\alpha)_\beta$ mit $J(\alpha)_\beta = J(\alpha) \cap A_\beta$ gilt.

Proposition 3.2.14 (Beschreibung von $\boldsymbol{J(\alpha)}$). Wir können $J(\alpha)_\beta$ ein Ideal $I(\alpha)_\beta$ in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ zuordnen, sodass

$$J(\alpha)_\beta = \phi(I(\alpha)_\beta) \cdot u_\beta \;\subset\; \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cdot u_\beta = A_\beta$$

gilt, wobei u_β der Erzeuger des Gewichtsraums A_β aus Bedingung (A2) ist. Damit erhält man

i) $J(\alpha)_0$ ist semiprim.

ii) $V(I(\alpha)_0) = \overline{\langle\alpha\rangle}$

iii) Wenn $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ für alle $\beta\in\mathrm{Supp}\,A$ erfüllt ist, dann gilt $J(\alpha)_\beta = J(\alpha)_0 \cdot A_\beta + A_\beta \cdot J(\alpha)_0$ für alle $\beta \in \mathrm{Supp}\,A$.

iv) Wenn $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ für alle $\beta\in\mathrm{Supp}\,A$ erfüllt ist, dann wird $J(\alpha)$ in Grad 0 erzeugt.

Beweis. Zunächst ein paar vorbereitende Umformungen, wir schreiben die Gewichtsräume $J(\alpha)_\beta$ des Annihilators ein wenig um:

$$\begin{aligned}
J(\alpha)_\beta &= \{a\in A_\beta \mid a_\bullet L(\alpha) = 0\}\\
&= \{a\in A_\beta \mid a_\bullet L(\alpha)_{(\gamma)} = 0 \quad \forall\gamma\in\mathfrak{t}^*\},\\
&\quad\text{denn jeder einzelne Gewichtsraum von } L(\alpha) \text{ muss annulliert werden,}\\
&= \{a\in A_\beta \mid a_\bullet L(\alpha)_{(\gamma)} = 0 \quad \forall\gamma\in\langle\alpha\rangle\cap(\langle\alpha\rangle-\beta)\},\\
&\quad\text{denn wenn } \gamma \text{ und } \gamma+\beta \text{ nicht im Träger von } L(\alpha) \text{ liegen, ist das Produkt ohnehin 0,}\\
&= \{\phi(d)u_\beta \mid d\in\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \text{ und } \phi(d)u_{\beta\bullet} L(\alpha)_{(\gamma)} = 0 \quad \forall\gamma\in\langle\alpha\rangle\cap(\langle\alpha\rangle-\beta)\},\\
&\quad\text{denn jedes Element aus } A_\beta \text{ ist nach (A2) von dieser Form.}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Bedingung $\phi(d)u_{\beta\bullet} L(\alpha)_{(\gamma)} = 0$ vereinfachen: $L(\alpha)$ ist ein $\mathfrak{t}^*$-graduierter Modul, also gilt die Inklusion $u_{\beta\bullet} L(\alpha)_{(\gamma)} \subset L(\alpha)_{(\beta+\gamma)}$. Für $\gamma\in\langle\alpha\rangle\cap(\langle\alpha\rangle-\beta)$ gilt aber sogar Gleichheit: Für so ein γ ist sowohl $L(\alpha)_{(\gamma)} \neq 0$ als auch $L(\alpha)_{(\gamma+\beta)} \neq 0$. $A_\bullet L(\alpha)_{(\gamma)}$ wäre ein echter Untermodul von $L(\alpha)$, wenn $u_{\beta\bullet} L(\alpha)_{(\gamma)} \subsetneq L(\alpha)_{(\beta+\gamma)}$ gelten würde, da in diesem Fall $L(\alpha)_{(\beta+\gamma)} \not\subset A_{\beta\bullet} L(\alpha)_{(\gamma)}$ und damit aus Gewichtsgründen auch $L(\alpha)_{(\beta+\gamma)} \not\subset A_\bullet L(\alpha)_{(\gamma)}$ wäre. Weil $L(\alpha)$ aber einfach ist, folgt

$$u_{\beta\bullet} L(\alpha)_{(\gamma)} = L(\alpha)_{(\beta+\gamma)}.$$

Nun erinnere man sich daran, dass laut Proposition 2.4.19.iv $L(\alpha)_{(\gamma+\beta)} \cong A_{\beta+\gamma-\alpha}/A_{\beta+\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$ war. Also gehen die Umformungen von $J(\alpha)_\beta$ weiter:

$$\begin{aligned}
J(\alpha)_\beta &= \{\phi(d)u_\beta \mid \phi(d)L(\alpha)_{(\beta+\gamma)} = 0 \quad \forall\gamma\in\langle\alpha\rangle\cap(\langle\alpha\rangle-\beta)\}\\
&= \{\phi(d)u_\beta \mid \phi(d)A_{\beta+\gamma-\alpha} \subset A_{\beta+\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha \quad \forall\gamma\in\langle\alpha\rangle\cap(\langle\alpha\rangle-\beta)\}\\
&= \{\phi(d)u_\beta \mid d\in I(\alpha)_\beta\},
\end{aligned}$$

wobei $I(\alpha)_\beta$ das Urbild von $J(\alpha)_\beta$ unter $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \overset{\phi(-)\cdot u_\beta}{\twoheadrightarrow} A_\beta$ ist,

$$\begin{aligned}
I(\alpha)_\beta &:= \{d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \mid \phi(d)A_{\beta+\gamma-\alpha} \subset A_{\beta+\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha \quad \forall \gamma \in \langle\alpha\rangle \cap (\langle\alpha\rangle - \beta)\} \\
&= \{d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \mid \phi(d)A_{\sigma-\alpha} \subset A_{\sigma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha \quad \forall \sigma \in (\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle\} \\
&= \{d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \mid d \in \mathfrak{m}_\sigma \ \forall \sigma \in (\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle\}, \\
&\quad \text{nach Lemma 2.4.13.viii in Kombination damit, dass } \mathfrak{m}_\sigma \text{ maximal ist,} \\
&= \bigcap_{\sigma \in (\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle} \mathfrak{m}_\sigma \\
&= I((\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle).
\end{aligned}$$

Damit ist $V(I(\alpha)_\beta) = \overline{(\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle}$. Dies impliziert die Proposition:

i) $J(\alpha)_0$ ist ein semiprimes Ideal in A_0:
Zunächst ist es wirklich ein Ideal in A_0, weil man sowohl $A_0 \cdot J(\alpha)_0 \subset J(\alpha)$ hat (weil der Annihilator $J(\alpha)$ ein Ideal in A ist), als auch $A_0 \cdot J(\alpha)_0 \subset A_0$ gilt (aus Gradgründen). Somit folgt $A_0 \cdot J(\alpha)_0 \subset J(\alpha)_0$.

Angenommen, wir haben ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A_0$ mit $\mathfrak{a}^2 \subset J(\alpha)_0$. Um zu sehen, dass $\mathfrak{a} \subset J(\alpha)_0$ liegt, ziehen wir die Frage auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ zurück: Dies funktioniert via

$$\begin{array}{c}
\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \xrightarrow{\phi(-)\cdot 1} \!\!\!\!\rightarrow A_0 \\[2em]
I(\alpha)_0 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow J(\alpha)_0,
\end{array}$$

nachdem wir weiter oben im Beweis festgestellt haben, dass $I(\alpha)_0$ das Urbild von $J(\alpha)_\beta$ unter jener Abbildung ist.

$$\begin{gathered}
\phi^{-1}(\mathfrak{a}^2) \subset I(\alpha)_0, \\
\text{also } \phi^{-1}(\mathfrak{a})^2 \subset I(\alpha)_0,
\end{gathered}$$

aber nun ist $I(\alpha)_0$ selber ein semiprimes Ideal in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$: Nun haben wir aber in Bemerkung 3.2.10 festgestellt, dass semiprime Ideale genau die Radikalideale sind, und soeben haben wir nachgerechnet, dass $I(\alpha)_0) = I(\langle\alpha\rangle)$ und damit sein eigenes Radikal ist. Es folgt

$$\phi^{-1}(\mathfrak{a}) \subset I(\alpha)_0,$$

und wenn wir diese Inklusion mit ϕ nun wieder nach A_0 transportieren, erhalten wir in der Tat

$$\mathfrak{a} \subset J(\alpha)_0.$$

ii) $V(I(\alpha)_0) = \overline{\langle\alpha\rangle}$:
Setze $\beta = 0$ ein.

iii) Wenn $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle + \beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ für alle $\beta \in \mathrm{Supp}\, A$,
dann gilt $J(\alpha)_\beta = J(\alpha)_0 \cdot A_\beta + A_\beta \cdot J(\alpha)_0$ für alle $\beta \in \mathrm{Supp}\, A$:

$$\begin{aligned}
J(\alpha)_\beta &= \phi(I(\alpha)_\beta)u_\beta \\
&= \phi\left(I\left((\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle\right)\right)u_\beta \\
&= \phi\left(I\left(\overline{\langle\alpha\rangle + \beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)\right)u_\beta \\
&= \phi\left(I\left(\overline{\langle\alpha\rangle + \beta}\right)\right)u_\beta \ + \ \phi\left(I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)\right)u_\beta \\
&= \phi\left(I\left(\overline{\langle\alpha\rangle + \beta}\right)\right)A_\beta \ + \ \phi\left(I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)\right)A_\beta.
\end{aligned}$$

Knöpfen wir uns den ersten Summanden vor: Wie im Trockenlemma (2.4.13.viii) gezeigt, gilt $\mathfrak{m}_\gamma A_\beta = A_\beta \mathfrak{m}_{\gamma-\beta}$. Daraus folgt (wenn man zur Vereinfachung ϕ wieder einmal weglässt):

$$I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) A_\beta = \left(\bigcap_{\gamma\in\langle\alpha\rangle+\beta} \mathfrak{m}_\gamma\right) A_\beta = A_\beta \left(\bigcap_{\gamma\in\langle\alpha\rangle+\beta} \mathfrak{m}_{\gamma-\beta}\right) = A_\beta I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right).$$

Zudem ist $J(\alpha)_0 = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right) u_0$, wobei es möglich ist, den Erzeuger u_0 von A_0 als 1 zu wählen. Daraus folgt in der Tat

$$J(\alpha)_\beta = J(\alpha)_0 \cdot A_\beta + A_\beta \cdot J(\alpha)_0.$$

iv) Wenn $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ für alle $\beta \in \operatorname{Supp} A$, dann wird $J(\alpha)$ in Grad 0 erzeugt:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} J(\alpha)_\beta \\ &= \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} J(\alpha)_0 \cdot A_\beta + A_\beta \cdot J(\alpha)_0 \\ &\subset \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta \cdot J(\alpha)_0 \cdot \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{t}^*} A_\beta \\ &= A \cdot J(\alpha)_0 \cdot A. \end{aligned}$$

☺

Korollar 3.2.15. Ist $L(\alpha)$ endlich-dimensional, dann wird $J(\alpha)$ in Grad 0 erzeugt, das heißt $J(\alpha) \subset A \cdot J(\alpha)_0 + J(\alpha)_0 \cdot A$.

Beweis. Es muss gezeigt werden, dass für ein endlichdimensionales $L(\alpha)$ die Bedingung aus der Proposition erfüllt wird:

$$I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right) \text{ für alle } \beta \in \operatorname{Supp} A.$$

Da $L(\alpha)$ endlichdimensional sein soll, kann es auch nur endlich viele Gewichte in seinem Träger $\langle\alpha\rangle$ geben, somit ist $\overline{\langle\alpha\rangle} = \langle\alpha\rangle$ etc., und man rechnet

$$\begin{aligned} I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) &= I\left((\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle\right) \\ &= \operatorname{rad}\left(I\left((\langle\alpha\rangle+\beta)\right) + I\left(\langle\alpha\rangle\right)\right) \\ &= I\left((\langle\alpha\rangle+\beta)\right) + I\left(\langle\alpha\rangle\right) \\ &= I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right), \end{aligned}$$

wobei man die Radikalbildung nach Bemerkung 3.2.6 fallen lassen darf. ☺

Korollar 3.2.16.

i) $J(\alpha)_0$ wird vollständig durch $\overline{\langle\alpha\rangle}$ bestimmt.

ii) Ist die Voraussetzung erfüllt, dass $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ für alle $\beta \in \operatorname{Supp} A$ ist, so ist ganz $J(\alpha)$ vollständig durch $\overline{\langle\alpha\rangle}$ bestimmt.

Beweis.

i) Wir haben in Proposition 3.2.14 gesehen, dass $V(I(\alpha)_0) = \overline{\langle\alpha\rangle}$ gilt. Es ist $I(V(I(\alpha)_0))$ das Radikal von $I(\alpha)_0$, aber dank der Tatsache, das $I(\alpha)_0$ semiprim ist, stimmt es mit seinem Radikal überein (siehe Bemerkung 3.2.10).

$$I(\alpha)_0 = I(V(I(\alpha)_0)) = I(\overline{\langle\alpha\rangle}),$$

und $J(\alpha)_0 = \phi(I(\alpha)_0) \cdot u_0$ wird tatsächlich vollständig durch $\overline{\langle\alpha\rangle}$ bestimmt.

ii) Unter der Voraussetzung, dass $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle + \beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ für alle $\beta \in$ Supp A gilt, konnten wir in Proposition 3.2.14 nachweisen, dass $J(\alpha)$ in Grad 0 erzeugt wird. Somit folgt die Behauptung aus dem ersten Teil dieses Korollars. ☺

Das folgende Theorem ist nun das langersehnte Resultat, dessen technische Voraussetzungen sich dadurch ergeben, dass man auf ein fieses Lemma (weiter unten) zurückgreifen muss. Glücklicherweise können alle Voraussetzungen erfüllt werden, wenn wir uns später auf das spezielle Beispiel der Weylalgebra konzentrieren. Vorhang auf!

Theorem 3.2.17 (Die Korrespondenz zwischen primitiven Idealen und abgeschlossenen Regionen). Wir treffen folgende Annahmen:

1. A ist graduiert linksnoethersch, das heißt, die aufsteigende Kettenbedingung wird nur für homogene Linksideale vorausgesetzt.
2. $\mathrm{length}_A(M^{(1)}(\alpha))$ ist unabhängig von α beschränkt.
3. $V(\ker(\phi)) = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\langle\alpha\rangle}$ besteht aus nur endlich vielen verschiedenen Regionen.
4. $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle + \beta) \cap \langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle + \beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ gilt für alle $\beta \in$ Supp A sowie für alle $\alpha \in V(\ker\phi)$.

Dann gilt:

i) Alle Primideale von A haben die Form $J(\alpha)$ für ein $\alpha \in V(\ker\phi)$, sind also primitiv.

ii) Man hat eine Eins-zu-eins-Beziehung der Mengen

$$\left\{ \text{ Regionen } \overline{\langle\alpha\rangle} \mid \alpha \in V(\ker\phi)\right\} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{ Primitive Ideale } \subset A\}$$
$$\overline{\langle\alpha\rangle} \longleftrightarrow J(\alpha)$$

Für den ersten Punkt braucht man jedoch das folgende technisches Lemma: Sein Beweis ist lang und führt methodisch zu weit weg, daher sei an dieser Stelle auf den relativ ausführlichen Beweis in [MVdB98, Lemma 3.2.1] verwiesen.

Lemma 3.2.18 (Übeltäter). Sei allgemein $A = \bigoplus_{\alpha\in G} A_\alpha$ eine Algebra mit Graduierung durch die Gruppe G, sodass gilt:

- A ist graduiert prim und graduiert linksnoethersch, (das heißt, prim und noethersch zu sein wird nur für homogene Linksideale vorausgesetzt)
- A_0 ist kommutativ und über k endlich erzeugt,
- es gibt Elemente $a_\alpha \in A_\alpha$, sodass $A_\alpha = A_0 a_\alpha = a_\alpha A_0$ für jedes $\alpha \in G$ ist.

Dann folgt $\bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Spec}(A_0)} A\mathfrak{m} = (0)$.

Beweis (Theorem 3.2.17).

i) Alle Primideale von A haben die Form $J(\alpha)$ für ein $\alpha \in V(\ker\phi)$:
Zunächst vereinfachen wir die Fragestellung, sodass wir nur noch die Existenz eines $\alpha \in V(\ker(\phi))$ mit $J(\alpha) = 0$ zeigen müssen, und dies führen wir anschließend in mehreren Schritten durch.

- Wir dürfen annehmen, dass A (graduiert) prim ist und dass wir nur zeigen müssen, dass $(0) = J(\alpha)$ für ein $\alpha \in V(\ker(\phi))$ ist: Angenommen, wir haben ein irgendein zweiseitiges homogenes Primideal $\mathfrak{p} \in A$. Dann ist im Quotienten $A/\mathfrak{p}$ das Nullideal prim, was nach Definition gerade heißt, dass $A/\mathfrak{p}$ ein primer Ring ist. Und wenn wir nun gleich gezeigt haben werden, dass über $A/\mathfrak{p}$ tatsächlich $(0) = J(\beta)$ für ein $\beta \in \mathfrak{t}^*$ ist, können wir dies auf $\mathfrak{p} = J(\alpha) \subset A$ zurückziehen, für ein $\alpha \in \mathfrak{t}^*$:

$$J(\beta) = \mathrm{Ann}_{A/\mathfrak{p}}(L) = \ker(\rho)$$

mit einem einfachen $A/\mathfrak{p}$-Modul $L \in \mathcal{O}^{(p)}$ und

$$\rho : \ A/\mathfrak{p} \to \mathrm{End}_k(L(\beta)).$$

Nun haben wir

$$A \xrightarrow{\text{proj}} A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}_k(L(\beta))$$

und damit auch

$$\mathfrak{p} = \mathrm{proj}^{-1}(0) = \mathrm{proj}^{-1}(J(\beta)) = \mathrm{proj}^{-1}(\mathrm{Ann}_{A/\mathfrak{p}}(L) = \ker(\rho \circ \mathrm{proj}) = \mathrm{Ann}_A(L) = J(\alpha)$$

für ein $\alpha \in \mathfrak{t}^*$. Dafür müssen wir nur sehen, dass L auch über A in $\mathcal{O}^{(p)}$ liegt, weil uns dann Proposition 2.4.19.ii versichert, dass L isomorph zu einem $L(\alpha)$ ist. Dies ist aber gewährleistet, weil man nur die Surjektion von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Moduln

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\mathfrak{m}_\alpha^p \ \twoheadrightarrow \ L$$

sehen muss. Für L als $A/\mathfrak{p}$-Modul haben wir $L \in \mathcal{O}^{(p)}$ und damit die Existenz dieser Surjektion, wobei man L via $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \xrightarrow{\mathrm{proj}\circ\phi} A/\mathfrak{p}$ als $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Modul interpretiert. Nun kann man L aber auch als A-Modul auffassen, indem $\mathfrak{p}$ durch Null wirkt, und genau dieselbe Surjektion verwenden, um zu sehen, dass $L \in \mathcal{O}^{(p)} \subset A$-mod gilt (wobei hier die $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$-Wirkung auf A via $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \xrightarrow{\phi} A$ erklärt wird).
- Wir können in der Situation des Theorems das Lemma 3.2.18 anwenden:
  - A ist graduiert prim und graduiert linksnoethersch:
    Ersteres ist unsere vereinfachende Annahme, und Letzteres wird für das Theorem einfach vorausgesetzt.
  - A_0 ist kommutativ und über k endlich erzeugt:
    Kommutativ ist A_0, weil $A_0 = \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cdot 1$ ist, wie in Bemerkung 2.1.9.vi festgestellt wurde. Endlich erzeugt wird A_0, da man die endlich vielen Erzeuger $t_1 \ldots, t_n$ von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ nehmen kann (Der Vektorraum $\mathfrak{t}$ war als endlichdimensional vorausgesetzt) und damit dann die $\phi(t_i) \cdot 1$ als Erzeuger von A_0 dienen können.
  - Es gibt Elemente $a_\alpha \in A_\alpha$, sodass $A_\alpha = A_0 a_\alpha = a_\alpha A_0$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ ist:
    Die erste Gleichheit ist gerade die Eigenschaft (A2): $A_\alpha = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot a_\alpha = (\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot 1) \cdot a_\alpha$. Die zweite Gleichheit gilt, wenn man sich vergegenwärtigt, wie man ein Element aus $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ an einem Element aus A_α vorbeitauscht: Wegen

    $$a_\alpha \cdot t = t \cdot a_\alpha - [t, a_\alpha] = (t - \alpha(t))a_\alpha \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot a_\alpha$$

    (und umgekehrt) gilt $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})a_\alpha = a_\alpha\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ und damit die Behauptung.

- Damit erhalten wir
$$\bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Spec}(A_0)} A\mathfrak{m} = (0),$$
aber die maximalen Ideale aus $\operatorname{Spec}(A_0)$ kommen her von $\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t}))$ (maximale Ideale in A_0 sind auf $\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})$-Seite solche, die den Kern von $\operatorname{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow A_0$ enthalten) und damit schneiden wir allenfalls noch mehr Ideale, wenn wir den Schnitt über $\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) = \mathfrak{t}^*$ laufen lassen:
$$\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} A\mathfrak{m}_\alpha = (0).$$
Darüber hinaus sind die Annihilatoren $J(\alpha) = \operatorname{Ann}_A(M^{(1)}(\alpha))$ in $A\mathfrak{m}_\alpha$ enthalten, denn dass $J(\alpha)\cdot M^{(1)}(\alpha) = 0$ ist, bedeutet gerade, dass $J(\alpha) = J(\alpha)\cdot A \subset A\mathfrak{m}_\alpha$ ist. So folgt schließlich
$$\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} \operatorname{Ann}_A(M^{(1)}(\alpha)) = (0).$$
- Wir nahmen ja an, dass die Länge von $M^{(1)}(\alpha)$ unabhängig von α beschränkt ist, bezeichne diese Obergrenze für die Länge mit N. Also hat jedes $M^{(1)}(\alpha)$ eine Kompositionsreihe der Länge $n < N$:
$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M^{(1)}(\alpha).$$
Die einfachen Faktoren M_i/M_{i-1} haben nach Proposition 2.4.19 alle die Form $L(\beta_i)$ für irgendwelche $\beta_i \in V(\ker(\phi))$, $1 \le i \le n$ (beispielsweise ist nach Konstruktion $\beta_n = \alpha$). Das Produkt ihrer Annihilatoren $J(\beta_1)\cdot\ldots\cdot J(\beta_n)$ muss dann den Modul $M^{(1)}(\alpha)$ annihilieren: Zuerst trifft $J(\beta_n)(= J(\alpha))$ auf $M^{(1)}(\alpha)$. Er annihiliert den einfachen Kopf $L(\alpha)$, das heißt, $J(\alpha)\cdot M^{(1)}(\alpha) = J(\beta_n)\cdot M_n \subset M_{n-1}$ ist im maximalen Untermodul von $M^{(1)}(\alpha)$ enthalten. Nun kommt $J(\beta_{n-1})$ an die Reihe, schiebt M_{n-1} in M_{n-2} und so weiter:
$$J(\beta_1)\cdot\ldots\cdot J(\beta_i)\cdot\ldots\cdot J(\beta_n)\cdot M_n \subset J(\beta_1)\cdot\ldots\cdot J(\beta_i)M_i.$$
Am Ende darf $J(\beta_1)$ das Überbleibsel des Moduls, das in M_1 angekommen ist, auf Null schicken.
- Somit gilt $J(\beta_1)\cdot\ldots\cdot J(\beta_n) \subset \operatorname{Ann}_A(M^{(1)}(\alpha))$, und daher ist auch
$$\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} J(\beta_{\alpha,1})\cdot\ldots\cdot J(\beta_{\alpha,n_\alpha}) = (0),$$
wobei alle n_α kleiner als N waren.
- Nach Korollar 3.2.16 werden die Annihilatoren schon vollständig durch die abgeschlossenen Regionen festgelegt. In diesem Theorem nehmen wir jedoch an, das es von letzteren nur endlich viele gibt. Damit gibt es auch nur endlich viele verschiedene $J(\beta_i)$. Weil wiederum alle Produkte, die im Schnitt vorkommen, höchstens N Faktoren haben, können wir annehmen, dass der Schnitt endlich ist.
- In diesem endlichen Schnitt ist das endliche Produkt
$$\prod_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} J(\beta_{\alpha,1})\cdot\ldots\cdot J(\beta_{\alpha,n_\alpha})$$
enthalten, das demzufolge auch Null sein muss. Daher ist in der Tat ein $J(\beta) = 0$ gewesen, für ein $\beta \in V(\ker(\phi))$, denn A war als graduiert prim angenommen gewesen, wonach ein Produkt von homogenen Idealen nur Null sein kann, wenn eines der beteiligten Ideale Null war - und die $J(\beta_i)$ sind nach Lemma 3.2.2 in der Tat allesamt homogene Ideale. Das gewünschte β muss also existieren!

ii) Die Bijektivität der Abbildung $\overline{\langle\alpha\rangle} \mapsto J(\alpha)$ ist nun schnell gezeigt:

- Injektivität: Angenommen, $J(\alpha) = J(\beta)$. Wir wissen nach Proposition 3.2.14, dass $\overline{\langle\alpha\rangle} = V(J(\alpha)_0)$ gilt, daraus folgt dann schon $\overline{\langle\alpha\rangle} = \overline{\langle\beta\rangle}$.
- Surjektivität: Ganz allgemein folgt aus $\mathfrak{I}$ primitiv, dass $\mathfrak{I}$ prim ist, wie wir in 3.2.8 nachgerechnet haben. Nach Teil ((i)) des Theorems gilt bereits $\mathfrak{I} = J(\alpha)$. ☺

Fazit: Wir haben nun eine sehr schöne Beschreibung der primitiven Ideale in A gefunden. Und zwar *aller* primitiven Ideale, nicht nur die für die einfachen Moduln $L(\alpha)$, mit denen wir gestartet waren! Und das, obwohl wir zur Beschreibung der Regionen $\langle\alpha\rangle$ nur in der kleineren Kategorie $\mathcal{O}^{(p)}$ arbeiten müssen. Später geht es dann darum, ihrerseits diese Regionen konkret geometrisch zu beschreiben. Jedoch Vorsicht:

Bemerkung 3.2.19. Diese Korrespondenz gilt wirklich nur, wenn man die abgeschlossenen Regionen mit den primitiven Idealen in A vergleicht.

- Die Korrespondenz besagt ausdrücklich *nicht*, dass die abgeschlossenen Regionen zu den einfachen A-Moduln in Bijektion stehen. Über einfache Moduln in A-grmod ist überhaupt nichts bekannt. Kurz:

$$\left\{ \text{ Regionen } \overline{\langle\alpha\rangle} \mid \alpha \in V(\ker\phi) \right\} \stackrel{\text{NEIN}}{\longleftrightarrow} \{ \text{ Einfache Moduln } \in A\text{-grmod}\}$$

- Sind andererseits die Regionen nicht abgeschlossen, lassen sich keine Rückschlüsse über die primitiven Ideale ziehen! Nicht abgeschlossene Regionen $\langle\alpha\rangle$ entsprechen nach Konstruktion den Isomorphieklassen einfacher Moduln $L(\alpha)$, aber es kann sein, dass zwei nichtisomorphe Moduln $L(\alpha)$, $L(\beta)$ dasselbe primitive Ideal haben. Kurz:

$$\{ \text{ Regionen } \langle\alpha\rangle \mid \alpha \in V(\ker\phi)\} \stackrel{\text{NEIN}}{\longleftrightarrow} \{ \text{ Primitive Ideale } \subset A\}$$

- Und auch wenn wir zuvor schon gesehen haben, dass $\beta \in \langle\alpha\rangle$ impliziert, dass $\langle\beta\rangle = \langle\alpha\rangle$ ist, so darf man aus $\beta \in \overline{\langle\alpha\rangle}$ nur folgern, dass $\overline{\langle\alpha\rangle} \subseteq \overline{\langle\alpha\rangle}$ ist, nicht zwingend Gleichheit.

Beispiele, die diese Aussagen illustrieren, finden sich in Kapitel 5.5.

Bemerkung 3.2.20 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren).
Für Kategorie $\mathcal{O}$ gilt, wie bereits angesprochen, der Satz von Duflo [Jan83, Korollar 7.4]:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{primitive Ideale} \\ \text{in } \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{Annihilatoren} \\ \text{von } L(\lambda) \in \mathcal{O} \end{matrix} \right\}.$$

Genauer gesagt ist diese Gleichheit eine Folgerung aus der ersten Surjektion gegeben durch $\lambda \mapsto \mathrm{Ann}L(\lambda)$ in

$$\mathfrak{h}^* \twoheadrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{primitive Ideale} \\ \text{in } \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \end{matrix} \right\} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}\text{-Spec}Z(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}^*/W,$$

während die zweite Surjektion durch Schnitt eines primitiven Ideals J mit dem Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ gegeben wird:

$$\begin{aligned} J \cap Z(\mathfrak{g}) &= \mathrm{Ann}L(\lambda) \cap Z(\mathfrak{g}) \\ &= \{z \in Z(\mathfrak{g}) \mid z_\bullet L(\lambda) = 0\} \\ &= \{z \in Z(\mathfrak{g}) \mid \chi_\lambda(z) = 0\} \text{ (wobei } \chi_\lambda \text{ der zentrale Charakter von } L(\lambda)) \\ &= \ker(\chi_\lambda) \text{ (und dies ist ein maximales Ideal in } Z(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Die dritte und letzte Abbildung kommt vom Harish-Chandra-Isomorphismus, wonach $\chi_\lambda = \chi_\mu$ genau dann gilt, wenn μ im $W\cdot$-Orbit von λ liegt [Hum08, Theorem 1.10.b]. So gibt es mit $\mathfrak{h}^*$

nicht nur eine obere Schranke für die Parametrisierung der primitiven Ideale von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, sondern man weiß auch, dass dazu mindestens ein Annihilator eines $L(w \cdot \lambda)$ pro Weylgruppenorbit $W \cdot \lambda$ gebraucht wird. Zur vollständigen Klassifikation der primitiven Ideale ist es also nötig, die Fasern von $\mathfrak{h}^* \twoheadrightarrow \{$ primitive Ideale $\}$ genauer zu beschreiben (Details dazu findet man in [Jos84, Kapitel 2.4]).

4 Technische Werkzeuge zur Abwandlung von A

Im weiteren Verlauf wird man aus einem Tripel $(A, \mathfrak{t}, \phi)$, das (A1) und (A2) erfüllt, neue Tripel konstruieren wollen. In diesem Kapitel werden drei Bauanleitungen vorgestellt - Tensorieren, Quotientenbildung und der Übergang zu Unteralgebren - und damit die technischen Grundlagen für die folgenden Kapitel gelegt. Insbesondere interessiert man sich für eine Algebra, die aus A durch Anwenden aller Techniken auf einmal entsteht und mit B^χ bezeichnet wird. Ihr gebührt daher am Ende gesonderte Aufmerksamkeit, auch wenn alle nötigen Techniken zuvor schon getrennt behandelt werden.
Dieses Kapitel folgt [MVdB98, Kapitel 4].

4.1 Tensorprodukte zweier Konfigurationen

Hier geht es darum, wie man zwei Konfigurationen $(A_i, \mathfrak{t}_i, \phi_i)$ tensoriert. Dies liefert eine geeignete Methode, aus zwei Konfigurationen eine neue zu konstruieren, wie wir gleich sehen werden. Andersherum ist das aber auch nützlich: Später werden die Resultate dieses Abschnitts dazu eingesetzt, um Beweise zu vereinfachen, indem man eine große Konfiguration als Tensorprodukt kleinerer Konfigurationen schreibt.

Definition 4.1.1 (Tensorprodukt zweier Konfigurationen).
Seien $(A_1, \mathfrak{t}_1, \phi_1)$ und $(A_2, \mathfrak{t}_2, \phi_2)$ zwei Konfigurationen, die (A1) und (A2) erfüllen. Definiere ihr Tensorprodukt durch

- die Algebra $A_1 \otimes_k A_2$,
- die 'Cartanunteralgebra' $\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$,
- ϕ definiert durch $\phi|_{\mathfrak{t}_1} := \phi_1 \otimes 1$ und $\phi|_{\mathfrak{t}_2} := 1 \otimes \phi_2$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 &\longrightarrow A_1 \otimes A_2 \\ t_1 \oplus t_2 &\mapsto \phi_1(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes \phi_2(t_2). \end{aligned}$$

Lemma 4.1.2. $(A_1 \otimes_k A_2, \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2, \phi)$ erfüllt tatsächlich alle Eigenschaften einer solchen Konfiguration:

- $A_1 \otimes_k A_2$ ist eine k-Algebra mit Eins $1 \otimes 1$.
- $\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$ ist ein endlichdimensionaler k-Vektorraum.
- ϕ ist k-linear mit kommutierendem Bild in $A_1 \otimes A_2$.

(A1): $A_1 \otimes A_2$ ist halbeinfach bezüglich der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$.

(A2): Die Gewichtsräume von $A_1 \otimes A_2$ werden über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)$ von einem Element erzeugt.

Bemerkung 4.1.3. Wir verwenden folgende Identifikationen, Konventionen und Notationen:

- Wir betrachten ausschließlich Tensorprodukte über k.
- Die Gewichte in $(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)^* \cong \mathfrak{t}_1^* \oplus \mathfrak{t}_2^*$ werden mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ bezeichnet.
- Es gilt
$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2) \cong \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1) \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_2)$$
als k-Algebren; die linke Seite wird erzeugt von Elementen $t_1 + t_2 \in \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$ mit gewöhnlicher Multiplikation, die rechte Seite hat Erzeuger $t_1 \otimes t_2 \in \mathfrak{t}_1 \otimes \mathfrak{t}_2$ mit Multiplikation $d_1 \otimes d_2 \cdot d_1' \otimes d_2' = (d_1 \otimes d_1') \otimes (d_2 \otimes d_2')$. Dann wird der Isomorphismus durch
$$(t_1 + t_2) \mapsto t_1 \otimes 1 + 1 \otimes t_2$$
erklärt, was verträglich mit der Kommutativität ist.

- Wann immer hier ein graduierter $A_1 \otimes A_2$-Modul aus $\mathcal{O}^{(p)}$ erscheint, so meinen wir die *geklammerte* Graduierung, auch wenn wir zur Vermeidung eines Klammerkollaps $M^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2)_{(\beta_1,\beta_2)}$ anstelle von $M^{(p)}((\alpha_1, \alpha_2))_{((\beta_1,\beta_2))}$ schreiben werden.

Beweis (Lemma). Die ersten drei Punkte sind klar (dass das Bild von $\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$ unter ϕ tatsächlich aus paarweise kommutierenden Elementen besteht, ist eine winzige Rechnung). Anstelle die Bedingungen (A1) und (A2) zu überprüfen, weisen wir die äquivalenten Eigenschaften (A1') und (A2') nach:

(A1'): Es gilt

$$A_1 \otimes A_2 = \left(\bigoplus_{\alpha_1 \in \mathfrak{t}_1} (A_1)_{\alpha_1} \right) \otimes \left(\bigoplus_{\alpha_2 \in \mathfrak{t}_2} (A_2)_{\alpha_2} \right) = \bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2} (A_1)_{\alpha_1} \otimes (A_2)_{\alpha_2} .$$

Wegen $[t_1 \oplus t_2, a_1 \otimes a_2] = [t_1, a_1] \otimes a_2 + a_1 \otimes [t_2, a_2]$ ist in der Tat

$$(A_1 \otimes A_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)} = (A_1)_{\alpha_1} \otimes (A_2)_{\alpha_2},$$

obige Zerlegung ist die gewünschte Gewichtsraumzerlegung.

(A2'): Unter der Identifikation

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2) = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1) \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_2)$$

geht ϕ (bzw. dessen multiplikative Fortsetzung auf $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)$) auf die Abbildung

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1) \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_2) \xrightarrow{\phi_1 \otimes \phi_2} A_1 \otimes A_2$$

über (wobei auch hier die multiplikativen Fortsetzungen von ϕ_1 und ϕ_2 gemeint sind). Seien u_{α_1} und u_{α_2} jeweils die Erzeuger von $(A_1)_{\alpha_1}$ und $(A_2)_{\alpha_2}$. Dann ist $u_{\alpha_1} \otimes u_{\alpha_2}$ ein Erzeuger von $(A_1)_{\alpha_1} \otimes (A_2)_{\alpha_2}$ unter der Multiplikation mit $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)$, bei

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2) = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_1) \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}_2) &\twoheadrightarrow (A_1)_{\alpha_1} \otimes (A_2)_{\alpha_2} \\ d_1 \otimes d_2 &\mapsto \phi_1(d_1) \otimes \phi_2(d_2) \cdot u_{\alpha_1} \otimes u_{\alpha_2} \\ &= \phi_1(d_1) u_{\alpha_1} \otimes \phi_2(d_2) u_{\alpha_2} \end{aligned}$$

handelt es sich in der Tat um eine Surjektion. ☺

Bemerkung 4.1.4 (Wie sieht $V(\ker(\phi))$ aus?). Der Kern von ϕ ist gleich $\ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2) \subset \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$. Unter dem Isomorphismus $(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)^* \cong \mathfrak{t}_1^* \oplus \mathfrak{t}_2{}^*$ geht

$$V(\ker(\phi)) = \{\alpha \in (\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)^* \mid \alpha(\ker(\phi)) = 0\}$$

über in

$$V(\ker(\phi_1)) \oplus V(\ker(\phi_2)) = \{\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathfrak{t}_1^* \oplus \mathfrak{t}_2{}^* \mid \alpha_1(\ker(\phi_1)) + \alpha_2(\ker(\phi_2)) = 0\},$$

denn wenn $\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t_2) = 0$ für jedes $t_1 + t_2 \in \ker(\phi)$ gelten soll, so müssen bereits $\alpha_1(t_1) = 0$ und $\alpha_2(t_2) = 0$ gewesen sein.

Nun wissen wir, dass wir auf diesem Weg tatsächlich eine Konfiguration wie zuvor beschrieben bekommen. Als nächstes wünscht man sich, dass sich die Relationen $\sim$ und $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ für das Tensorprodukt zweier Konfigurationen schön beschreiben lassen. Die folgenden Aussagen sind [MVdB98, Proposition 4.1.1] entnommen:

Lemma 4.1.5.

i) Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ genau dann, wenn $\beta_1 \underset{\alpha_1}{\rightsquigarrow} \gamma_1$ und $\beta_2 \underset{\alpha_2}{\rightsquigarrow} \gamma_2$ ist.

ii) Es gilt $\beta \sim \gamma$ genau dann, wenn $\beta_1 \sim \gamma_1$ und $\beta_2 \sim \gamma_2$ ist.

Beweis.

i) Es gilt nach Lemma 2.4.28 die Relation $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ genau dann, wenn

$$(A_1 \otimes A_2)_{\gamma-\beta}(A_1 \otimes A_2)_{\beta-\alpha} \nsubseteq (A_1 \otimes A_2)_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$$

ist. Formt man dies entsprechend unseren Identifikationen ein bisschen um, so ergibt sich

$$\left((A_1)_{\gamma_1-\beta_1} \otimes (A_2)_{\gamma_2-\beta_2}\right)\left((A_1)_{\beta_1-\alpha_1} \otimes (A_2)_{\beta_2-\alpha_2}\right) \nsubseteq \left((A_1)_{\gamma_1-\alpha_1} \otimes (A_2)_{\gamma_2-\alpha_2}\right)\left(\mathfrak{m}_{\alpha_1} \otimes \mathfrak{m}_{\alpha_2}\right).$$

Beachtet man, dass die Multiplikation auf $A_1 \otimes A_2$ komponentenweise definiert war, so sieht man, dass obige Bedingung äquivalent zu den beiden folgenden ist:

$$(A_1)_{\gamma_1-\beta_1}(A_1)_{\beta_1-\alpha_1} \nsubseteq (A_1)_{\gamma_1-\alpha_1}\mathfrak{m}_{\alpha_1}$$

und

$$(A_2)_{\gamma_2-\beta_2}(A_2)_{\beta_2-\alpha_2} \nsubseteq (A_2)_{\gamma_2-\alpha_2}\mathfrak{m}_{\alpha_2},$$

und dies gilt wiederum nach Lemma 2.4.28 genau dann, wenn $\beta_1 \underset{\alpha_1}{\rightsquigarrow} \gamma_1$ und $\beta_2 \underset{\alpha_2}{\rightsquigarrow} \gamma_2$ ist (Beachte für den faktorweisen Vergleich, dass hier über einem Körper tensoriert wurde).

ii) Die Äquivalenz von $\beta \sim \gamma$ und $\beta_1 \sim \gamma_1$ sowie $\beta_2 \sim \gamma_2$ ist nun eine Folgerung aus dem letzten Punkt zusammen mit Proposition 2.4.28. ☺

Bemerkung 4.1.6 (Der Träger von $A_1 \otimes A_2$). Wie im Beweis von Lemma 4.1.2 gesehen, besitzen die Gewichtsräume von $A_1 \otimes A_2$ die Form

$$(A_1 \otimes A_2)_{(\alpha_1,\alpha_2)} = (A_1)_{\alpha_1} \otimes (A_2)_{\alpha_2},$$

und daher setzt sich der Träger des Tensorprodukts aus der direkten Summe der Träger von A_1 und A_2 zusammen:

$$\mathrm{Supp}\,(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{Supp}\,(A_1) \oplus \mathrm{Supp}\,(A_2),$$

wobei man wieder die Identifikation von $(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2)^*$ mit $\mathfrak{t}_1^* \oplus \mathfrak{t}_2^*$ verwendet.

4.2 Quotienten und ihre Konfigurationen

Nicht nur Tensorieren, sondern auch die Bildung bestimmter Quotienten erlaubt es, neue Konfigurationen aus $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ zu konstruieren.

Definition 4.2.1 (Quotienten). Sei $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ gegeben. Fixiere ein Element $t \in \mathfrak{t}$ mit $\phi(t)$ zentral in A und wähle $\lambda = \lambda(t) \in k$. Dann erhält man eine neue Konfiguration bestehend aus

- der Algebra $\overline{A} := A/(\phi(t-\lambda))$ (das beidseitige Ideal wird herausgeteilt),
- dem unveränderten Vektorraum $\mathfrak{t}$,
- $\overline{\phi}$ definiert durch $\overline{\phi} := \mathrm{proj} \circ \phi$.

Bemerkung 4.2.2. Weil $\phi(t)$ und damit $\phi(t)-\lambda$ zentral in A ist, ist $A(\phi(t-\lambda)) = (\phi(t-\lambda))A$ ganz automatisch ein zweiseitiges Ideal.

Proposition 4.2.3. $(\overline{A}, \mathfrak{t}, \overline{\phi})$ ist tatsächlich wieder so eine Konfiguration:

- $\overline{A}$ ist eine k-Algebra mit Eins $\overline{1}$.
- $\mathfrak{t}$ ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.
- $\overline{\phi}$ ist k-linear mit kommutierendem Bild in $\overline{A}$.

(A1): $\overline{A}$ ist halbeinfach bezüglich der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$.

(A2): Die Gewichtsräume von $\overline{A}$ werden über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ von einem Element erzeugt.

Beweis. Der Quotient einer Algebra nach einem zweiseitigen Ideal ist wieder eine Algebra. An $\mathfrak{t}$ hat man nichts geändert, und $\overline{\phi}$ ist wieder k-linear; die Kommuatativität des Bildes von $\overline{\phi}$ in $\overline{A}$ ist der Kommutativität des Bildes von ϕ in A zu verdanken. Nun zu den beiden interessanten Punkten, wir zeigen wieder die beiden hierzu äquivalenten Bedingungen:

(A1'): $\overline{A} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \overline{A}_\alpha$ bzgl. der adjungierten $\mathfrak{t}$-Linkswirkung: Nach Trockenlemma 2.4.13.vii gilt

$$A/(\phi(t-\lambda)) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} A_\alpha / A_\alpha \phi(t-\lambda),$$

weil $\phi(t-\lambda)$ zentral in A ist. Ferner gilt für $a \in A_\alpha$ wegen der Zentralität von $\phi(t-\lambda)$

$$[t', \overline{a}] = \overline{[t', a]} = \overline{\alpha(t')a} = \alpha(t')\overline{a},$$

also ist $A_\alpha / A_\alpha \phi(t-\lambda) = \left(A/(\phi(t-\lambda))\right)_\alpha = \overline{A}_\alpha$.

(A2'): $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow \overline{A}_\alpha$: Dies folgt aus

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow A_\alpha \twoheadrightarrow A_\alpha / A_\alpha(\phi(t) - \lambda) = \overline{A}_\alpha.$$

Wir stellen in Anlehnung an [MVdB98, Abschnitt 4.2] fest:

Bemerkung 4.2.4 (Wie sieht $\boldsymbol{V(\ker(\overline{\phi}))}$ aus?). Es gilt $V(\ker(\overline{\phi})) = V(\ker(\phi)) \cap V(t-\lambda)$, denn man kann

$$\ker(\overline{\phi}) = \ker(\phi) + (t-\lambda)$$

zeigen: Die Inklusion $\ker(\overline{\phi}) \supset \ker(\phi) + (t-\lambda)$ ist klar, und andersherum nimmt man sich einfach ein $d \in \ker(\overline{\phi})$ her, das heißt,

$$\phi(d) \in \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot (t-\lambda)).$$

Also gibt es ein $d' \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ mit

$$\phi(d) = \phi(d'(t-\lambda)),$$

und dies ist äquivalent zu

$$\phi(d - d'(t-\lambda)) = 0.$$

Also liegt $d - d'(t-\lambda)$ im Kern von ϕ, woraus

$$d \in d'(t-\lambda) + \ker(\phi) \ \subset\ (t-\lambda) + \ker(\phi)$$

folgt.

Ohne sich genauer mit der Gestalt von $M^{(p)}(\alpha)$ und $L(\alpha)$ über $\overline{A}$ auseinanderzusetzen, kann man für deren Träger folgende Feststellungen machen:

Lemma 4.2.5.

i) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in V(\ker(\overline{\phi}))$. Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\overline{\phi}))$ genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\phi))$ ist.

ii) Seien $\beta, \gamma \in V(\ker(\overline{\phi}))$. Dann gilt $\beta \sim \gamma \in V(\ker(\phi))$ genau dann, wenn $\beta \sim \gamma \in V(\ker(\overline{\phi}))$ ist.

Beweis.

i) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in V(\ker(\overline{\phi})) = V(\ker(\phi)) \cap V(t-\lambda)$. Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\overline{\phi}))$ genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\phi))$ ist: Die Relation $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ ist nach Lemma 2.4.28 äquivalent zu
$$A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha} \;\nsubseteq\; A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha,$$
und ebenso ist für die Quotientenkonfiguration $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ gleichbedeutend mit
$$\overline{A}_{\gamma-\beta}\overline{A}_{\beta-\alpha} \;\nsubseteq\; \overline{A}_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha.$$
Wegen $\overline{A}_\alpha = A_\alpha/A_\alpha\phi(t-\lambda)$ können wir das umformulieren zu folgender Aussage über die Menge der Restklassen $A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda) \subset A_{\gamma-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda)$:
$$A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda) \;\nsubseteq\; A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha/A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda),$$
wobei entscheidend ist, dass $\phi(t-\lambda)$ zentral in A ist. Die gewünschte Aussage ist nun äquivalent dazu, dass
$$\begin{aligned} A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha}/A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda) \;&\subset\; A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha/A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda) \\ &\text{genau dann, wenn} \\ A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha} \;&\subset\; A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha \end{aligned}$$
gilt. Die untere Zeile impliziert sofort die obere Zeile. Andersherum: Ist
$$a_{\gamma-\beta}a_{\beta-\alpha} + A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda) = a_{\gamma-\alpha}m + A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda)$$
für alle $a_{\gamma-\beta}$, $a_{\beta-\alpha}$ (aus den offensichtlichen Gewichtsräumen) und mit geeigneten $a_{\gamma-\alpha}$ und $m \in \mathfrak{m}_\alpha$, so folgt daraus zunächst nur, dass
$$a_{\gamma-\beta}a_{\beta-\alpha} \in A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha + A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda)$$
gilt. Glücklicherweise rettet uns, dass α hier in $V(t-\lambda)$ liegt, das bedeutet nämlich, dass $(t-\lambda) \subset \mathfrak{m}_\alpha$ und damit auch $A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha + A_{\gamma-\alpha}\phi(t-\lambda) = A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$ gilt. Wir haben damit wie gewünscht
$$A_{\gamma-\beta}A_{\beta-\alpha} \;\subset\; A_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha$$
gesehen.

ii) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in V(\ker(\overline{\phi}))$. Es gilt $\beta \sim \gamma$ genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ ist: Dafür verwenden wir den vorigen Punkt, denn
$$\begin{aligned} \beta \sim \gamma \in V(\ker(\phi)) \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\phi)) \text{ und } \gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta \in V(\ker(\phi)) \\ &\Leftrightarrow \quad \beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\overline{\phi})) \text{ und } \gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta \in V(\ker(\overline{\phi})) \\ &\Leftrightarrow \quad \beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \in V(\ker(\overline{\phi})). \end{aligned}$$
☺

Bemerkung 4.2.6 (Der Träger von $A/(\phi(t-\lambda))$). Der Träger von $A/(\phi(t-\lambda))$ ist im Träger von A enthalten: Wir haben schon gesehen, dass für die Gewichtsräume von $\overline{A}$ gilt, dass
$$\overline{A}_\alpha = A_\alpha/A_\alpha(\phi(t)-\lambda)$$
ist. Es könnte also höchstens passieren, dass im Träger von $\overline{A}$ weniger Gewichte als im Träger von A auftreten, nämlich immer dann, wenn für $\alpha \in \operatorname{Supp}(A)$ gilt:
$$A_\alpha = A_\alpha(\phi(t)-\lambda).$$
Ob dieser Fall eintreten kann, hängt von den Eigenschaften von A ab und lässt sich nicht pauschal beantworten.

4.3 Unteralgebren und ihre Konfigurationen

Außerdem hat man die Möglichkeit, unter gewissen Umständen zu einer Unteralgebra von A überzugehen und dabei eine neue Konfiguration zu erhalten:

Definition 4.3.1 (Unteralgebra). Sei $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ gegeben. Sei $S_B^* \subset \mathfrak{t}^*$ eine Untergruppe von $(\mathfrak{t}^*, +)$. Dann erhält man eine neue Konfiguration mit

- der Algebra $B := \bigoplus_{\beta \in S_B^*} A_\beta \subset A$,
- dem Vektorraum $\mathfrak{t}$,
- ϕ_B definiert durch $\phi_B(t) := \phi(t)$ (also '$\phi_B = \phi$').

Proposition 4.3.2. $(B, \mathfrak{t}, \phi_B)$ ist tatsächlich wieder eine Konfiguration:

- $B := \bigoplus_{\beta \in S_B^*} A_\beta$ ist eine k-Algebra mit Eins $\bar{1}$.
- $\mathfrak{t}$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.
- ϕ_B ist k-linear mit kommutierendem Bild in B.

(A1): B ist halbeinfach bezüglich der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$.

(A2): Die Gewichtsräume von B werden über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ von einem Element erzeugt.

Beweis.

- In der Tat ist B eine Unteralgebra von A: Seien $a_1 \in A_{\beta_1}$ und $a_2 \in A_{\beta_2}$ beliebig, $\beta_1, \beta_2 \in S_B^*$. Dann ist $a_1 \cdot a_2 \in A_{\beta_1+\beta_2}$, und weil S_B^* eine Gruppe ist, muss das notwendige Gewicht $\beta_1 + \beta_2$ wirklich in S_B^* enthalten sein, damit ist dann $a_1 \cdot a_2$ in B enthalten.
- $\mathfrak{t}$ ist unverändert derselbe endlich-dimensionale Vektorraum wie vorher.
- ϕ bildete schon im alten Setting nach A_0 ab (Stichwort 'kommutierendes Bild'). A_0 ist auch in B enthalten, da S_B^* eine Untergruppe von $\mathfrak{t}^*$ sein sollte und damit die 0 enthält.

(A1) und (A2): Beides ist in diesem Fall automatisch erfüllt, da wir ja für die Konstruktion von B einfach nur einen Teil der Gewichtsraumzerlegung von A hergenommen haben. ☺

Bemerkung 4.3.3 (Wie sieht $V(\ker(\phi_B))$ aus?). Nun machen das alte ϕ und das neue ϕ_B mit $\mathfrak{t}$ ja dasselbe, an A hat man nur außerhalb vom Bild von ϕ was verändert. Ihre Kerne sind daher gleich und es gilt $V(\ker(\phi_B)) = V(\ker(\phi))$.

Bemerkung 4.3.4. Die Konstruktion von $M^{(p)}(\alpha)$ und $L(\alpha)$ funktioniert wieder genauso wie bisher, weil die Cartan $\mathfrak{t}$ und ihre Wirkung unverändert geblieben sind, nur dass wir jetzt nur noch die Unteralgebra $B \subset A$ verwenden und damit einige Gewichtsräume wegfallen.

Bemerkung 4.3.5. Ist ein $\mathfrak{t}^*$-graduierter B-Modul M über $m_1, \ldots, m_n$ erzeugt, mit homogenen Erzeugern $m_i \in M_{\xi_i}$ für $\xi_i \in \mathfrak{t}^*$ ohne Relationen zwischen den Erzeugern, so treten gerade die Gewichte aus

$$\bigcup_{i=1}^{n} (\xi_i + S_B^*)$$

als Träger von M auf. So erklärt sich, dass wir bei der Beschreibung des Trägers von $M^{(p)}(\alpha)$ und $L(\alpha)$ (die beide von nur einem Element erzeugt werden) nur Teilmengen von $V(\ker(\phi_B)) = V(\ker(\phi))$ betrachten müssen, die von der Form $\xi + S_B^*$ sind.

Gemäß [MVdB98, Proposition 4.3.1] stellen wir fest:

Lemma 4.3.6.

i) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \xi + S_B^*$ für ein $\xi \in \mathfrak{t}^*$. Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über B genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über A ist.

ii) Es gilt $\beta \sim \gamma$ über B genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ über A ist.

Beweis.

i) Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über B genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über A ist: Es muss wieder nachgeprüft werden, dass
$$A_{\gamma-\beta} A_{\beta-\alpha} \nsubseteq A_{\gamma-\alpha} \mathfrak{m}_\alpha$$
genau dann eintritt, wenn
$$B_{\gamma-\beta} B_{\beta-\alpha} \nsubseteq B_{\gamma-\alpha} \mathfrak{m}_\alpha$$
gilt. Nun ist aber nach Definition $B_\delta = A_\delta$ für jedes Gewicht $\delta \in S_B^*$. Die Differenzen $\gamma - \beta$, $\beta - \alpha$ und $\gamma - \alpha$ liegen tatsächlich allesamt in S_B^*, weil sich das möglicherweise nicht in S_B^* enthaltene ξ herauskürzt. Also ist die Äquivalenz der obigen Aussagen bloß eine Tautologie.

ii) Es gilt $\beta \sim \gamma$ über B genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ über A ist: Dies ist wie zuvor eine unmittelbare Folgerung aus Punkt (i). ☺

Bemerkung 4.3.7 (Der Träger von B). Der Träger von B wurde gerade so definiert, dass $\mathrm{Supp}\,(B) = S_B^* \cap \mathrm{Supp}\,(A)$ ist.

4.4 Eine Abwandlung der Algebra A: Die Algebra B^χ

4.4.1 Die Konstruktion von B^χ

Obige Konstruktionen zeigen also, wie man aus einer Kofiguration $(A, \mathfrak{t}, \phi)$, die (A1) und (A2) erfüllt, durch Bildung von Unterringen und Quotienten weitere (A1) und (A2) erfüllende Konfigurationen erhalten kann. Hier geht es nun um einen Spezialfall davon.

Bemerkung 4.4.1 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren). Studiert man $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-Moduln aus dem Blickwinkel der Gewichtstheorie, so bietet es sich an, sich dafür Kategorie $\mathcal{O}$ einzuschränken, welche alle einfachen Höchstgewichtsmoduln enthält. Sie zerfällt in direkte Summanden, die sogenannten 'Blöcke' $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ Hierbei ist $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ ein zentraler Charakter, also ein Algebrenhomomorphismus vom Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ in die komplexen Zahlen. Ein Block $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ besteht aus denjenigen $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-Moduln in $\mathcal{O}$, auf denen $(Z(\mathfrak{g}) - \chi_\lambda(Z(\mathfrak{g})))$ nilpotent operiert. Hier operiert $\mathfrak{h}$ wie überall in $\mathcal{O}$ diagonal, das heißt, jeder Modul hat eine Gewichtsraumzerlegung bezüglich der $\mathfrak{h}$-Wirkung. Nach [Soe86, Theorem 1] gibt es für λ regulär jedoch eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{O}_{\chi_\lambda} \cong \mathcal{O}'_{\chi_\lambda}$, wobei $\mathcal{O}'_{\chi_\lambda} \subset \mathfrak{g}$-mod die 'umgekehrten' Eigenschaften hat: Hier soll $(Z(\mathfrak{g}) - \chi_\lambda(Z(\mathfrak{g})))$ durch Null operieren, die Moduln in $\mathcal{O}'_{\chi_\lambda}$ sind also diagonalisierbar bezüglich der $Z(\mathfrak{g})$-Wirkung, während sie bezüglich der $\mathfrak{h}$-Wirkung nur noch eine verallgemeinerte Gewichtsraumzerlegung zu haben brauchen.
Auch unsere A-Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ haben eine verallgemeinerte Gewichtsraumzerlegung bezüglich der $\mathfrak{t}$-Wirkung. Wie konstruieren wir ein Analogon zu der diagonalisierbaren Wirkung des Zentrums? Wir betrachten nicht länger die Algebra A, sondern die Invarianten $A^\mathfrak{g}$ bezüglich der adjungierten Operation für einen Unterraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$. Dann wissen wir, dass $\mathfrak{g}$ im Zentrum von $A^\mathfrak{g}$ liegt, und wir fordern, dass $\mathfrak{g}$ durch $\chi \in \mathfrak{g}^*$ operieren soll. $A^\mathfrak{g}$-Moduln, auf denen $\mathfrak{g}$ durch $\chi(\mathfrak{g})$ operiert, sind insbesondere $A^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))A^\mathfrak{g}$-Moduln. Darum betrachten wir im folgenden Abschnitt die Algebra
$$A^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))A^\mathfrak{g}.$$

Definition 4.4.2 (Die Algebra B^χ). Sei $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ gegeben. Sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ Untervektorraum, sei $\chi \in \mathfrak{g}^*$. Dann setze

$$B^\chi \ := \ A^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$$

wobei $A^\mathfrak{g}$ der Zentralisator der $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$-Wirkung ist,

$$A^\mathfrak{g} = \{a \in A \mid \forall t \in \mathfrak{g} : \ [\phi(t), a] = 0\},$$

und das zweiseitige Ideal

$$(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) = (\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))A^\mathfrak{g} = A^\mathfrak{g}(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$$

in $A^\mathfrak{g}$, was man herausteilt, ist erzeugt von $\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}) := \{\phi(t) - \chi(t) \ \in A \mid t \in \mathfrak{g}\}$. So erhält man eine neue Konfiguration mit

- der Algebra B^χ,
- dem Vektorraum $\mathfrak{t}$,
- ϕ_{B^χ} definiert durch $\phi_{B^\chi} = \mathrm{proj} \circ \phi_{A^\mathfrak{g}}$.

Bemerkung 4.4.3. Es gilt $A^\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in V(\mathfrak{g})} A_\alpha$:

$$\begin{aligned}
A^\mathfrak{g} &= \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} A_\alpha\right)^\mathfrak{g} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} A_\alpha^\mathfrak{g} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \forall t \in \mathfrak{g} : \ [\phi(t), a] = 0\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha(\mathfrak{g}) \cdot a = 0\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha(\mathfrak{g}) = 0\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \mathfrak{g} \subset \ker(\alpha)\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha \in V(\mathfrak{g})\} \quad \text{denn } \mathfrak{g} \subset \ker(\alpha) = \mathfrak{m}_\alpha \approx \alpha \in V(\mathfrak{g}) \\
&= \bigoplus_{\alpha \in V(\mathfrak{g})} A_\alpha.
\end{aligned}$$

Damit ist $A^\mathfrak{g} \subset A$ in der Tat eine Unteralgebra im Sinne des vorigen Abschnitts, mit $S_B^* := V(\mathfrak{g})$.

Proposition 4.4.4. $(B^\chi, \mathfrak{t}, \overline{\phi_{A^\mathfrak{g}}})$ erfüllt tatsächlich alle Eigenschaften einer solchen Konfiguration:

- B^χ ist eine k-Algebra mit Eins $\overline{1}$.
- $\mathfrak{t}$ ist ein endlichdimensionaler k-Vektorraum.
- $\phi_{B^\chi} = \overline{\phi_{A^\mathfrak{g}}}$ ist k-linear mit kommutierendem Bild in B^χ.

(A1): B^χ ist halbeinfach bezüglich der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$.

(A2): Die Gewichtsräume von B^χ werden über $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ von einem Element erzeugt.

Beweis. Bei $(B^\chi, \mathfrak{t}, \phi_{B^\chi})$ handelt es sich um das Ergebnis von mehreren Konstruktionsschritten, wie sie beim Übergang zu einer Unteralgebra und zum zentralen Quotienten in den vorangegangenen beiden Abschnitten vorgestellt wurden. Sobald dies nachgeprüft wurde, kann man sukzessive die Resultate aus den Propositionen 4.2.3 und 4.3.2 anwenden, um die Behauptung nachzuweisen.

- $A^\mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra im Sinne von Abschnitt 4.3: In der letzten Bemerkung haben wir gesehen, dass $A^\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in V(\mathfrak{g})} A_\alpha$ ist, und $V(\mathfrak{g})$ ist in der Tat eine additive Untergruppe von $\mathfrak{t}^*$.
- Schreibe B^χ so um, dass es zum Abschnitt über Quotienten passt.
  Wir dürfen demnach aus $A^\mathfrak{g}$ Ideale der Gestalt $\phi(t - \lambda)$ herausteilen, mit $t \in \mathfrak{t}$, sodass $\phi(t)$ zentral in $A^\mathfrak{g}$ ist, und $\lambda = \lambda(t) \in k$. Für t kann man jedes beliebige Element aus $\mathfrak{g}$ wählen, weil die nach Definition alle zentral in $A^\mathfrak{g}$ sind. Nimm zudem $\lambda(t) := \chi(t)$. Dann folgt aus Proposition 4.2.3, dass $(A^\mathfrak{g}/(\phi(t - \lambda(t))), \mathfrak{t}, \overline{\phi})$ wieder (A1) und (A2) erfüllt. Führe diese Konstruktion so oft durch, bis der ganze Unterraum $\mathfrak{g}$ herausgeteilt wurde (es sind nur endlich viele Konstruktionsschritte, weil $\mathfrak{t}$ und damit auch $\mathfrak{g}$ von Anfang an als endlichdimensional vorausgesetzt wurden). ☺

Lemma 4.4.5. Es gilt $V(\ker(\phi_{B^\chi})) = V(\ker(\phi)) \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$.

Beweis. Der Übergang zur Unteralgebra ändert laut Bemerkung 4.3.3 nichts an $V(\ker(\phi))$. Der Rest folgt aus der entsprechenden Aussage 4.2.4 aus dem Kapitel über Quotienten, ebenfalls sukzessive angewendet: Demnach ist

$$V(\ker(\phi_{B^\chi})) = V(\ker(\phi)) \cap \; V(t_1 - \chi(t_1)) \cap \ldots \cap V(t_k - \chi(t_k))$$

für Erzeuger $t_1, \ldots, t_k$ von $\mathfrak{g}$. Ferner ist festzuhalten, dass tatsächlich

$$\begin{aligned} \alpha \in V(t_1 - \chi(t_1)) \cap \ldots \cap V(t_k - \chi(t_k)) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha(t_i - \chi(t_i)) = 0 \quad \text{für alle } 1 \le i \le k \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha(t - \chi(t)) \quad = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathfrak{g} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \end{aligned}$$

gilt. ☺

Folgende Aussage lässt sich dann über die Gewichte im Träger treffen (vgl. [MVdB98, Proposition 4.4.1]):

Lemma 4.4.6. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in V(\ker(\phi)) \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$.

i) Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ für B^χ genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ für A ist.

ii) Es gilt $\beta \sim \gamma$ für B^χ genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ für A ist.

Beweis.

i) Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über B^χ genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über A ist: Wie zuvor benutzt man erst die entsprechende Aussage für Unterringe angewendet auf $A^\mathfrak{g} \subset A$, um zu sehen, dass $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über A genau dann eintritt, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über $A^\mathfrak{g}$ ist, und wendet dann scheibchenweise das Kapitel über Quotienten an, um die Äquivalenz zu $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ über B^χ zu bekommen.

ii) Es gilt $\beta \sim \gamma$ über B genau dann, wenn $\beta \sim \gamma$ über A ist: Dies ist wie zuvor eine unmittelbare Folgerung aus Punkt (i), oder aber eine Kombination der entsprechenden Resultate über Unteralgebren und Quotienten. ☺

Korollar 4.4.7. Daraus folgt nun, dass für $\alpha \in V(\ker(\phi)) \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ gilt:

$$\langle \alpha \rangle_{B^\chi} \;=\; \langle \alpha \rangle_A \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})).$$

Beweis.

- $\langle \alpha \rangle_{B^\chi} \;\subset\; \langle \alpha \rangle_A \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$:
  Definitionsgemäß ist $\beta \in \langle \alpha \rangle_{B^\chi}$ genau dann gegeben, wenn $\beta \sim \alpha$ für B^χ ist. Nach Proposition 4.4.6 ist dies äquivalent dazu, dass $\beta \sim \alpha$ für A gilt, das heißt wir haben $\beta \in \langle \alpha \rangle_A$, und zudem waren α und β stets in $V(\ker(\phi_{B^\chi})) = V(\ker(\phi)) \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$.

- $\langle \alpha \rangle_{B^\chi} \;\supset\; \langle \alpha \rangle_A \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$:
  Diese Aussage folgt ebenfalls direkt aus der Proposition. ☺

5 Die verallgemeinerte Weylalgebra

Von nun an geht es um eine spezielle Konfiguration $(A, \phi, \mathfrak{t})$: Man betrachtet die Weylalgebra. Sie wird in diesem Abschnitt definiert, ebenso der zugehörige Vektorraum $\mathfrak{t}$, und es wird nachgerechnet, dass die Bedingungen (A1) und (A2) erfüllt sind. Zum Abschluss liegt der Fokus auf den Relationen $\underset{\alpha}{\leadsto}$ und $\sim$, und das bislang recht algebraische Bild bekommt die versprochenen geometrischen Farbtupfer. Wir folgen dabei weitestgehend [MVdB98, Kapitel 6]. Außerdem sind wir nun, da wir uns mit einer konkreten Algebra beschäftigen, endlich in der Lage dazu, Beispiele zu diskutieren. Aber erstmal müssen wir einiges an technischer Vorarbeit bewältigen.

5.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 5.1.1 (Die verallgemeinerte Weylalgebra $\mathcal{A}$). Definiere die verallgemeinerte Weylalgebra $\mathcal{A}$ als Quotienten

$$k\langle x_1, \ldots x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle / \sim$$

der freien Algebra von Worten in $x_1, \ldots x_r$, $x_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}$, $\partial_1, \ldots, \partial_n$, wobei $n := r + s$ ist. Die Relationen werden von

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= 0 & &\forall\ 1 \leq i, j \leq n \\ [\partial_i, \partial_j] &= 0 & &\forall\ 1 \leq i, j \leq n \\ [\partial_i, x_j] &= \delta_{ij} & &\forall\ 1 \leq i, j \leq n \\ x_i x_i^{-1} &= 1 & &\forall\ r+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

erzeugt. Wir folgen dem verbreiteten Notationsmissbrauch und schreiben gelegentlich

$$k[x_1, \ldots x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \partial_1, \ldots, \partial_n]$$

für die verallgemeinerte Weylalgebra, die wir darüber hinaus von nun an meist nur noch als 'Weylalgebra' bezeichnen.

Bemerkung 5.1.2. Aus den obigen Relationen lassen sich insbesondere die folgenden Kommutatorrelationen für x_j^{-1} herleiten:

$$\begin{aligned} [x_i, x_j^{-1}] &= 0 & &\forall\ 1 \leq i \leq n,\ r+1 \leq j \leq n \\ [\partial_i, x_j^{-1}] &= \delta_{ij}(-x_i^{-2}) & &\forall\ 1 \leq i \leq n,\ r+1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Dies rechnet man schnell nach, beispielsweise ist

$$\begin{aligned} [\partial_i, x_i^{-1}] &= \partial_i x_i^{-1} - x_i^{-1}\partial_i \\ &= (x_i^{-1} x_i)\partial_i x_i^{-1} - x_i^{-1}\partial_i \\ &= x_i^{-1}(\partial_i x_i - 1)x_i^{-1} - x_i^{-1}\partial_i \\ &= -x_i^{-2}. \end{aligned}$$

Wir werden das nächste Lemma immer wieder brauchen:

Lemma 5.1.3 (Rechnungen). Unter Verwendung der Weylalgebra-Relationen zeigt man:

i) $\partial x^k = x^k \partial + k x^{k-1}$ für positive Exponenten k,

ii) $\partial x^k = x^k \partial + k x^{k-1}$ für negative Exponenten k,

iii) $x \partial^k = \partial^k x - k \partial^{k-1}$ für positive Exponenten k, wobei stets der Index i unterdrückt wurde, um die Notation zu vereinfachen.

Beweis.

i) Induktionsanfang: Es gilt $\partial x = x\partial + 1$ nach Definition. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\partial x^{k+1} &= (x\partial + 1)x^k \\ &= x(\partial x^k) + x^k \\ &= x(x^k\partial + kx^{k-1}) + x^k \\ &= x^{k+1}\partial + (k+1)x^k.\end{aligned}$$

ii) Induktionsanfang: Es gilt $\partial x^{-1} = x^{-1}\partial - x^{-2} = x^{-1}\partial + (-1)x^{(-1)-1}$ entsprechend Bemerkung 5.1.2. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\partial x^{k-1} &= (\partial x^k)x^{-1} \\ &= (x^k\partial + kx^{k-1})x^{-1} \\ &= x^k(\partial x^{-1} + kx^{-2}) \\ &= x^k(x^{-1}\partial - x^{-2} + kx^{-2}) \\ &= x^{k-1} + (k-1)x^{(k-1)-1}.\end{aligned}$$

iii) Induktionsanfang: Es gilt $x\partial = \partial x - 1$ nach Definition. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}x\partial^{k+1} &= (x\partial^k)\partial \\ &= (\partial^k x - k\partial^{k-1})\partial \\ &= \partial^k(x\partial - k) \\ &= \partial^k(\partial x - 1 - k) \\ &= \partial^{k+1}x - (k+1)\partial^{(k+1)-1}.\end{aligned}$$

☺

Bemerkung 5.1.4. Üblicherweise findet sich unter dem Namen Weylalgebra die Algebra

$$k[x_1, \ldots x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n]$$

ohne x_i^{-1}, was dem Spezialfall $s = 0, r = n$ in unserer Definition entspricht. Wir folgen in unserer Definition der Variante aus [MVdB98]. Allerdings werden wir gleich sehen, wie die wichtigsten bekannten Eigenschaften der klassischen Weylalgebra auch für unsere verallgemeinerte Weylalgebra nachgewiesen werden können.

Die folgenden Resultate und Beweise finden sich für die klassische Weylalgebra in [Cou95]. Im klassischen Fall beschreibt man eine Basis der Weylalgebra und definiert daraufhin den Grad eines Elements, mit dessen Hilfe in [Cou95] viele zentrale Aussagen bewiesen werden. Im Fall der verallgemeinerten Weylalgebra ist ein wenig Vorsicht bei einer geeigneten Definition des Grads eines Elements der Weylalgebra geboten, dann aber kann genauso wie in [Cou95] argumentiert werden. Zunächst beschreiben wir die Basis für die verallgemeinerte Definition der Weylalgebra, auch dabei handelt es sich nur um eine leichte Ergänzung des Beweises in [Cou95].

Lemma 5.1.5. Für die Weylalgebra $\mathcal{A}$ gilt:

i) Die Weylalgebra $\mathcal{A}$ ist Tensorprodukt von n kleinen Weylalgebren $\mathcal{A}_i$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i &:= k[x_i, \partial_i] && \text{für } i \leq r \\ \mathcal{A}_i &:= k[x_i^{\pm 1}, \partial_i] && \text{für } i > r,\end{aligned}$$

das heißt, es gibt einen Isomorphismus von Algebren

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n.$$

ii) Eine Basis von $\mathcal{A}$ ist durch Monome der Form

$$x_1^{\alpha_1}\partial_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}\partial_n^{\beta_n}$$

gegeben, mit $\beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $1 \leq i \leq n$ sowie $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $1 \leq i \leq r$ und $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ für alle $r+1 \leq i \leq n$.

Beweis. i) Die Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$, definiert als multiplikative Fortsetzung von

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes x_i\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 && \text{für } 1\leq i\leq n\\ \partial_i &\mapsto 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes \partial_i\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 && \text{für } 1\leq i\leq n\\ x_i^{-1} &\mapsto 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes \underbrace{x_i^{-1}}_{i\text{-te Position}}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 && \text{für } r+1\leq i\leq n, \end{aligned}$$

liefert in der Tat einen wohldefinierten Isomorphismus von Algebren, wie man nachrechnen kann. Insbesondere kommutieren nämlich Erzeuger mit unterschiedlichem Index i in $\mathcal{A}$ (aufgrund den definierenden Relationen der Weylalgebra sowie den Relationen aus Bemerkung 5.1.2), und daher kann man jedes Monom in $\mathcal{A}$ so umordnen, dass die darin auftretenden Erzeuger nach aufsteigendem Index sortiert sind.

ii) Wir finden die oben genannte Basis von $\mathcal{A}$, indem wir eine Basis von $\mathcal{A}_1\otimes\ldots\otimes\mathcal{A}_n$ suchen und den soeben konstruierten Isomorphismus anwenden. So brauchen wir nämlich nur noch nach Basen der kleinen Weylalgebren $\mathcal{A}_i$ Ausschau zu halten.

- Für $1 \leq i \leq r$ ist $\mathcal{A}_i$ erzeugt von Monomen $x_i^{\alpha_i}\partial_i^{\beta_i}$, wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist: Betrachte eine feste Darstellung eines Monoms in $\mathcal{A}_i$. Man kann alle x_i in dem Monom in $\mathcal{A}_i$ auf die linke Seite der ∂_i's bringen, indem man die Kommutatorrelation $[\partial_i, x_i] = 1$ anwendet. Dabei entstehen Restterme, deren Länge echt kleiner geworden ist. Per Induktion können diese Restterme ebenfalls in die richtige Reihenfolge gebracht werden.

- Für $r+1 \leq i \leq n$ ist $\mathcal{A}_i$ erzeugt von Monomen $x_i^{\alpha_i}\partial_i^{\beta_i}$, wobei $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ und $\beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist: Wir wählen wieder eine feste Darstellung eines Monoms in $\mathcal{A}_i$. Darin können zwei Arten von falsch sortierten Faktoren auftreten: Für $\partial_i x_i$ kann man wie vorhin mit der Relation $[\partial_i, x_i] = 1$ arbeiten, um die Problemstelle aufzulösen. Ein Faktor der Gestalt $\partial_i x_i^{-1}$ kann mittels der Relation $[\partial_i, x_i^{-1}] = -x_i^{-2}$ umsortiert werden, der entstehende Restterm verfügt über ein ∂_i weniger als zuvor, und wo am Ende des Sortierprozesses kein ∂_i mehr in einem Monom enthalten ist, kann auch keine Problemstelle mehr auftreten.

- Für jedes i sind die aufgelisteten Monome linear unabhängig in $\mathcal{A}_i$: Man kann die Elemente von $\mathcal{A}_i$ als lineare Operatoren auf $k[x_i^{\pm 1}]$ bzw. $k[x_i]$ auffassen. Ist eine Linearkombination $D = \sum c_{\alpha_i\beta_i} x_i^{\alpha_i}\partial_i^{\beta_i}$ ein nichttrivialer Operator, war D auch als Element der Weylalgebra ungleich 0. Man pickt sich das kleinste β_i heraus, für das $c_{\alpha_i\beta_i} \neq 0$ ist, und wendet D auf das Polynom $x_i^{\beta_i}$ an. Heraus kommt

$$D(x_i^{\beta_i}) = \beta_i! \sum_{\alpha_i} c_{\alpha_i\beta_i} x_i^{\alpha_i},$$

wegen $\partial_i^{\beta_i}(x_i^n) = \beta_i!$, wenn $n = \beta_i$, und $\partial_i^{\beta_i}(x_i^n) = 0$ für alle $0 \leq n < \beta_i$. Es gibt mit $x_i^{\beta_i}$ also ein Polynom, auf dem D nicht verschwindet, und somit ist $D \neq 0$, sofern ein $c_{\alpha_i\beta_i}$ ungleich Null ist (vergleiche mit dem Beweis von [Cou95, Proposition 1.2.1]). ☺

Dies garantiert, dass folgende Definition wohldefiniert ist:

Definition 5.1.6 (Die Ordnung eines Weylalgebraelements). Stelle ein Element $a \in \mathcal{A}$ in obiger Basis dar, also

$$a = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \partial_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \partial_n^{\beta_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}^s$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Dann definiere seine Ordnung als größte Länge $|\beta| := \beta_1 + \ldots + \beta_n$,

$$\operatorname{ord}(a) = \sup\{|\beta| \mid \text{es gibt ein } \alpha \text{ mit } c_{\alpha\beta} \neq 0\},$$

und setze $\operatorname{ord}(0) = -\infty$.

Folgendes kann über das Verhalten der Ordnung unter Addition, Multiplikation und Kommutatoren von Elementen der Weylalgebra gesagt werden:

Lemma 5.1.7. Seien $a, a' \in \mathcal{A}$. Es gilt:

i) $\operatorname{ord}(a + a') \leq \max\{\operatorname{ord}(a), \operatorname{ord}(a')\}$, und wenn a und a' unterschiedliche Ordnung hatten, tritt auf jeden Fall Gleichheit ein.

ii) $\operatorname{ord}(aa') = \operatorname{ord}(a) + \operatorname{ord}(a')$.

iii) $\operatorname{ord}([a, a']) \leq \operatorname{ord}(a) + \operatorname{ord}(a') - 1$, falls $\operatorname{ord}(a), \operatorname{ord}(a') \geq 1$ waren.

Beweis. Man zeigt dies wie in [Cou95, Theorem 2.1.1]: Die erste Ungleichung ist klar, weil $a + a'$ auch wieder in unserer Basis geschrieben ist, wenn dies für a und a' zutrifft. Die anderen beiden Punkte sieht man durch einen gemeinsamen Induktionsbeweis über $\operatorname{ord}(a) + \operatorname{ord}(a')$. ☺

Bemerkung 5.1.8 (Die Ordnungsfiltrierung der Weylalgebra). Definiere Unterräume

$$C_k := \{a \in \mathcal{A} \mid \operatorname{ord}(a) \leq k\}$$

der Weylalgebra. Diese Unterräume bilden eine Filtrierung $\mathcal{C}$ von $\mathcal{A}$, das heißt, die Bedingungen

- $C_k \subset C_{k+1}$
- $\mathcal{A} = \bigcup_k C_k$
- $C_k \cdot C_l \subset C_{k+l}$

werden erfüllt (vgl. [Cou95, Kapitel 7.2] für die Definition der Ordnungsfiltrierung). Die assoziierte graduierte Algebra ist definiert als

$$\operatorname{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_k (C_k / C_{k-1}),$$

wobei $C_{-1} := 0$ definiert ist. Die assoziierte graduierte Algebra ist isomorph zum Polynomring in $2n$ Variablen, lokalisiert an $y_{r+1}, \ldots, y_n$:

$$\operatorname{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) \cong k[y_1, \ldots y_r, y_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1}, z_1, \ldots, z_n].$$

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von [Cou95, Theorem 7.3.1] in drei Schritten:

- Man versichert sich, dass $\operatorname{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ tatsächlich von $y_1, \ldots y_r, y_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1}, z_1, \ldots, z_n$ erzeugt wird, wobei die y_i und die $y_i^{\pm 1}$ in $\operatorname{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ die Bilder der korrespondierenden x_i und $x_i^{\pm 1}$ in $\mathcal{A}$ seien, und die z_i den ∂_i entsprechen.
- Man stellt fest, dass der Kommutator zweier Erzeuger der Weylalgebra $\mathcal{A}$ aufgrund von Lemma 5.1.7.iii kleinere Ordnung hat und somit Null in der assoziierten graduierten Algebra ist. Damit ist $\operatorname{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ eine kommutative Algebra.

- Die letzten beiden Schritte ergeben die Existenz eines surjektiven Homomorphismus von Algebren
$$k[y_1, \ldots y_r, y_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1}, z_1, \ldots, z_n] \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}),$$
der zudem injektiv ist, wie man unter Berücksichtigung der Basis von $\mathcal{A}$ aus Lemma 5.1.5.ii prüft.

Wir verwenden die Ordnungsfiltrierung als praktisches Hilfsmittel, um die nachfolgenden grundlegenden Eigenschaften der Weylalgebra überprüfen zu können:

Proposition 5.1.9 (Drei Eigenschaften der Weylalgebra). Folgende Eigenschaften werden von der Weylalgebra $\mathcal{A}$ erfüllt:

i) $\mathcal{A}$ ist linksnoethersch, das heißt, aufsteigende Ketten von Linksidealen werden stationär.

ii) $\mathcal{A}$ ist einfach, das heißt, es gibt keine nichttrivialen zweiseitigen Ideale.

iii) $\mathcal{A}$ ist nullteilerfrei.

Beweis.

i) $\mathcal{A}$ ist linksnoethersch, das heißt, aufsteigende Ketten von Linksidealen werden stationär: Wir stellen fest, dass die Lokalisierung des Polynomrings $k[y_1, \ldots y_r, y_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1}, z_1, \ldots, z_n]$ ein noetherscher Ring ist, denn nach dem Hilbertschen Basissatz ist $k[y_1, \ldots y_n, z_1, \ldots, z_n]$ noethersch (siehe [Cou95, Theorem 8.2.1]), und Lokalisierungen noetherscher Ringe sind wieder noethersch (weil nach [AM69, Proposition 3.11.i] Ideale in der Lokalisierung von Idealen im ursprünglichen Ring herkommen, und Inklusionen zwischen Idealen bleiben erhalten, da Lokalisierung nach [AM69, Proposition 3.3] exakt ist). Also ist auch die assoziierte graduierte Algebra der Weylalgebra $\mathrm{gr}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ noethersch. Wie in [Cou95, Theorem 8.2.3] schließt man daraus, dass $\mathcal{A}$ schon selber noethersch war.

ii) $\mathcal{A}$ ist einfach: Angenommen, $\mathfrak{a} \subset \mathcal{A}$ ist ein zweiseitiges Ideal ungleich Null. Wähle ein Element a niedrigster Ordnung in $\mathfrak{a}$. Ist $\mathrm{ord}(a) = 0$, so ist a ein Polynom in den $x_1, \ldots x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}$,
$$a = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha,$$
wobei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ist. Wir können davon ausgehen, dass sämtliche $\alpha_i \geq 0$ sind, da wir andernfalls a mit geeigneten Potenzen von x_i multiplizieren können, das Resultat muss wieder in $\mathfrak{a}$ liegen. Da $\mathfrak{a}$ sogar ein zweiseitiges Ideal ist, liegt auch der Kommutator $[a, a']$ für jedes $a' \in \mathcal{A}$ wieder in $\mathfrak{a}$. Wir kommutieren nun so geschickt, dass das Resultat in k liegt und damit $\mathfrak{a} = \mathcal{A}$ gewesen sein muss: Betrachte denjenigen Summanden mit $c_\gamma \neq 0$, für den erst $\gamma_1 = \sup\{\alpha_1 \mid c_\alpha \neq 0\}$ maximal ist, dann $\gamma_2 = \sup\{\alpha_2 \mid c_\alpha \neq 0, \alpha_1 = \gamma_1\}$ maximal unter den verbleibenden Kandidaten ist, und so weiter. Aus dem Rechenlemma 5.1.3.i geht hervor, dass
$$[\partial_i, x^{\gamma_i}] = \gamma_i \cdot x^{\gamma_i - 1}$$
ist. Kommutieren wir also γ_i-fach mit ∂_i, so haben wir den Faktor $x_i^{\gamma_i}$ durch $\gamma_i! \in k$ ersetzt, und alle Monome mit $x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i < \gamma_i$, ins Jenseits befördert. Wiederholen wir diese Prozedur für alle $1 \leq i \leq n$, so haben wir alle Monome $c_\alpha x^\alpha$ mit $\alpha \neq \gamma$ eliminiert, und das Monom $c_\gamma x^\gamma$ durch $c_\gamma \gamma_1! \ldots \gamma_n!$ aus k ersetzt. Nun besprechen wir den Fall $\mathrm{ord}(a) > 0$. Nach Definition bedeutet dies, dass ein β_i in der Darstellung
$$a = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \partial_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \partial_n^{\beta_n}$$
größer als Null ist. Ziehen wir Rechenlemma 5.1.3.iii heran, so sehen wir, dass $[x_i, \partial_i^{\beta_i}] = -\beta_i \partial_i^{\beta_i - 1}$ ist, das heißt, dass $[x_i, a]$ echt kleinere Ordnung hat, $\mathrm{ord}([x_i, a]) = |\beta| - 1$. Aber zu Beginn hatten wir angenommen, dass $a \in \mathfrak{a}$ von minimaler Ordnung ist, Widerspruch.

iii) $\mathcal{A}$ ist nullteilerfrei: In Lemma 5.1.7.ii sahen wir, dass sich für ein Produkt von zwei Elementen der Weylalgebra die Ordnungen addieren. Sind beide Faktoren ungleich Null, so sind ihre Ordnungen ≥ 0, und das Produkt ist daher auch von der Ordnung $\geq 0 > -\infty$, insbesondere ist das Produkt nicht Null. ☺

Bemerkung 5.1.10. Im Beweis sahen wir sogar, dass $\mathcal{A}$ beidseitig noethersch ist.

5.2 Die Konfiguration $(\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \phi)$ für die Weylalgebra

Wir wollen mit der Weylalgebra $\mathcal{A}$ ein konkretes Beispiel für die Algebra A angeben. Bislang fehlen aber noch eine passende 'Cartanalgebra' $\mathfrak{t}$ und die Abbildung $\phi : \mathfrak{t} \to \mathcal{A}$, sodass $\mathcal{A}$ mit einer adjungierten Operation von $\mathfrak{t}$ ausgestattet werden kann, die (A1) und (A2) erfüllt.

Definition 5.2.1 (Der Vektorraum $\mathfrak{t}$). Hier ist $\mathfrak{t}$ gegeben durch

$$\mathfrak{t} := \operatorname{span}_k \{\pi_1, \ldots, \pi_n \mid \pi_i = x_i \partial_i\} \quad (\subset \mathcal{A}).$$

Definition 5.2.2 (Die Abbildung ϕ). Wir definieren $\phi :=$ incl $: \mathfrak{t} \hookrightarrow \mathcal{A}$ gegeben durch die Inklusion von $\mathfrak{t}$ in die Algebra $\mathcal{A}$.

Die Grundvoraussetzungen, um $(\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \phi)$ als Konfiguration bezeichnen zu können, sind erfüllt, sagt das nächste Lemma. Für die Eigenschaften (A1) und (A2) ist der kommende Abschnitt reserviert.

Lemma 5.2.3. Seien $\mathcal{A}$, $\mathfrak{t}$ und ϕ wie oben. Es gilt

i) $\mathcal{A}$ ist eine k-Algebra mit 1.

ii) $\mathfrak{t}$ ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.

iii) ϕ ist k-linear.

iv) $\phi(\mathfrak{t})$ ist kommutativ in $\mathcal{A}$.

Beweis. Hier gibt es nicht viel zu zeigen. Wir begnügen uns mit der Feststellung, dass $\phi(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \subset \mathcal{A}$ in der Tat aus paarweise kommutierenden Elementen besteht:

$$[\pi_i, \pi_j] = [x_i \partial_i, x_j \partial_j] = 0.$$

Bemerkung 5.2.4. Um im nächsten Abschnitt die Gewichte der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung auf $\mathcal{A}$ zu beschreiben, greifen wir auf die Identifikation von $\mathfrak{t}^* \cong k^n$ mittels $\pi_i^* \mapsto e_i$ zurück.

Zudem stellen wir fest, dass hier wegen $\ker(\phi) = 0$ die Identität

$$V(\ker(\phi)) = V((0)) = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \mid (0) \subset \mathfrak{m}\} = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathfrak{t})) \cong \mathfrak{t}^*$$

gilt.

5.3 Die Gewichtsraumzerlegung der Weylalgebra

In diesem Abschnitt wird die $\mathfrak{t}^*$-Graduierung der Weylalgebra bestimmt - anders gesagt, wir wollen die Gewichtsraumzerlegung von $\mathcal{A}$ bezüglich der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$ nachrechnen. Die adjungierte Wirkung von $\mathfrak{t}$ auf $\mathcal{A}$ vermöge ϕ ist hier sehr leicht zu beschreiben, da die Abbildung ϕ nur die Inklusion des Unterraums $\mathfrak{t}$ in die Weylalgebra ist und somit vergessen werden kann. Das folgende kleine Lemma erhellt, mit welchen Gewichten $\mathfrak{t}$ auf den Erzeugern x_i, x_i^{-1} und ∂_i der Weylalgebra wirkt.

Lemma 5.3.1 (Die Gewichte der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung auf den Erzeugern).

$$\begin{aligned}
[\pi_i, x_j] &= \delta_{ij} \cdot x_j &&= \pi_j^*(\pi_i) \cdot x_j \\
[\pi_i, x_j^{-1}] &= -\delta_{ij} \cdot x_j^{-1} &&= -\pi_j^*(\pi_i) \cdot x_j^{-1} \\
[\pi_i, \partial_j] &= -\delta_{ij} \cdot \partial_j &&= \pi_j^*(\pi_i) \cdot \partial_j
\end{aligned}$$

Beweis. Für $i \neq j$ kommutiert in der Weylalgebra ohnehin alles. Für $i = j$ rechnet man kurz nach:

$$[x_i\partial_i, x_i] \;=\; x_i\partial_i x_i - x_i x_i \partial_i \;=\; x_i\partial_i x_i - x_i([x_i, \partial_i] + \partial_i x_i) \;=\; -x_i \cdot [x_i, \partial_i] \;=\; x_i$$

und

$$[x_i\partial_i, x_i^{-1}] \;=\; x_i\partial_i x_i^{-1} - x_i^{-1} x_i \partial_i \;=\; x_i\partial_i x_i^{-1} - \partial_i \;=\; x_i\partial_i x_i^{-1} - \partial_i x_i x_i^{-1} \;=\; [x_i, \partial_i] x_i^{-1} \;=\; -x_i^{-1}$$

sowie

$$[\pi_i, \partial_i] \;=\; x_i\partial_i\partial_i - \partial_i x_i \partial_i \;=\; [x_i, \partial_i]\partial_i \;=\; -\partial_i.$$

Nun wollen wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine Gewichtsraumzerlegung im Sinne von (A1') und (A2') hat, das heißt, wir möchten die Algebra in Gewichtsräume

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \mathcal{A}_\alpha$$

bzgl. der adjungierten $\mathfrak{t}$-Linkswirkung zerlegen, sodass man zugleich eine Surjektion

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\alpha$$

induziert von ϕ auf die Gewichtsräume hat. Die Gewichtsräume sollen also von der Form

$$\mathcal{A}_\alpha = \phi(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \cdot a_\alpha$$

für einen Erzeuger a_α sein. Weil ϕ die Inklusion von $\mathfrak{t}$ bzw. von $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ in die Weylalgebra $\mathcal{A}$ ist, haben wir dann unter Verwendung von Bemerkung 2.1.9.vi

$$\mathcal{A}_0 = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot 1 = k[\pi_1, \dots, \pi_n].$$

Wir geben nun die Erzeuger a_α der Gewichtsräume an:

Definition 5.3.2. Sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Setze $a_\alpha := \prod_{i=1}^{n} x_i^{(\alpha_i)}$, wobei $x_i^{(\alpha_i)}$ eine Kurzschreibweise für die folgenden Elemente ist:

$$\begin{aligned}
i > r: &\quad x_i^{(\alpha_i)} := x_i^{\alpha_i} \\
i \leq r: &\quad x_i^{(\alpha_i)} := x_i^{\alpha_i}, \quad \text{falls } \alpha_i \geq 0 \\
&\quad x_i^{(\alpha_i)} := \partial_i^{-\alpha_i}, \quad \text{falls } \alpha_i < 0.
\end{aligned}$$

Satz 5.3.3 (Die Gewichtsraumzerlegung von $\mathcal{A}$). Die Weylalgebra $\mathcal{A}$ hat eine Gewichtsraumzerlegung

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{A}_0 \cdot a_\alpha$$

bzgl. der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$. Die Gewichte α liegen in $\mathbb{Z}^n \subset k^n \cong \mathfrak{t}^*$, wobei wir die Identifikation aus Bemerkung 5.2.4 verwenden, sodass wir $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_i \in \mathfrak{t}^*$ als Tupel $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n$ auffassen können.

Bemerkung 5.3.4. Erklärend lässt sich anmerken, dass diese Identifikation von $\mathfrak{t}^*$ mit k^n konkret bedeutet, dass ein Element $t = \sum c_i\pi_i \in \mathfrak{t}$ auf a_α durch

$$[t, a_\alpha] = \alpha(t)a_\alpha = \sum c_i\alpha_i \cdot a_\alpha$$

wirkt. So wird mit Sinn gefüllt, zu sagen, dass $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ das Gewicht zum Gewichtsvektor a_α bzgl. der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{t}$ auf $\mathcal{A}$ ist.

Bemerkung 5.3.5. Wir werden also über (A1') und (A2') hinaus nicht nur eine Gewichtsraumzerlegung nachweisen, sondern sogar sehen, dass die Gewichte innerhalb eines $\mathbb{Z}$-Gitters in $\mathfrak{t}^*$ liegen! Dies sollte Motivation genug dafür hergeben, den nachfolgenden Beweis zu schultern.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Wir weisen das gewünschte Resultat in mehreren Schritten nach. Zunächst zeigen wir, dass $\mathfrak{t}$ auf $\mathcal{A}_0 \cdot a_\alpha$ tatsächlich durch α wirkt, das heißt, wir möchten

$$\mathcal{A}_0 \cdot a_\alpha \ \subset \ \mathcal{A}_\alpha \ = \ \{a \in \mathcal{A} \mid [t, a] = \alpha(t)a \text{ für alle } t \in \mathfrak{t}\}$$

sehen. Wegen der Linearität der Wirkung müssen wir dies nur für die π_i überprüfen. Aufgrund

$$[\pi_i, d \cdot a_\alpha] = \pi_i d \cdot a_\alpha - d \cdot a_\alpha\pi_i = \underbrace{\pi_i d \cdot a_\alpha - d\pi_i \cdot a_\alpha}_{=0} + d\pi_i \cdot a_\alpha - d \cdot a_\alpha\pi_i = d \cdot [\pi_i, a_\alpha]$$

brauchen wir sogar nur $[\pi_i, a_\alpha] = \alpha_i a_\alpha$ nachrechnen. Dieses Problem kann wegen

$$[\pi_i, a_\alpha] = \pi_i \cdot \prod_{k=1}^n x_k^{(\alpha_k)} - \prod_{k=1}^n x_k^{(\alpha_k)} \cdot \pi_i = \left(\prod_{k<i} x_k^{(\alpha_k)}\right) [\pi_i, x_i^{(\alpha_i)}] \left(\prod_{k>i} x_k^{(\alpha_k)}\right)$$

ein weiteres Mal reduziert werden, sodass wir nur noch $[\pi_i, x_i^{(\alpha_i)}] = \alpha_i x_i^{(\alpha_i)}$ einsehen müssen:

- Im Fall $i \le r$ und $\alpha_i < 0$, wenn also $x_i^{(\alpha_i)} = \partial_i^{-\alpha_i}$ ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}[\pi_i, \partial_i^{-\alpha_i}] &= [x_i\partial_i, \partial_i^{-\alpha_i}] \\ &= x_i\partial_i\partial_i^{-\alpha_i} - \partial_i^{-\alpha_i}x_i\partial_i \\ &= -(-\alpha_i\partial_i^{-\alpha_i-1})\partial_i \quad \text{nach Lemma 5.1.3.iii} \\ &= \alpha_i\partial_i^{-\alpha_i} \\ &= \alpha_i x^{(\alpha_i)}\end{aligned}$$

- Andernfalls ist $x_i^{(\alpha_i)} = x_i^{\alpha_i}$, egal ob α_i positiv oder negativ ist. Dann rechnet man

$$\begin{aligned}[\pi_i, x_i^{\alpha_i}] &= [x_i\partial_i, x_i^{\alpha_i}] \\ &= x_i\partial_i x^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}x_i\partial_i \\ &= x_i(x_i^{\alpha_i}\partial_i + \alpha_i x_i^{\alpha_i-1}) - x_i^{\alpha_i}x_i\partial_i \quad \text{nach Lemma 5.1.3.i bzw. Lemma 5.1.3.ii} \\ &= \alpha_i x^{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Als nächstes möchten wir

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{A}_0 \cdot a_\alpha = \mathcal{A}$$

überprüfen. Wir haben in Lemma 5.1.5.ii gesehen, dass sich jedes Element der Weylalgebra mit Hilfe der Standardbasis, bestehend aus Monomen der Gestalt

$$m = m_1 \dots m_n \quad \text{mit } \ m_i = x_i^l\partial_i^k \ \in \mathcal{A}_i,$$

ausdrücken lässt. Wir brauchen also nur für ein solches Monom zeigen, wie man es in die Form $d \cdot a_\alpha$ für geeignetes $d \in k[\pi_1, \dots, \pi_n]$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ bringen kann. Wir zeigen nun erst einmal, dass man $m = m_i$ auf die Form $m_i = d_i \cdot x_i^{(\alpha_i)}$ mit $d_i \in k[\pi_i]$ bringen kann, und zwar per Induktion über $\mathrm{ord}(m_i)$.

- $\mathrm{ord}(m_i) = 0$: Es gilt also $m_i = x_i^l = x_i^{(\alpha_i)}$ mit $\alpha_i := l$.
- $\mathrm{ord}(m_i) = k > 0$: Anders gesagt, m_i hat die Gestalt $x_i^l \partial_i^k$. Nun können folgende Fälle eintreten: Sei zunächst $1 \le i \le r$.
  - $l = 0$: Hier gilt
  $$m_i = \partial_i^k = x_i^{(\alpha_i)}$$
  mit $\alpha_i := -k$.
  - $l = 1$: In diesem Fall haben wir
  $$m_i = x_i \partial_i^k = \pi_i \partial_i^{k-1} = \pi_i x_i^{(\alpha_i)}$$
  mit $\alpha_i := -k + 1$.
  - $l \ge 2$: Wir können Rechenlemma 5.1.3.i anwenden und
  $$\begin{aligned} m_i &= x_i^l \partial_i^k \\ &= x_i (x_i^{l-1} \partial_i) \partial_i^{k-1} \\ &= x_i (\partial_i x_i^{l-1} - (l-1) x_i^{l-2}) \partial_i^{k-1} \\ &= \pi_i x_i^{l-1} \partial_i^{k-1} - (l-1) x_i^{l-1} \partial_i^{k-1} \\ &= (\pi_i - l + 1) x_i^{l-1} \partial_i^{k-1} \end{aligned}$$
  rechnen, wobei im letzten Schritt das Monom $x_i^{l-1}\partial_i^{k-1}$ nach Induktion die Form $d_i x_i^{(\alpha_i)}$ hat.

  Sei nun $r + 1 \le i \le n$. Hier können wir für jedes $l \in \mathbb{Z}$ mit Rechenlemma 5.1.3.ii das Monom $m_i = x_i^l \partial_i^k$ umformen:
  $$\begin{aligned} m_i &= x_i^l \partial_i^k \\ &= x_i x_i^{-1} \cdot x_i^l \partial_i^k \\ &= x_i (x_i^{l-1} \partial_i) \partial_i^{k-1} \\ &= x_i (\partial_i x_i^{l-1} - (l-1) x_i^{l-2}) \partial_i^{k-1} \\ &= \pi_i x_i^{l-1} \partial_i^{k-1} - (l-1) x_i^{l-1} \partial_i^{k-1} \\ &= (\pi_i - l + 1) x_i^{l-1} \partial_i^{k-1}, \end{aligned}$$
  und nach Induktionsvoraussetzung gilt
  $$x_i^{l-1} \partial_i^{k-1} = d_i \cdot x_i^{\alpha_i} = d_i \cdot x_i^{(\alpha_i)}$$
  für ein geeignetes $d_i \in k[\pi_i]$ und $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Daraus folgt nun im Handumdrehen die Aussage für ein beliebiges Standardbasis-Monom $m = m_1 \dots m_n$:

$$\begin{aligned} m &= m_1 \dots m_n \\ &= d_1 \cdot x_1^{(\alpha_1)} \dots d_n \cdot x_n^{(\alpha_n)} \\ &= d_1 \dots d_n \cdot x_1^{(\alpha_1)} \dots x_n^{(\alpha_n)} \\ &= d \cdot a_\alpha, \end{aligned}$$

weil in der Weylalgebra Erzeuger mit unterschiedlichem Index immer kommutieren. Als letztes fehlt, dass die Summe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{A}_0 \cdot a_\alpha = \mathcal{A}$$

bereits eine direkte Summe

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{A}_0 \cdot a_\alpha = \mathcal{A}$$

war. Dies ist jedoch eine Standardaussage für Gewichtsraumzerlegungen, die sich beispielsweise in [TY05, Lemma 22.4.6] nachlesen lässt. ☺

Korollar 5.3.6. Die Weylalgebra-Konfiguration $(\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \phi)$ erfüllt die Bedingungen (A1) und (A2).

Möchte man für einen beliebigen Unterraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ und $\chi \in \mathfrak{g}^*$ zum zentralen Quotienten der $\mathfrak{g}$-Invarianten $B^\chi = \mathcal{A}^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^\mathfrak{g}$ übergehen, so stellt sich die Frage, wie das Gewichtsgitter Supp B^χ in diesem Fall aussieht (vergleiche Bemerkung 4.2.6).

Lemma 5.3.7. Es gilt Supp $B^\chi =$ Supp $\mathcal{A}^\mathfrak{g} = \mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g})$.

Beweis.

- Die zweite Gleichheit benutzt Supp $\mathcal{A}^\mathfrak{g} =$ Supp $\mathcal{A} \cap V(\mathfrak{g})$ aus Bemerkung 4.4.3 sowie die Beobachtung aus Satz 5.3.3, dass der Träger von $\mathcal{A}$ gerade $\mathbb{Z}^n \subset \mathfrak{t}^*$ ist.
- Die erste Gleichheit resultiert aus der Nullteilerfreiheit von $\mathcal{A}$: Wie in Bemerkung 4.2.6 festgestellt wurde, ist der Träger von B^χ in jedem Fall im Träger von $\mathcal{A}^\mathfrak{g}$ enthalten, und es bleibt nur zu zeigen, dass
$$(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}_\alpha \subsetneq \mathcal{A}_\alpha$$
für alle $\alpha \in \mathrm{Supp}\mathcal{A}^\mathfrak{g}$ gilt. Nun ist aber $\mathcal{A}_\alpha = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})\cdot a_\alpha$ und jedes Element aus $\mathcal{A}_\alpha$ besitzt eine eindeutige Darstellung da_α für ein geeignetes $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, eindeutig deshalb, weil aus $da_\alpha = d'a_\alpha$ bzw. $(d-d')a_\alpha = 0$ folgt, dass $d = d'$ gewesen sein muss ($\mathcal{A}$ ist nach Proposition 5.1.9 nullteilerfrei). Für $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$, aber $d \notin (\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ folgt $da_\alpha \notin (\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}_\alpha$. ☺

5.4 Der Träger von Moduln über der Weylalgebra

Wie schon gesagt - es ist sehr bemerkenswert, dass die Gewichte der Weylalgebra alle in $\mathbb{Z}^n \subset \mathfrak{t}^*$ liegen. Dies hat auch Konsequenzen für die $\mathfrak{t}^*$-Gewichte von Moduln über der Weylalgebra, insbesondere für solche in $\mathcal{O}^{(p)}$. Natürlich muss der Träger eines solchen Moduls nicht selbst in $\mathbb{Z}^n$ liegen, aber dennoch kann man erwarten, dass das $\mathbb{Z}$-Gitter in der Beschreibung des Trägers auftaucht:
Betrachten wir einen A-Modul $M \in \mathcal{O}^{(p)}$. Insbesondere ist solch ein Modul graduiert, also gilt $A_\alpha M_{(\beta)} \subset M_{(\alpha+\beta)}$. Ist M im Grad β erzeugt, so folgt ganz allgemein, dass sein Träger in $\beta + \mathrm{Supp}\,(A)$ liegt. Ist $A = \mathcal{A}$ nun die Weylalgebra, so ergibt sich, dass sein Träger in $\beta + \mathbb{Z}^n$ liegt.
Um gleich konkreter zu beschreiben, wie sich die Gewichte der projektiven und der einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ bezüglich der Weylalgebra $\mathcal{A}$ verhalten, erinnern wir in der folgenden Proposition an die Eigenschaften des Tensorprodukts zweier Konfigurationen, speziell für das Tensorprodukt von zwei Weylalgebren.

Proposition 5.4.1 (Das Tensorprodukt von Weylalgebren).

i) Die Weylalgebra $\mathcal{A}$ ist nach Lemma 5.1.5.i Tensorprodukt von n kleinen Weylalgebren $\mathcal{A}_i$ mit
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &:= k[x_i, \partial_i] && \text{für } i \le r \\ \mathcal{A}_i &:= k[x_i^{\pm 1}, \partial_i] && \text{für } i > r, \end{aligned}$$
insbesondere ist sie das Tensorprodukt von r Kopien von $k[x, \partial]$ sowie s Kopien von $k[x, x^{-1}, \partial]$.

ii) Sind $(\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \mathrm{incl})$ und $(\mathcal{A}', \mathfrak{t}', \mathrm{incl}')$ zwei Weylalgebra-Konfigurationen, so gilt nach Lemma 4.1.2, dass
$$(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}', \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}', (\mathrm{incl}: \ (t, t') \mapsto \mathrm{incl}(t) \otimes \mathrm{incl}'(t')))$$
wieder eine solche Konfiguration ist. Zusätzlich ist $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}'$ wieder eine Weylalgebra, und $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}'$ stimmt mit der 'Cartanunteralgebra' von $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}'$ überein.

iii) Nach Lemma 4.1.5 gilt in $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}'$ die Relation $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ genau dann, wenn $\beta_1 \underset{\alpha_1}{\rightsquigarrow} \gamma_1$ und $\beta_2 \underset{\alpha_2}{\rightsquigarrow} \gamma_2$ ist.

iv) Es gilt ebenfalls nach Lemma 4.1.5, dass $\beta \sim \gamma$ genau dann äquivalent sind, wenn $\beta_1 \sim \gamma_1$ und $\beta_2 \sim \gamma_2$ ist.

Nun lassen sich die Relationen $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ und $\sim$ sehr konkret beschreiben, trotz ihrer eher abstrakten Definition. Diese schönen Resultate stammen aus [MVdB98, Proposition 6.1, Korollar 6.2] und sind fundamental für alle weiteren geometrischen Beschreibungen des Trägers von einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$. Sie liefern zugleich die Quelle für die Beispiele im nächsten Abschnitt.

Satz 5.4.2. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{t}^*$. Es gilt $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. α, β und γ liegen im gleichen Gitter, also
$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n.$$

2. Falls $1 \leq i \leq r$ derart ist, dass $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ liegt, so müssen die folgenden Implikationen gelten:
$$\begin{aligned} \alpha_i \geq 0,\ \beta_i < 0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma_i < 0, \\ \alpha_i < 0,\ \beta_i \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \gamma_i \geq 0. \end{aligned}$$

Beweis. Man muss diese Aussage nur für die Weylalgebren $k[x, \partial]$ und $k[x, x^{-1}, \partial]$ nachprüfen, sie vererbt sich nach Proposition 5.4.1.ii auf Tensorprodukte dieser kleinsten Weylalgebren, und damit wegen Proposition 5.4.1.i auf alle Weylalgebren. Der Vorteil davon ist, dass $\mathfrak{t}$ in diesen beiden Fällen nur eindimensional ist, dass also α, β und γ in k liegen und dass $\mathfrak{m}_\alpha$ die Form $\mathfrak{m}_\alpha = k[\pi] \cdot (\pi - \alpha) \subset k[\pi] = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) = \mathcal{A}_0$ hat. Außerdem haben die Erzeuger a_α der Gewichtsräume $\mathcal{A}_\alpha$ die simple Form $a_\alpha = x^{(\alpha)}$.

Man erinnere sich an Lemma 2.4.28: Demzufolge gilt
$$\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A}_{\gamma-\beta}\mathcal{A}_{\beta-\alpha} \not\subseteq \mathcal{A}_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha,$$
und mit dieser Formulierung werden wir nun arbeiten. Es geht direkt daraus hervor, dass für $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ auf jeden Fall
$$\gamma - \beta \in \mathbb{Z},\ \beta - \alpha \in \mathbb{Z} \text{ und damit auch } \gamma - \alpha \in \mathbb{Z}$$
gelten muss, da sonst die zugehörigen Gewichtsräume 0 und damit unweigerlich in der linken Seite enthalten wären, mit anderen Worten, wir haben die Implikation
$$\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \text{Bedingung (1)}$$
gezeigt. Kommen wir nun zu den anderen Implikationen: Hier müssen wir zwischen $k[x, \partial]$ und $k[x, x^{-1}, \partial]$ unterscheiden, weil die Erzeuger der Gewichtsräume verschieden aussehen.

- Im Fall $\mathcal{A} = k[x, x^{-1}, \partial]$ ist Bedingung (2) leer und wir müssen nur noch sehen, wie aus Bedingung (1) folgt, dass $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ ist: Seien $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \mod \mathbb{Z}$. Es folgt wegen $x^{(m)} = x^m$ für $m \in \mathbb{Z}$, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\gamma-\beta} &= k[\pi]x^{(m)} &= k[\pi]x^m \quad &\text{für } m := \gamma - \beta \in \mathbb{Z} \\ \mathcal{A}_{\beta-\alpha} &= k[\pi]x^{(n)} &= k[\pi]x^n \quad &\text{für } n := \beta - \alpha \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ist. Nach Lemma 5.3.1 gilt ferner

$$k[\pi]x^m = x^m k[\pi]$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\gamma-\beta}\mathcal{A}_{\beta-\alpha} &= k[\pi]x^m \; k[\pi]x^n \\ &= k[\pi]x^{m+n} \\ &= \mathcal{A}_{\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$

Nun können wir schließen, dass

$$\mathcal{A}_{\gamma-\beta}\mathcal{A}_{\beta-\alpha} = \mathcal{A}_{\gamma-\alpha} \nsubseteq \mathcal{A}_{\gamma-\alpha}\mathfrak{m}_\alpha.$$

- Nun geht es um die Weylalgebra $\mathcal{A} = k[x, \partial]$. Wir haben schon gesehen, dass aus $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ automatisch die Bedingung (1) folgt, somit können wir für den weiteren Beweis annehmen, dass (1) erfüllt ist und wir mit $m := \beta - \alpha$ und $n := \gamma - \beta$ zeigen müssen:

$$\begin{aligned} &\text{Ist } \alpha \in \mathbb{Z}, \text{ so gilt} \quad (\alpha + m) \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} (\alpha + m + n) \quad \text{genau dann, wenn} \\ &\qquad \alpha \geq 0,\ \alpha + m < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + n + m < 0, \\ &\qquad \alpha < 0,\ \alpha + m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + n + m \geq 0. \end{aligned}$$

Man bemerkt zunächst: Nach Lemma 5.3.1 gilt

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_m = k[\pi]x^{(n)} \cdot k[\pi]x^{(m)} = k[\pi]x^{(n)}x^{(m)}.$$

Dies liegt in $k[\pi]x^{(n+m)}$, und wir müssen nun schauen, ob bei der Überführung von $x^{(n)}x^{(m)}$ in ein Element aus $k[\pi]x^{(n+m)}$ der Faktor $(\pi - \alpha)$ entsteht oder nicht, um zu entscheiden, ob

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_m \nsubseteq \mathcal{A}_{n+m}\mathfrak{m}_\alpha$$

gilt. Hierbei nutzen wir die Nullteilerfreiheit von $\mathcal{A}$ aus, die uns in der Darstellung eines Elementes in $d \cdot x^{(n+m)} \in k[\pi]x^{(n+m)}$ gewährleistet, dass $d \in k[x]$ eindeutig bestimmt ist. Nun nimmt man eine Fallunterscheidung vor, wobei man glücklicherweise sieht, dass in fast allen Fällen $(\alpha + m) \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} (\alpha + n + m)$ ohne Einschränkungen wahr ist (nur eben nicht für $\alpha \geq 0,\ \alpha + m < 0$ und $\alpha < 0,\ \alpha + m \geq 0$, was wir gerade zeigen wollen).

  - $\alpha \in \mathbb{Z}$:
    * $n \geq 0$, $m \geq 0$:
      Hier ist stets $x^{(n)}x^{(m)} = x^n x^m = x^{n+m} = x^{(n+m)}$, also gilt ohne weitere Bedingungen $\mathcal{A}_n\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{n+m} \nsubseteq \mathcal{A}_{n+m}\mathfrak{m}_\alpha$.
    * $n < 0$, $m \geq 0$:
      Hier ist $x^{(n)}x^{(m)} = \partial^{-n}x^m$, und wir müssen umsortieren, um zu sehen, wie genau $\mathcal{A}_n\mathcal{A}_m$ in $\mathcal{A}_{n+m}$ liegt. Mit Rechenlemma 5.1.3.i bekommen wir:

$$\partial^{-n}x^m = \begin{cases} x^{(n+m)}(\pi + m)\dots(\pi + 1), & \text{falls } -n \geq m \\ x^{(n+m)}(\pi + m)\dots(\pi + n + m + 1), & \text{falls } -n < m. \end{cases}$$

Ist α positiv oder Null, so ist sicher keiner der obigen Faktoren in $\mathfrak{m}_\alpha$ enthalten und es ergeben sich keine Bedingungen. Ist α negativ, aber sogar $\alpha < -m$, kann ebenfalls keiner der obigen Faktoren in $\mathfrak{m}_\alpha$ liegen. Nur für $\alpha + m \geq 0$ müssen wir aufpassen: Im Fall $-n \geq m$ (also $\gamma = \alpha + n + m < 0$) ist $(\pi + m) \dots (\pi + 1)$ auf jeden Fall in $\mathfrak{m}_\alpha$. Nur im Fall $-n < m$ ist noch was zu machen: Dann muss $\alpha > -(n+m+1)$ gefordert werden. Wir haben also aus $(\alpha+m) \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} (\alpha+n+m)$ die Bedingung

$$\alpha < 0,\ \alpha + m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + n + m \geq 0$$

hergeleitet. Setzen wir dies für die andere Richtung voraus, so landen wir dank $\alpha + n + m \geq 0$ in genau dem Fall, für den wir eben nachgerechnet haben, dass tatsächlich $\mathcal{A}_n\mathcal{A}_m \not\subseteq \mathcal{A}_{n+m}\mathfrak{m}_\alpha$ gilt.

∗ $n \geq 0$, $m < 0$:
Ähnlich wie eben wird mit Lemma 5.1.3.iii nachgerechnet, dass

$$x^{(n)}x^{(m)} = \begin{cases} x^{(n+m)}(\pi + m + 1) \dots (\pi + 1)\pi, & \text{falls } n \geq -m \\ x^{(n+m)}(\pi + m + 1) \dots (\pi + n + m), & \text{falls } n < -m. \end{cases}$$

gilt. Und genauso wie vorhin schließt man daraus, dass sich nur für $\alpha \geq 0$ irgendwelche Beschränkungen für die Wahl von $\beta = \alpha + m$ und $\gamma = \alpha + n + m$ ergeben. Ist $\alpha > -(m+1)$ (d.h. $\alpha + m \geq 0$), so müssen wir uns in der Wahl von γ keine Bedingungen auferlegen, aber falls $\alpha \leq -(m+1)$ ist, muss $\alpha < -(m+n)$ gefordert werden, und wir haben die Bedingung

$$\alpha \geq 0,\ \alpha + m < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + n + m < 0$$

nachgerechnet.

∗ $n < 0$, $m < 0$:
Hier ist stets $x^{(n)}x^{(m)} = \partial^{-n}\partial^{-m} = x^{n+m}$, also $\mathcal{A}_m\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+m}$, es entstehen keine Bedingungen.

– $\alpha \notin \mathbb{Z}$: Die Bedingung $\mathcal{A}_m\mathcal{A}_n \not\subseteq \mathcal{A}_{n+m}\mathfrak{m}_\alpha$ ist hier stets erfüllt, weil beim Vertauschen der Faktoren von $x^{(m)}x^{(n)}$ nur ganzzahlige Koeffizienten entstehen und kein Faktor $(\pi - \alpha)$ auftauchen kann. ☺

Korollar 5.4.3. Seien $\beta, \gamma \in \mathfrak{t}^*$. Es gilt $\beta \sim \gamma$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. β und γ liegen im gleichen Gitter, also
$$\beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n.$$
2. Falls $1 \leq i \leq r$ derart ist, dass β_i bzw. γ_i in $\mathbb{Z}$ liegt, so ist $\beta_i \geq 0$ genau dann, wenn $\gamma_i \geq 0$ ist.

Beweis. Laut Lemma 2.4.28 gelten $\beta \sim \gamma$ und $\beta, \gamma \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha)$ genau dann, wenn $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ und $\gamma \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \beta$. Nach der letzten Proposition ist dies genau dann der Fall, wenn

- $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n$
- Sofern $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$, so gilt $(\alpha_i \geq 0,\ \beta_i < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_i < 0)$,
bzw. $(\alpha_i < 0,\ \beta_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_i \geq 0)$
- Sofern $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$, so gilt $(\alpha_i \geq 0,\ \gamma_i < 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i < 0)$,
bzw. $(\alpha_i < 0,\ \gamma_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i \geq 0)$.

Dies ist äquivalent zu

- $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n$
- Sofern $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$, so gilt $(\alpha_i \geq 0,\ \beta_i < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i < 0)$, bzw. $(\alpha_i < 0,\ \beta_i \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i \geq 0)$,

was wiederum zu

- $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n$
- Sofern $\beta_i \in \mathbb{Z}$ bzw. $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$, so gilt $(\beta_i \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i \geq 0)$

verkürzt werden kann, da das Vorzeichen von α bedeutungslos geworden ist. α kann nun aus der Äquivalenzumformungskette 'entfernt' werden, indem man den Spezialfall $\alpha = \beta$ (oder genausogut $\alpha = \gamma$) betrachtet. Sicherlich ist $\beta \in \operatorname{Supp} L(\beta) \subset \operatorname{Supp} M^{(1)}(\beta)$, und wegen $\gamma \sim \beta$ ist auch $\gamma \in \operatorname{Supp} L(\beta) \subset \operatorname{Supp} M^{(1)}(\beta)$. Somit ist '$\beta, \gamma \ \in \operatorname{Supp} M^{(1)}(\beta)$' unter der Annahme $\beta \sim \gamma$ eine leere Bedingung. Ebenso kann nun die Bedingung '$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n$' durch '$\beta \equiv \gamma \bmod \mathbb{Z}^n$ ersetzt werden. ☺

Der Korollar reformuliert dies nur:

Korollar 5.4.4. $\langle\alpha\rangle = \{\beta \in \mathfrak{t}^* \mid \beta \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n \text{ und } \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Leftrightarrow \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall 1 \leq i \leq r\}$.

5.5 Beispiele

Die letzten Aussagen über die Gewichte von Untermoduln von $M^{(1)}(\alpha)$ sowie von dessen einfachem Quotienten $L(\alpha)$ beinhalten Aussagen über $\mathbb{Z}$-Gitter und Ungleichungsbedingungen, eröffnen also die Möglichkeit, die auftretenden Gewichte in $\mathfrak{t}^*$ als Punkte im $k^n \cong \mathfrak{t}^*$ aufzufassen und dort geometrisch zu beschreiben. Zur besseren Visualisierung folgen also ein paar Beispiele von Gewichtsgittern von $M^{(1)}(\alpha)$ sowie den Relationen $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ und $\sim$.

Beispiel 5.5.1 (Die winzige Weylalgebra). Wir beginnen mit $\mathcal{A} = k[x, \partial] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} \operatorname{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot x^{(\alpha)}$, $\mathfrak{t} = \operatorname{span}_k \{x\partial\}$. Für jedes $M^{(1)}(\alpha)$ ist $\operatorname{Supp} M^{(1)}(\alpha) = \alpha + \mathbb{Z}$ das Gewichtsgitter und sieht wie folgt aus:

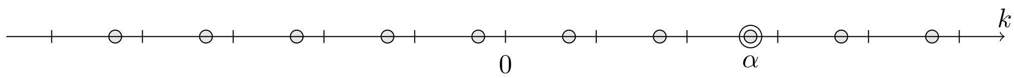


Abbildung 1: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ mit $\alpha = 2.7$

Wir wollen die Frage untersuchen, für welche $\beta, \gamma \in \alpha + \mathbb{Z}$ die Relation $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ erfüllt ist. Es muss zwischen folgenden zwei Fällen bei der Wahl eines $\alpha \in V(\ker(\phi)) = \mathfrak{t}^* \cong k$ unterschieden werden:

1. $\alpha \notin \mathbb{Z}$: In diesem Fall gilt nur die Gitterbedingung, aber die Ungleichungsbedingungen sind leer. Daher erhält man stets dasselbe Bild: Egal, für welches $\beta \in \alpha + \mathbb{Z}$ man das Erzeugnis von $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ betrachtet - man bekommt immer den gesamten Modul $M^{(1)}(\alpha)$ zurück.

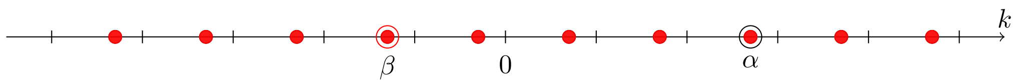


Abbildung 2: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ mit $\alpha = 2.7$ und Gewicht $\beta = -1.3$ - alle Gewichtsräume werden durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht

Liegt β erst gar nicht im Gewichtsgitter $\alpha + \mathbb{Z}$, so ist $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} = (0)$ und man erhält bloß den trivialen Untermodul.

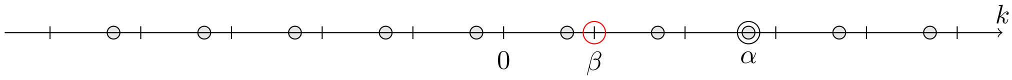


Abbildung 3: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ mit $\alpha = 2.7$ und Gewicht $\beta = 1$ - kein Gewichtsraum wird durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht

Also gibt es keine echten Untermoduln, und es ist $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ für alle $\beta, \gamma \in \alpha + \mathbb{Z}$.

2. $\alpha \in \mathbb{Z}$: Im zweiten Fall wird das Bild etwas vielfältiger. Hier 'aktiviert' $\alpha \in \mathbb{Z}$ die Ungleichungsbedingungen, es können folgende Situationen eintreten: Spielen wir die drei Möglichkeiten für $\alpha \geq 0$ durch, in den Abbildungen ist zum Beispiel $\alpha = 3$ gewählt. Hier ist genau dann $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$, wenn für $\beta < 0$ auch $\gamma < 0$ ist. $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ erzeugt hier also einen nichttrivialen Untermodul.

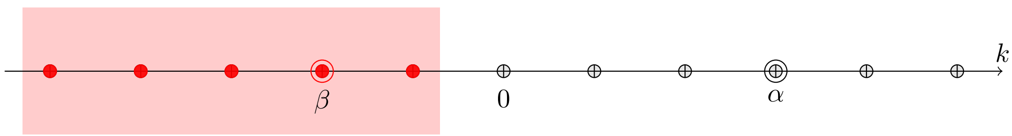


Abbildung 4: Gewichtsgitter eines $M(\alpha)$ mit $\alpha = 3$ und Gewicht $\beta = -2$ - *nicht* alle Gewichtsräume werden durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht und man erhält einen nichttrivialen Untermodul (rosa)

Ist dagegen $\beta \geq 0$, so greift die Ungleichungsbedingung auch wieder nicht und man erhält den gesamten Modul $M^{(1)}(\alpha)$ für $\bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}} A_{\gamma \bullet} M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$.

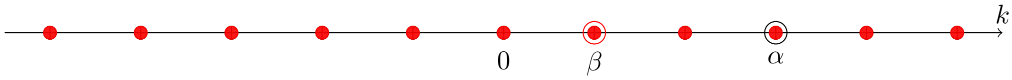


Abbildung 5: Gewichtsgitter eines $M(\alpha)$ mit $\alpha = 3$ und Gewicht $\beta = 1$ - *jeder* Gewichtsraum wird durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht

Ist β wieder nicht mal im Gewichtsgitter $\alpha + \mathbb{Z}$, so ist $M^{(1)}(\alpha)_\beta = (0)$ und der zugehörige Untermodul ist trivial:

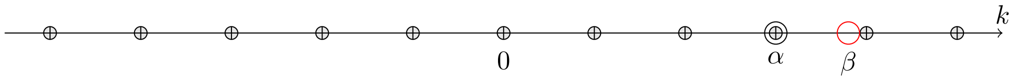


Abbildung 6: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ mit $\alpha = 3$ und Gewicht $\beta = 3.8$ - kein Gewicht wird von β aus durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht

Als letztes wird untersucht, was für integrales $\alpha < 0$ passiert - dies unterscheidet sich kaum vom Fall $\alpha \geq 0$ und wird daher nicht näher erläutert.

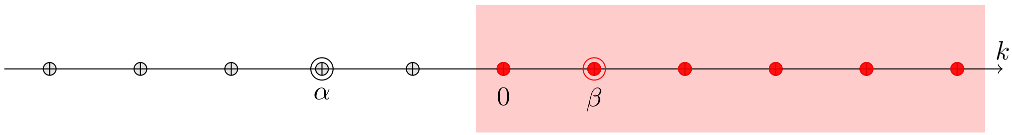


Abbildung 7: Gewichtsgitter eines $M(\alpha)$ mit $\alpha = -2$ und Gewicht $\beta = 1$ - *nicht* alle Gewichtsräume werden durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht und man erhält einen nichttrivialen Untermodul (rosa)

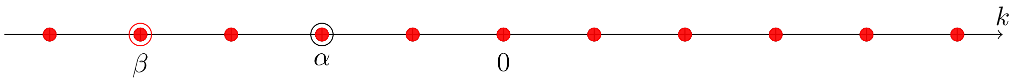


Abbildung 8: Gewichtsgitter eines $M(\alpha)$ mit $\alpha = -2$ und Gewicht $\beta = -4$ - *jedes* Gewicht wird von β aus durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht

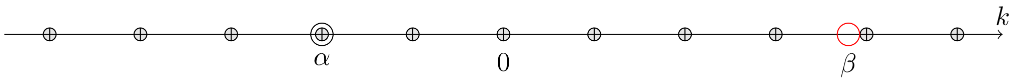


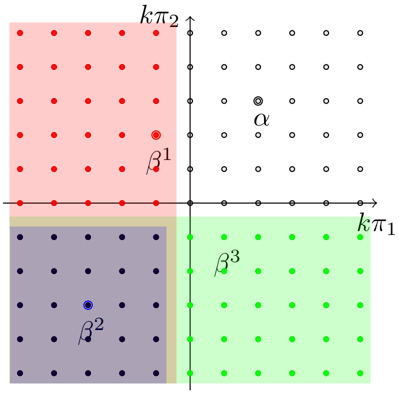
Abbildung 9: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ mit $\alpha = -2$ und Gewicht $\beta = 3.8$ - kein Gewichtsraum wird von β aus durch $\underset{\alpha}{\rightsquigarrow}$ erreicht

Noch schnell ein Blick auf die andere Weylalgebra mit eindimensionaler 'Cartan':

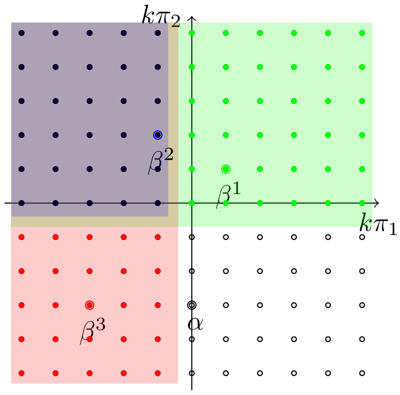
Beispiel 5.5.2 (Die zweitkleinste Weylalgebra).
Betrachte hier $\mathcal{A} = k[x, x^{-1}, \partial] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot x^{(\alpha)}$, $\mathfrak{t} = \mathrm{span}_k \{x\partial\}$. Wieder ist für jedes $M^{(1)}(\alpha)$ das Gewichtsgitter gerade $\alpha + \mathbb{Z}$. Weil die Ungleichungsbedingungen von Satz 5.4.2 allerdings nur für $1 \leq i \leq r$ aktiviert werden und für $\mathcal{A} = k[x, x^{-1}, \partial]$ nach Definition $r = 0$ ist, ist hier in der Frage nach $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ nur die Gitterbedingung zu beachten. Und aus der folgt, dass $\beta \underset{\alpha}{\rightsquigarrow} \gamma$ genau für alle $\beta, \gamma \in \alpha + \mathbb{Z}$ gilt. Für die Untermoduln, die von $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ erzeugt werden, heißt das, dass sie entweder (0) oder das ganze $M^{(1)}(\alpha)$ sind. Also gibt es keine nichttrivialen Untermoduln.

Nun haben wir ja gesehen, dass sich jede Weylalgebra durch Tensorieren dieser beiden kleinsten Weylalgebren zusammenfügen lässt. Was heißt das für unser Bild mit dem Gewichtsgitter?

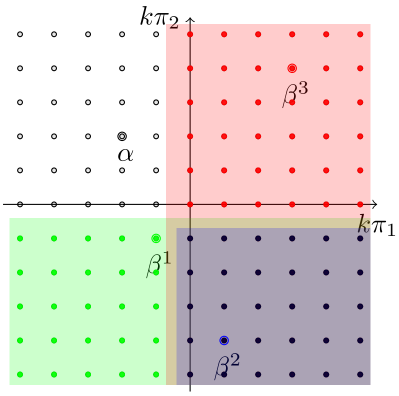
Beispiel 5.5.3 (Eine etwas größere Weylalgebra). Hier wird nun das Bild untersucht, das sich für $\mathcal{A} = k[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ und $\mathfrak{t} = \mathrm{span}_k \{\pi_1, \pi_2\}$ ergibt. Die komplette Beschreibung aller möglichen Fälle wäre sehr lang, daher werden hier alle Konfigurationen ausgelassen, für die $A_{\bullet} M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)}$ entweder Null oder alles ist (insbesondere konzentrieren wir uns auf $\alpha \in \mathbb{Z}^2$): Nur die echten nichttrivialen Untermoduln sind schließlich von Interesse.



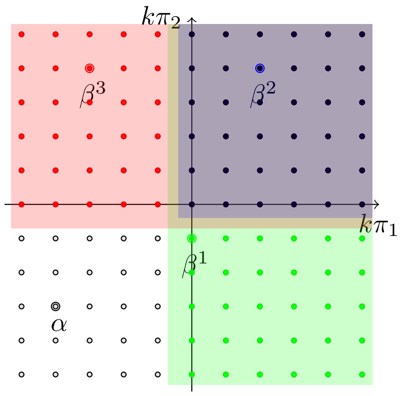
(a) $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$: Hier $\alpha = (2, 3)$



(b) $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 < 0$: Hier $\alpha = (0, -3)$



(c) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 \geq 0$: Hier $\alpha = (-2, 2)$



(d) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$: Hier $\alpha = (-4, -3)$

Abbildung 10: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ und seine drei nichttrivialen zyklischen Untermoduln, erzeugt von $M^{(1)}(\alpha)_{(\beta^i)}$ (für β^i-Beispiele aus den jeweiligen Quadranten).

In diesem Beispiel kann man schön sehen, wie oben rechts der einfache Kopf $L(\alpha)$ stehen bleibt, wenn man den bunten maximalen Untermodul rausteilt. In der Tat sind gerade diejenigen $\gamma \sim \alpha$, die zusammen mit α im jeweiligen ausgesparten Quadranten im Gewichtsgitter sitzen. Man erhält also folgende Aufteilung von $\mathbb{Z}^2 \subset \mathfrak{t}^*$ in Regionen $\langle\alpha\rangle$:

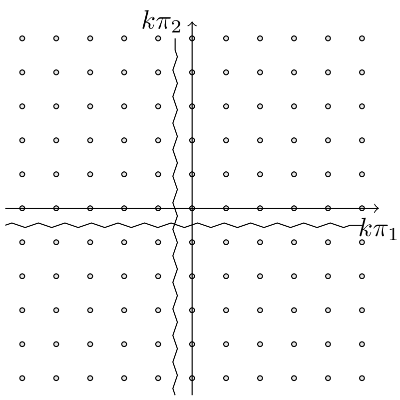
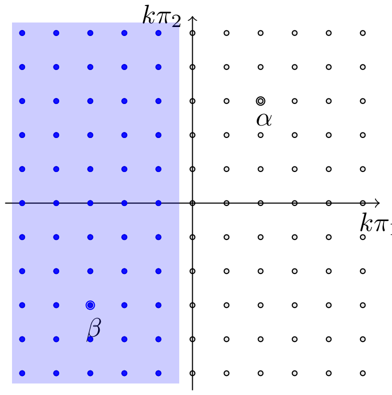
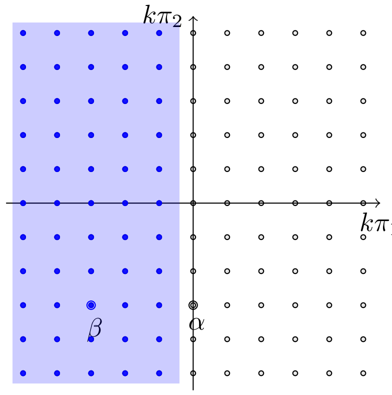


Abbildung 11: Aufteilung des Gewichtsgitters der Weylalgebra in die Regionen $\langle\alpha\rangle$.

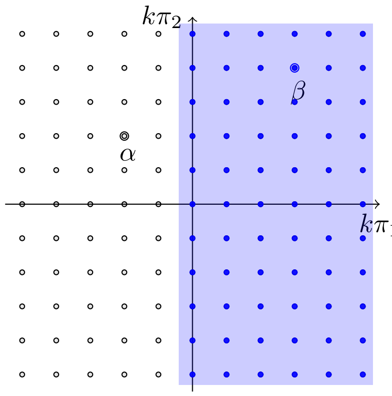
Beispiel 5.5.4 (Noch eine Weylalgebra).
Im Unterschied dazu ist das Bild für $\mathcal{A} = k[x_1, x_2, x_2^{-1}, \partial_1, \partial_2]$ und $\mathfrak{t} = \operatorname{span}_k \{\pi_1, \pi_2\}$ ein etwas anderes. Zwar hat $\mathfrak{t}$ dieselbe Dimension, und es ist immer noch das $\mathbb{Z}^2$-Gitter im $\mathfrak{t}^* = k^2$, welches für die einzigen interessanten Untermoduln sorgt. Aber wie schon in Satz 5.4.2 gesehen, sind in diesem Fall weniger Ungleichungsbedingungen 'aktiv'. Für den Vergleich ziehen wir wieder die gleichen Gewichte wie im obigen Beispiel heran, um zu sehen, was sich verändert, wenn man ein x_i^{-1} hinzunimmt.



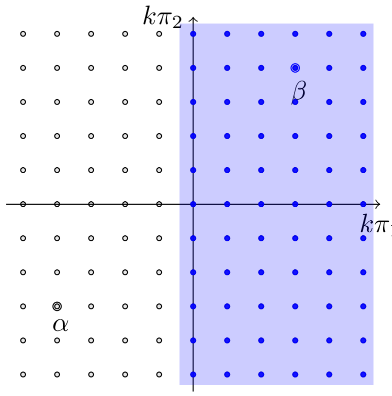
(a) $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$: Hier $\alpha = (2, 3)$



(b) $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 < 0$: Hier $\alpha = (0, -3)$



(c) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 \geq 0$: Hier $\alpha = (-2, 2)$



(d) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$: Hier $\alpha = (-4, -3)$

Abbildung 12: Gewichtsgitter eines $M^{(1)}(\alpha)$ und seine Untermoduln für unterschiedliche Vorzeichenkonfigurationen von α. Hier gibt es deutlich weniger verschiedene Untermoduln, weil nur noch das Vorzeichen von β_1 bei der Beschreibung eines Untermoduls von Bedeutung ist.

Hier kann man sehen, wie im Unterschied zu obigem Bild eine Ungleichungsbedingung weniger aktiv ist: Soll der Gewichtsraum zu β (aus dem Gewichtsgitter) einen Untermodul erzeugen, so spielt nur noch das Vorzeichen von β_1 eine Rolle, während das Vorzeichen von β_2 bedeutungslos geworden ist. Die wegfallende Ungleichungsbedingung äußert sich darin, dass weniger verschiedene echte Untermoduln entstehen, und damit bekommt man auch nur zwei nichtisomorphe einfache Moduln: Man erhält in diesem Fall also eine andere Aufteilung von $\mathbb{Z}^2 \subset \mathfrak{t}^*$ in Regionen $\langle\alpha\rangle$.

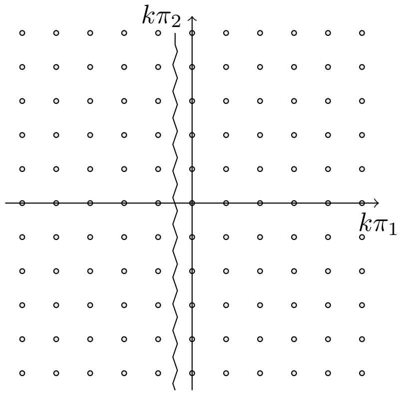


Abbildung 13: Aufteilung des Gewichtsgitters der Weylalgebra $k[x_1, x_2, x_2^{-1}, \partial_1, \partial_2]$ in die Regionen $\langle\alpha\rangle$.

Bemerkung 5.5.5. Nun ist es allerdings so, dass diese Regionen $\langle\alpha\rangle$ unendlich viele Punkte im k^2 umfassen, und zwar derart, dass ihr Zariski-Abschluss der ganze k^2 ist. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ ist damit $\overline{\langle\alpha\rangle} = k^2$, und damit sind die $\overline{\langle\alpha\rangle}$ nicht mehr unterscheidbar, obwohl sich vor dem Abschließen so eine nette Aufteilung in verschiedene Regionen ergab. Theorem 3.2.17 sagt uns, dass es nur genau einen Annihilator von einfachen Moduln in A-grmod für die Weylalgebra $\mathcal{A}$ gibt. Das ist auch gut so, denn der Annihilator ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$, wovon es aber nur das Nullideal gibt, weil die Weylalgebra nach Proposition 5.1.9 einfach ist.

Im Folgenden müssen wir uns also auf die Suche nach anderen Algebren mit interessanteren Annihilatoren machen. Wir werden fündig, wenn wir unsere Weylalgebra etwas abwandeln.

5.6 Die Algebra B^χ für die verallgemeinerte Weylalgebra

In diesem Abschnitt beschreiben wir, was mit der verallgemeinerten Weylalgebra $\mathcal{A}$ beim Übergang zur Algebra B^χ geschieht. Insbesondere wollen wir untersuchen, wie die Regionen $\langle\alpha\rangle$ in $V(\ker(\phi))$ aussehen. Dazu müssen wir $V(\ker(\phi))$ und das Gewichtsgitter Supp (B^χ) beschreiben. Zunächst verschaffen wir uns aber einen Kurzüberblick über die bisher zusammengetragenen Informationen rund um die unveränderte Weylalgebra (um bei den nachfolgenden Umformungen darauf zurückgreifen zu können und nicht die Übersicht zu verlieren).

Bemerkung 5.6.1 (Übersicht für die Weylalgebra $\mathcal{A}$).

- Die Konfiguration:
  - $\mathcal{A} = k[x_1, \dots x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, \partial_1, \dots, \partial_n]$
  - $\mathfrak{t} = \operatorname{span}_k \{\pi_1, \dots, \pi_n \mid \pi_i = x_i\partial_i\}$
  - $\phi = \mathrm{incl} : \mathfrak{t} \to \mathcal{A}$
  - $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) = \mathcal{A}_0 = k[\pi_1, \dots, \pi_n]$
  - $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ korresponiert zu $\mathfrak{m}_\alpha \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$,

$$\mathfrak{m}_\alpha = \ker(\alpha) = (\pi_1 - \alpha(\pi_1), \dots, \pi_n - \alpha(\pi_n))$$

- Die Gewichte von $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{t}^*} \mathcal{A}_\alpha$ bilden ein Gitter:

$$\mathrm{Supp}\,(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}^n \subset k^n \cong \mathfrak{t}^*$$

- Die Gewichte von Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ liegen in $V(\ker(\phi)) = \mathfrak{t}^*$ (Lemma 2.4.9).

Wir fixieren nun einen Unterraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$. Wie im Technikkapitel 4 beschrieben, kann man nun zunächst einmal zur Unteralgebra

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{g}} = \{a \in \mathcal{A} \mid [\phi(\mathfrak{g}), a] = 0\}$$

der Invarianten von $\mathcal{A}$ unter der Wirkung eines Unterraums $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ übergehen, um hiervon anschließend den zentralen Quotienten

$$B^{\chi} = \mathcal{A}^{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$$

mit $\chi \in \mathfrak{g}^*$ zu bilden. Die folgende Übersicht beruht auf dem Technikkapitel 4.4 über die Eigenschaften von B^{χ}, angewendet auf die Weylalgebra.

Bemerkung 5.6.2 (Übersicht für B^{χ}).

- Die Konfiguration:
  - $B^{\chi} \;=\; \mathcal{A}^{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}$
  - $\mathfrak{t} := \operatorname{span}_k \{\pi_1, \ldots, \pi_n \mid \pi_i = x_i \partial_i\}$
  - $\phi = \operatorname{proj} \circ \operatorname{incl} : \mathfrak{t} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}^{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$
  - $\operatorname{Sym}(\mathfrak{t}) = k[\pi_1, \ldots, \pi_n]$
  - $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ korresponiert zu $\mathfrak{m}_\alpha \subset \operatorname{Sym}(\mathfrak{t})$,

$$\mathfrak{m}_\alpha = \ker(\alpha) = (\pi_1 - \alpha(\pi_1), \ldots, \pi_n - \alpha(\pi_n))$$

- Die Gewichte von $B^{\chi} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} (B^{\chi})_\alpha$ bilden nach Lemma 5.3.7 ein Gitter:

$$\operatorname{Supp}(B^{\chi}) = \operatorname{Supp}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}) = \mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g}) \subset k^n \cong \mathfrak{t}^*$$

- Die Gewichte von Moduln in $\mathcal{O}^{(p)}$ liegen Lemma 2.4.9 kombiniert mit Lemma 4.4.5 zufolge in

$$V(\ker(\phi_{B^{\chi}})) = V(\ker(\operatorname{incl})) \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})).$$

Definition 5.6.3. Zur besseren Unterscheidung der Regionen $\langle \alpha \rangle$ bezüglich der Algebren $\mathcal{A}$ oder B^{χ} werden die Regionen von nun an im Index mit der zugrundeliegenden Algebra gekennzeichnet, also $\langle \alpha \rangle_{B^{\chi}}$ oder $\langle \alpha \rangle_{\mathcal{A}}$.

Nach wie vor sind wir an den Regionen $\langle \alpha \rangle_{B^{\chi}}$ interessiert, die sich innerhalb von $V(\ker(\phi_{B^{\chi}})) = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ befinden. Wir wollen darum jetzt den affinen Raum $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{t}^*$ explizit beschreiben. Dazu verwenden wir wie immer die Identifikation

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^* &\cong k^n \\ \pi_i^* &\mapsto e_i \end{aligned}$$

und erinnern uns, dass laut Lemma 5.3.1

$$[\pi_i, x_j] \;=\; \delta_{ij} \cdot x_j \;=\; \pi_j^*(\pi_i) \cdot x_j$$

gilt, das heißt, π_j^* ist das Gewicht der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung auf $x_j \in \mathcal{A}$. Ebenso gilt $[\mathfrak{g}, x_j] = \pi_j^*(\mathfrak{g}) \cdot x_j$. Entsprechend definieren wir

Definition 5.6.4 (Besondere Punkte in $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{t}^*$). Wir setzen

$$\eta_i \;:=\; \pi_i^*|_{\mathfrak{g}}.$$

Die η_i sind die Gewichte der auf $\mathfrak{g}$ eingeschränkten adjungierten Wirkung. Sie eignen sich zur Beschreibung von $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$:

Lemma 5.6.5. Es gilt

$$V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \ = \{\alpha = (\alpha_i)_i \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = \chi \ \},$$

wobei hier die Identifikation von k^n und $\mathfrak{t}^*$ vermöge der Basis $\pi_1^*, \ldots, \pi_n^*$ verwendet wird. Man betrachtet α wahlweise $\in k^n$ oder $\in \mathfrak{t}^*$.

Beweis. Man formt ein paarmal um:

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) &= \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}\text{-Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})) \mid \mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{m}\} \\ &\cong \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid \mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}) \subset \ker(\alpha)\} \\ &= \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid \alpha(\mathfrak{g}) = \chi(\mathfrak{g})\} \\ &= \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{g}} = \chi\} \\ &\cong \{(\alpha_i)_i \in k^n \mid \sum \alpha_i \pi_i^*|_{\mathfrak{g}} = \chi\} \\ &= \{(\alpha)_i \in k^n \mid \sum \alpha_i \eta_i = \chi\}. \end{aligned}$$

☺

Damit ist $V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ ein Translat des Unterraums $V(\mathfrak{g})$ um χ. (dass es sich bei $V(\mathfrak{g})$ tatsächlich um einen Unterraum von $\mathfrak{t}^*$ handelt, wird mit $\chi = 0$ ebenfalls aus obiger Darstellung von $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ deutlich).

Bemerkung 5.6.6. Eine praktische Anmerkung: Unter der Identifikation von $\mathfrak{t}^*$ mit k^n kann man also $\alpha = \sum_i \alpha_i \pi_i^*$ und ebenso $\eta_j = \sum_i (\eta_j)_i \pi_i^*$ und $\chi = \sum_i (\chi)_i \pi_i^*$ in dieser Basis schreiben. Dann hat die Bedingung $\sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i = \chi$ die Form

$$\begin{pmatrix} (\eta_1)_1 & \ldots & (\eta_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\eta_1)_n & \ldots & (\eta_n)_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\chi)_1 \\ \vdots \\ (\chi)_n \end{pmatrix}$$

Für $\chi = 0$ bedeutet dies, dass man α orthogonal zu dem Unterraum wählt, der von den Zeilen der Matrix aufgespannt wird. Da die η_i keine Basis von $\mathfrak{t}^*$ oder auch nur $\mathfrak{g}^*$ bilden (letzteren aber erzeugen, siehe nächste Bemerkung), ist das Gleichungssystem überbestimmt.

Definition 5.6.7. Schreibe hierfür kurz

$$V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \ = \{\alpha \in k^n \mid \eta \cdot \alpha = \chi \ \},$$

wobei η die Matrix $((\eta_i)_j)_{i,j} \in k^n$ sei.

Bemerkung 5.6.8. Es gilt, dass $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ denselben Rang wie $\mathfrak{g}$ hat. Denn sei $g_1, \ldots, g_k$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ innerhalb von $\mathfrak{t}$, und schreibe

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \pi_j.$$

Sei $g_1^*, \ldots, g_k^*$ die duale Basis von $\mathfrak{g}^*$, und schreibe die η_j in dieser Basis:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ji} g_i^*.$$

Dann gilt

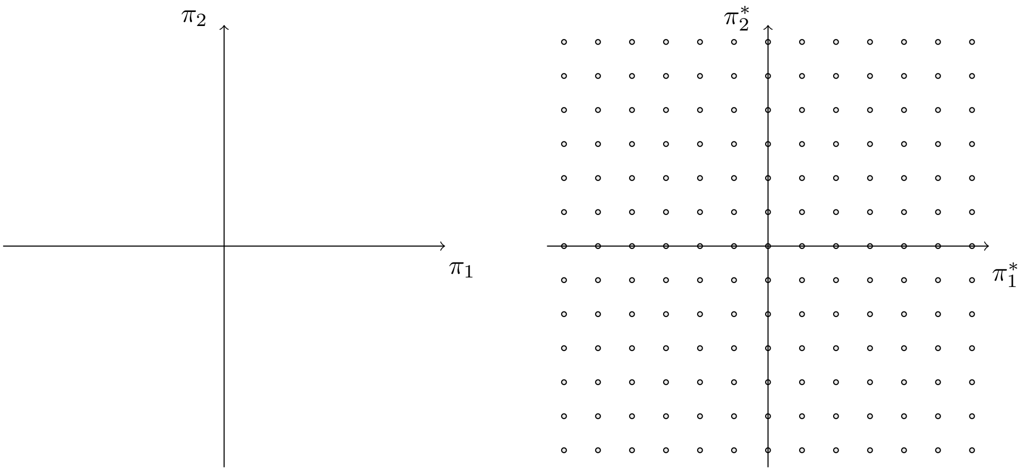
$$c_{ji} = \eta_j(g_i) = \pi_j^*(g_i) = g_{ij},$$

damit sind die Matrizen $(c_{ji})_{j,i}$ und $(g_{ij})_{i,j}$ Transponierte voneinander und haben denselben Rang. Weil der Rang von $(g_{ij})_{i,j}$ gerade die Dimension von $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{g}^*$ ist, während der Rang von $(c_{ji})_{j,i}$ genau der Rang von $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ ist, folgt die Behauptung. Die η_i erzeugen also $\mathfrak{g}^*$.

5.7 Ein weiteres Beispiel

Wir rechnen nun ein weitere Beispiele für Gewichtsgitter aus, diesmal allerdings für die deformierte Algebra B^χ.

Beispiel 5.7.1 (Das kleine B^χeispiel). Wir gehen von der Weylalgebra $\mathcal{A} = k[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ aus. Dazu gehören $\mathfrak{t} = \operatorname{span}_k\{\pi_1, \pi_2\}$, sein Dual $\mathfrak{t}^* = \operatorname{span}_k\{\pi_1^*, \pi_2^*\}$ und darin das Gewichtsgitter $\mathbb{Z}^2$ der Weylalgebra $\mathcal{A}$.

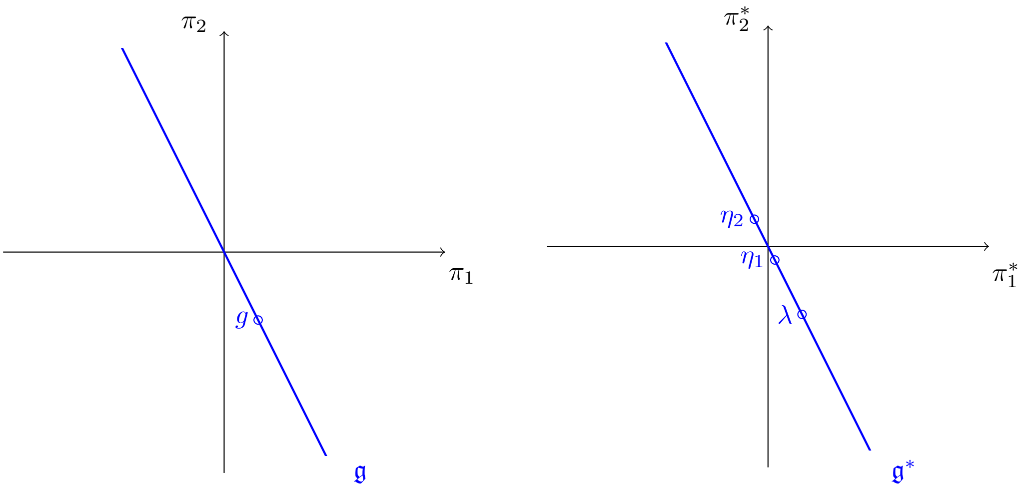


(a) $\mathfrak{t}$ aufgespannt von π_1 und π_2

(b) $\mathfrak{t}^*$ aufgespannt von π_1^* und π_2^* mit Gewichtsgitter $\mathbb{Z}\pi_1^* + \mathbb{Z}\pi_2^*$

Abbildung 14: Ausgangssituation für $\mathcal{A} = k[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$

Wir wählen jetzt einen Unterraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$, sagen wir $\mathfrak{g} = \operatorname{span}_k \{\pi_1 - 2\pi_2\}$, und bezeichnen $\pi_1 - 2\pi_2$ nun mit g. Unter $\pi_i \mapsto \pi_i^*$ können wir $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{t}^*$ auffassen als Span von $\lambda := \pi_1^* - 2\pi_2^*$. Diesbezüglich haben die $\eta_i = \pi_i^*|_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}^* = \operatorname{span}_k \{g^*\}$ die Gestalt $\eta_1 = \frac{1}{5}\lambda$, $\eta_2 = -\frac{2}{5}\lambda$. Im Bild sieht dies folgendermaßen aus:



(a) Der Unterraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ erzeugt von g (eingekringelt)

(b) Der Unterraum $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{t}^*$ erzeugt von λ sowie η_1 und η_2 (eingekringelt)

Abbildung 15: Die Wahl eines Unterraums $\mathfrak{g}$ aufgespannt von $g = \pi_1 - 2\pi_2$

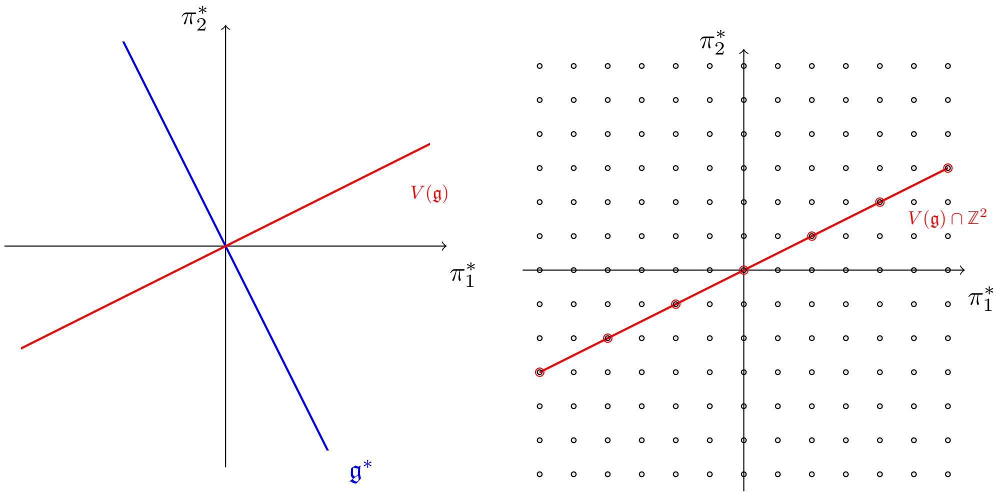
Außerdem bestimmt man

$$V(\mathfrak{g}) \;=\; \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid \alpha(\mathfrak{g}) = 0\} \;=\; \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \in k^2 \mid \frac{1}{5}\alpha_1 - 2\frac{1}{5}\alpha_2 = 0\right\} \;=\; \left\{(\alpha_1, \frac{\alpha_1}{2}) \in k^2\right\}$$

und erinnert sich daran, dass nach Bemerkung 4.4.3 die Gewichte von $\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}$ nun in $\mathbb{Z}^2 \cap V(\mathfrak{g})$ liegen:

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}) = \mathbb{Z}^2 \cap V(\mathfrak{g}).$$

Dies führt zu folgendem Bild:



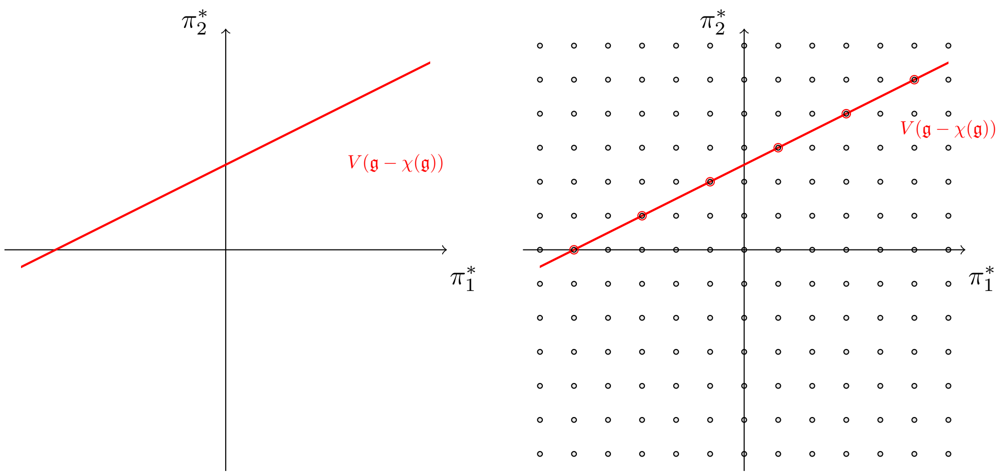
(a) Der Unterraum $V(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{t}^*$ (b) Der Schnitt von $V(\mathfrak{g})$ mit $\mathbb{Z}^2$

Abbildung 16: Bestimmung des Trägers $\operatorname{Supp}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}) = \mathbb{Z}^2 \cap V(\mathfrak{g})$

Jetzt gehen wir zum zentralen Quotienten B^χ über. Dazu wählen wir ein $\chi \in \mathfrak{g}^*$, sagen wir $\chi = -\lambda$. Nach Lemma 2.4.9 sowie Lemma 4.4.5 müssen wir unsere Regionen $\langle \alpha \rangle_{B^\chi}$ innerhalb des affinen Unterraums

$$V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;=\; \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \frac{1}{5}\alpha_1 - \frac{2}{5}\alpha_2 = -1\right\} \;=\; \left\{\left(\alpha_1, \frac{\alpha_1 + 5}{2}\right)\right\} \;=\; V(\mathfrak{g}) + \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

suchen. Dazu wieder ein Bild:



(a) Der affine Unterraum $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ (b) Der Schnitt $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \cap \mathbb{Z}^2$

Weil wir in Korollar 4.4.7 festgestellt haben, dass $\langle\alpha\rangle_{B^\chi} = \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}} \cap V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ gilt, erinnern wir uns rasch an die Beschreibung der Regionen $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}$ der naturbelassenen Weylalgebra $\mathcal{A}$ aus Grafik 11, Beispiel 5.5.3:

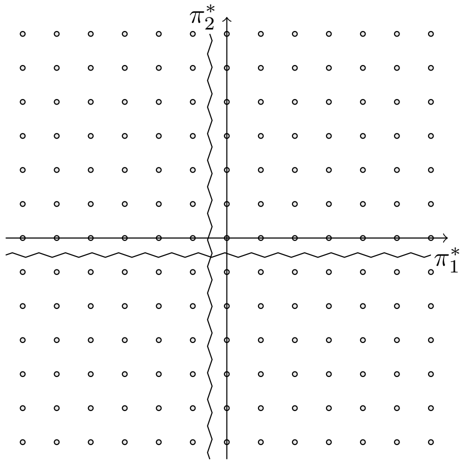
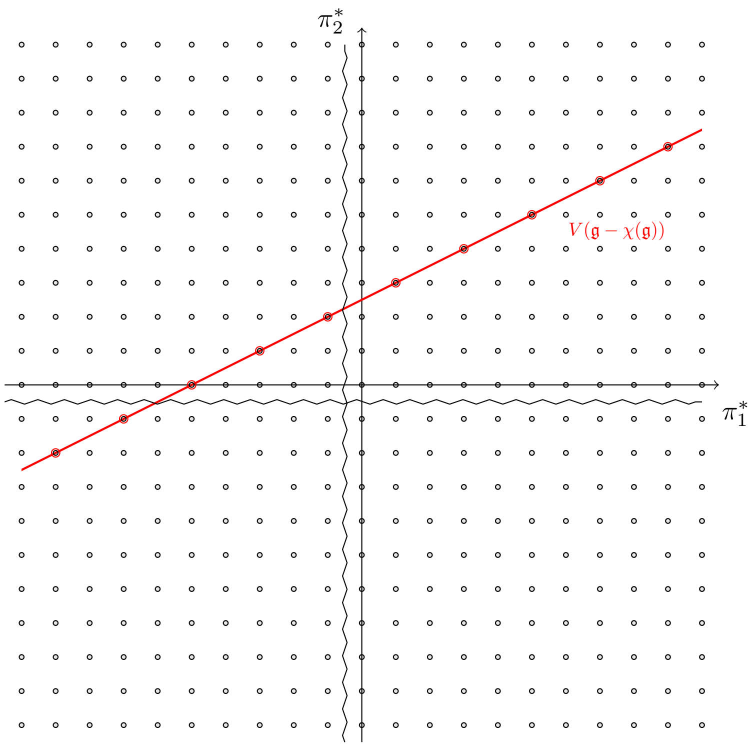


Abbildung 17: Aufteilung des Gewichtsgitters der Weylalgebra in die Regionen $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}$.

Nun brauchen wir nur noch beide Bilder übereinanderzulegen, um die Regionen $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ für die deformierte Weylalgebra B^χ zu erhalten:



Schließlich können wir die Regionen abschließen und erhalten - für unterschiedliche Elemente $\alpha \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ - folgende Bilder:

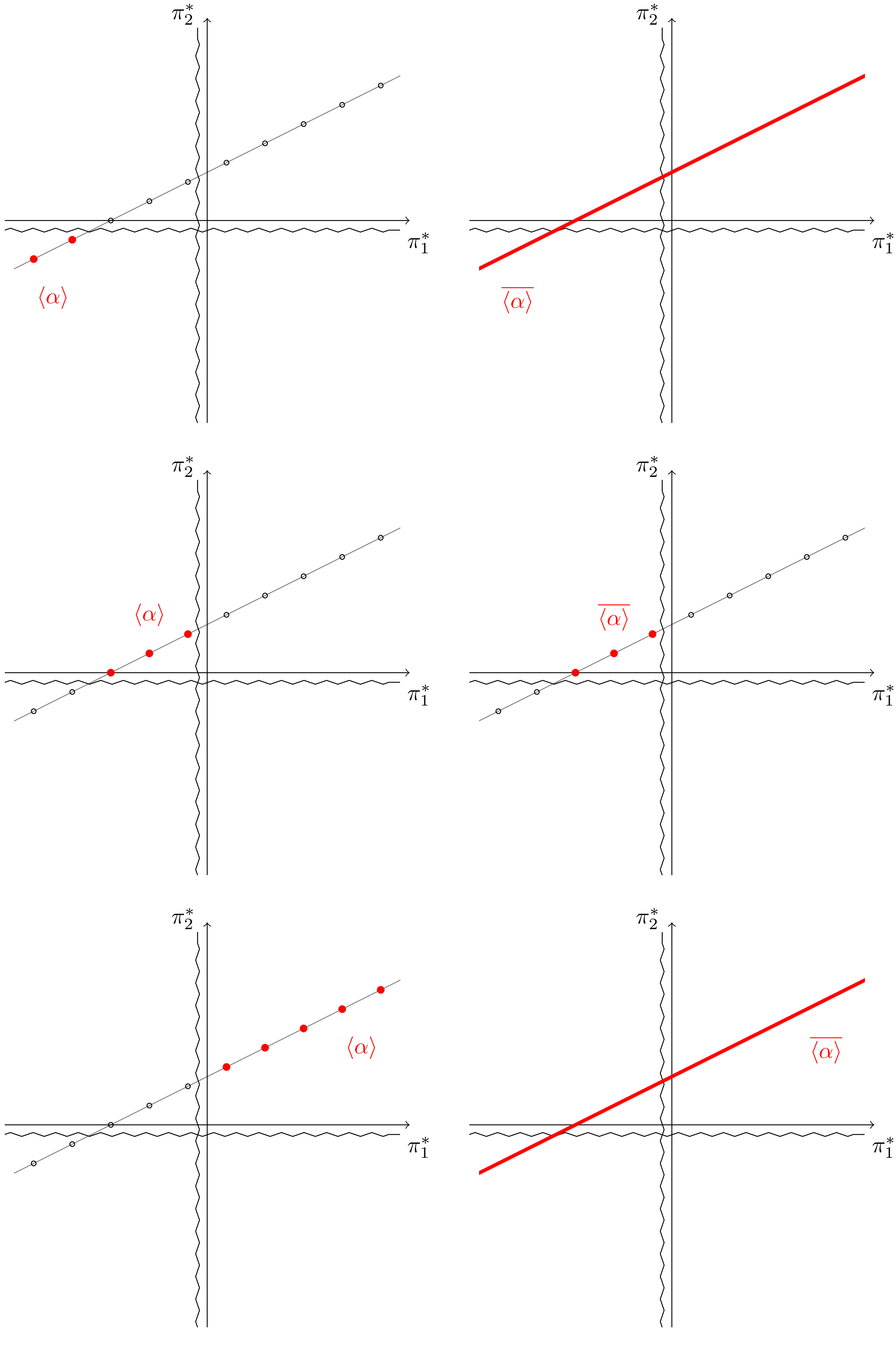


Abbildung 18: Die Regionen $\langle\alpha\rangle$ vor und nach dem Abschließen

6 Geometrische Beschreibung der abgeschlossenen Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ für B^χ (hervorgegangen aus der Weylalgebra)

6.1 Allgemeine Resultate über Zariskiabschlüsse von Gitterpunktkonfigurationen

Wir sahen in den Beispielen des letzten Kapitels bereits, dass sich im Fall der Weylalgebra offensichtlich $\mathbb{Z}$-Gitter ins Bild schleichen. Außerdem wurde deutlich, welchen Einfluss die Ungleichungsbedingungen aus Satz 5.4.3 haben - die abstrakten Regionen aus dem Theorem 3.2.17 über die Korrespondenz zwischen abgeschlossenen Regionen und primitiven Idealen haben hier einfach die Form von konvexen Polytopen. Hier folgen daher ein paar technischere Aussagen zur konvexen Geometrie und zu Gittern, die sich nachher auf die Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ beziehen lassen. So unanschaulich sie vielleicht erstmal aussehen mögen, leisten sie im Nachhinein gerade der Intuition für die Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ wertvolle Dienste.

6.1.1 Geometrie konvexer Kegel und ein technisches Lemma

Zunächst führen wir konvexe Polyederkegel ein. Die nun folgenden Aussagen sind sämtlich [Oda88] entnommen und leicht an unsere Belange angepasst. Sie bilden nicht nur technische Grundlagen, sondern dienen auch dazu, mit dem Verhalten der unterliegenden Geometrie unserer Regionen $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ warm zu werden. Sei hier $K \subset \mathbb{R}$ ein Unterkörper (insbesondere betrachten wir später $K = \mathbb{Q}$), sei E ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 6.1.1 (Konvexer Kegel). Ein konvexer Kegel ist eine Teilmenge $C \subset E$, sodass Summen $c + c'$ für $c, c' \in C$ und nichtnegative skalare Vielfache ac für $c \in C$ und $a \in K_{\geq 0}$ wieder in C enthalten sind.

Es handelt sich also um den $K_{\geq 0}$-Span einer gewissen Teilmenge von E. Folgendes ist der Spezialfall mit endlichem Erzeugendensystem:

Definition 6.1.2 (Konvexer Polyederkegel). Eine Teilmenge $C \subset E$, beschrieben durch

$$C = \sum_{i=1}^{m} K_{\geq 0} c_i := \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i c_i \mid \text{alle } a_i \text{ sind in } K_{\geq 0} \right\},$$

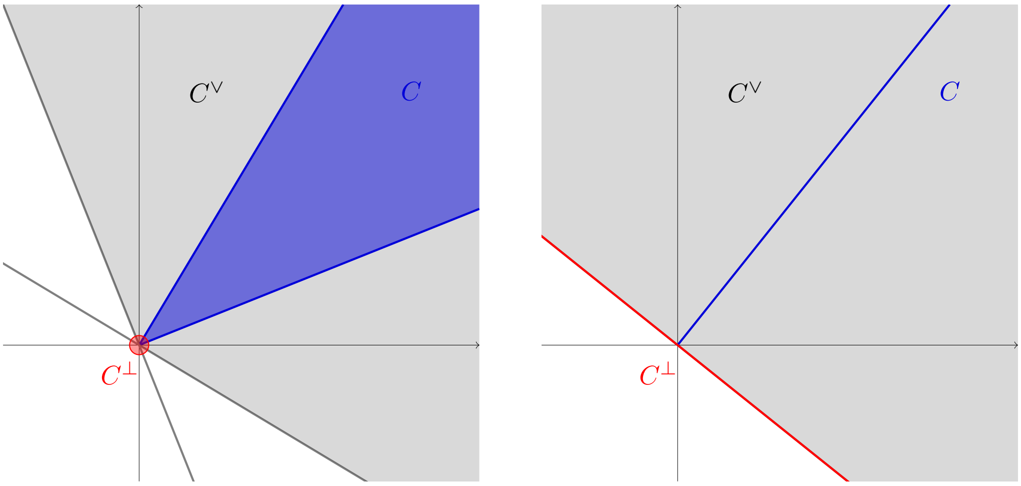
heißt konvexer Polyederkegel.

Definition 6.1.3 (Dualer und Orthogonaler Kegel). Sei C ein Kegel (konvexer Kegel oder konvexer Polyederkegel).

- $C^\vee := \{\varepsilon \in E^* \mid \langle \varepsilon, c\rangle \geq 0 \quad \forall\, c \in C\}$ ist der duale Kegel
- $C^\perp := \{\varepsilon \in E^* \mid \langle \varepsilon, c\rangle = 0 \quad \forall\, c \in C\}$ ist der orthogonale Kegel

Diese Definition ist natürlich ebenso sinnvoll für eine beliebige Menge $C \subset E$, nicht nur für Kegel!

Hier sind zwei kleine Beispiele, wie $C^\vee$ und $C^\perp$ aussehen können (unter Identifikation von E mit E^* unter $\langle -, -\rangle$):



(a) Ein Polyederkegel (blau), sein dualer Kegel (grau) sowie der orthogonale Kegel (rot)

(b) Ein Polyederkegel (blau), sein dualer Kegel (grau) sowie der orthogonale Kegel (rot)

Abbildung 19: Ein weiterer Polyederkegel (blau), sein dualer Kegel (grau) sowie der orthogonale Kegel (rot)

$C^\vee$ kann auch als Menge der Halbräume aufgefasst werden, die C enthalten: Jedes $\varepsilon \in E^*$ definiert einen Halbraum aller Elemente aus E, auf denen ε nichtnegative Werte annimmt. Liegt C in diesem Halbraum, wird ε in die Sammlung $C^\vee$ aufgenommen!
Das Dualisieren eines Kegels hat die folgenden Eigenschaften:

Proposition 6.1.4 (Dualisierungstheoreme). Für konvexe Polyederkegel gilt

$$(C^\vee)^\vee = C$$

sowie das Farkas-Lemma:

$$C^\vee \text{ ist wieder ein konvexer Polyederkegel.}$$

Beweis. Siehe [Ful93, Kapitel 1.2]. ☺

Man kann Kegel auch 'addieren', indem man punktweise summiert: $C_1 + C_2 := \{c_1 + c_2 \mid c_1 \in C_1,\ c_2 \in C_2\}$. Und sinnvollerweise definiert man $-C := \{-c \mid c \in C\}$. Dies sind natürlich wieder Kegel. Für den K-Span eines Kegels schreibt man KC. Damit ist $KC = C + (-C)$.

Lemma 6.1.5. Für das Dual der Summe gilt: $(C_1 + C_2)^\vee = {C_1}^\vee \cap {C_2}^\vee$.

Beweis.

$$\begin{aligned}(C_1 + C_2)^\vee &= \{\varepsilon \in E^* \mid \langle \varepsilon, c\rangle \geq 0 \quad \forall\, c \in C_1 + C_2\}\\ &= \{\varepsilon \in E^* \mid \langle \varepsilon, c_1\rangle + \langle \varepsilon, c_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}\\ &= \{\varepsilon \in E^* \mid \langle \varepsilon, c_1\rangle \geq 0 \text{ und } \langle \varepsilon, c_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}\\ &= {C_1}^\vee \cap {C_2}^\vee.\end{aligned}$$

☺

Definition 6.1.6 (Inneres und Rand eines Kegels).

- $\operatorname{int} C$:= das (relative) Innere des Kegels: Dies ist das Innere von C, aufgefasst im K-Span von C in der $K^{\dim(KC)}$-Standardtopologie, geerbt als Unterraumtopologie von der $\mathbb{R}^{\dim(KC)}$-Standardtopologie. Die Bezeichnung als 'relatives Inneres' rührt daher, dass als Referenzraum nur KC, nicht der ganze umgebende Vektorraum E herangezogen wird. Dadurch haben auch niederdimensionale Kegel ein Inneres.

- $\partial C \ := C \setminus \operatorname{int} C$ ist der (relative) Rand des Kegels.

Bemerkung 6.1.7 (Seitenflächen eines Polyederkegels). Ist C ein konvexer Polyederkegel, so kann man den Rand des Kegels als Vereinigung seiner Seitenflächen beschreiben: $C \cap \{\varepsilon\}^\perp$ ist eine Seitenfläche des Kegels, mit $\varepsilon \in C^\vee$, also der Schnitt von C mit dem Rand einer der Halbräume, die unser C enthalten (siehe Definition von $C^\vee$ - der 'Rand eines Halbraums' ist gerade die Hyperebene mit $\langle\varepsilon, -\rangle = 0$). Anmerkung: Wir nennen $C \cap \{\varepsilon\}^\perp$ nur dann eine Seitenfläche, wenn $C \cap \{\varepsilon\}^\perp \subsetneq C$ - also darf ε nicht in $C^\perp$ gewesen sein.

Folgende Proposition entspricht [Oda88, Lemma A.4, i-iii]:

Proposition 6.1.8. Sei C konvexer Polyederkegel. Sei $c \in C$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) $c \in \operatorname{int} C$ ist im Innern des Kegels.

ii) $\langle\varepsilon, c\rangle > 0$ für jedes $\varepsilon \in C^\vee \setminus C^\perp \subset E^*$.

iii) $C^\vee \cap \{c\}^\perp = C^\perp$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Für $\varepsilon \in C^\vee$ gilt stets $\langle\varepsilon, c\rangle \geq 0$. Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon \in C^\vee \setminus C^\perp$ mit $\langle\varepsilon, c\rangle = 0$ für unser $c \in C$. c liegt damit in $\{\varepsilon\}^\perp$, also auf der Seitenfläche $C \cap \{\varepsilon\}^\perp$, also auf dem Rand des Kegels - also $c \notin \operatorname{int} C$!

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $\langle\varepsilon, c\rangle > 0$ für jedes $\varepsilon \in C^\vee \setminus C^\perp \subset E^*$, so können unter denjenigen $\varepsilon \in C^\vee$, die senkrecht auf c stehen, nur solche aus *koC* in Frage kommen: $C^\vee \cap \{c\}^\perp \subset C^\perp$. Die andere Inklusion ergibt sich aus den trivialen Inklusionen $C^\perp \subset C^\vee$ sowie $C^\perp \subset \{c\}^\perp$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wäre unser c nicht im Inneren des Kegels C, so läge es auf einer Seitenfläche $C \cap \{\varepsilon\}^\perp$, für ein passendes $\varepsilon \in C^\vee$, also $\varepsilon \in \{c\}^\perp$. Nach unserer Definition einer Seitenfläche darf ε aber nicht in $C^\perp$ gewesen sein. Damit zeigt die Existenz von ε, dass $C^\vee \cap \{c\}^\perp \neq C^\perp$. ☺

Damit sind die notwendigen Ingredienzen eingesammelt, um unser angestrebtes technisches Lemma anzugehen. Es findet sich in [MVdB98, Lemma 7.1.1].

Lemma 6.1.9. Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Unterkörper, E endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in E^*$. Dann kann man die λ's auf eindeutige Weise in zwei Lager $T := \{1, \ldots, m\} = I \dot\cup J$ aufteilen, sodass $\exists e \in E,\ q = (q_1, \ldots, q_m) \in K^m$ mit

- $\sum\limits_{i=1}^{m} q_i\lambda_i \ = \ 0$
- $\langle\lambda_i, e\rangle = \lambda_i(e) = \begin{cases} > 0, & \text{für } i \in I \\ = 0, & \text{für } i \in J \end{cases}$
- $q_i = \begin{cases} = 0, & \text{für } i \in I \\ > 0, & \text{für } i \in J \end{cases}$

Beweis. Wir definieren zunächst

$W := \sum_i K_{\geq 0}\lambda_i \ \subset E^*$ der positive Span der λ_i (also ein Kegel),

$H := W \cap (-W)$ der maximale Untervektorraum von W,

$C := W^\vee := \{x \in E \mid \langle w, x\rangle \geq 0\ \forall w \in W\} \subset E$ der duale Kegel,

$C^\perp := \{\varepsilon \in E^* \mid \langle\varepsilon, x\rangle = 0\ \forall x \in C\} \subset E^*$.

Es folgt $H = C^\perp$, denn

- $C^\vee = (W^\vee)^\vee = W$:
  Dies entspricht dem Dualisierungstheorem 6.1.4.
- $C^\perp \subset H = C^\vee \cap (-C^\vee)$: $\varepsilon \in C^\perp$ bedeutet, dass $\langle \varepsilon, C\rangle = 0$, also $\langle \pm\varepsilon, C\rangle \geq 0$, was nach Definition bedeutet, dass $\pm\varepsilon \in C^\vee$, also $\varepsilon \in C^\vee \cap (-C^\vee)$.
- $H \subset C^\perp$: $\varepsilon \in H = W \cap (-W)$ heißt, dass $\pm\varepsilon \in W$ liegt. Für alle $x \in C$ gilt daher $\langle \varepsilon, x\rangle \geq 0$ und zugleich $\langle -\varepsilon, x\rangle \geq 0$, also $\langle \varepsilon, x\rangle = 0$ für alle $x \in C$. Demnach $\varepsilon \in C^\perp$.

Nun gilt $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} = \{\lambda_i \mid \lambda_i \in C^\perp\} \cup \{\lambda_i \mid \lambda_i \in C^\vee \setminus C^\perp\}$. Nutze diese Unterteilung, um die Indexmenge in I und J aufzuteilen:

$$\begin{aligned} J &= \{j \mid \lambda_j \in C^\perp\} \\ I &= \{i \mid \lambda_i \in C^\vee \setminus C^\perp\} \end{aligned}$$

Nun gilt nach Proposition 6.1.8 für ein beliebiges $e \in \operatorname{int}(C) \subset C \subset E$, dass $\langle \lambda_i, e\rangle > 0$ für alle $i \in I$ sowie $\langle \lambda_j, e\rangle = 0$ für $j \in J$:
Ersteres entspricht genau der Folgerung $\langle c, e\rangle > 0$ für alle $c \in C^\vee \setminus C^\perp$. Letzteres folgt aus $C^\vee \cap \{e\}^\perp = C^\perp \ni \lambda_j$ für alle $j \in J$, denn damit ist $\lambda_j \in \{e\}^\perp$, und somit $\langle \lambda_j, e\rangle = 0$.

Nun bleibt noch die Wahl geeigneter Koeffizienten $q_1, \ldots, q_m$: Für $j \in J$ gilt, dass auch $K_{\geq 0}(-\lambda_j) \subset W$, weswegen

$$\begin{aligned} -\lambda_j &= \sum_{k=1}^m p_k^j \lambda_k && \text{mit } p_k^j \geq 0, \text{ bzw.} \\ 0 &= \sum_{k=1}^m q_k^j \lambda_k && \text{mit } q_k^j \geq 0,\ q_j^j > 0. \end{aligned}$$

Aufsummieren über $j \in J$ liefert

$$0 = \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^m q_k^j \lambda_k = \sum_{k=1}^m q_k \lambda_k \quad \text{mit } q_k := \sum_{j\in J} q_k^j \begin{cases} > 0, & k \in J \\ \geq 0, & k \in I. \end{cases}$$

Dabei ist wegen

$$0 = \langle 0, e\rangle = \sum_{k=1}^m q_k \langle \lambda_k, e\rangle = \sum_{i\in I} \underbrace{q_i}_{\geq 0} \underbrace{\langle \lambda_i, e\rangle}_{>0} + \sum_{j\in J} q_j \underbrace{\langle \lambda_j, e\rangle}_{=0}$$

zwingend $q_i = 0$ für alle $i \in I$, wie gefordert. ☺

6.1.2 Konvexe Kegel und Gitter

Bei der Beschreibung der Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ für die Weylalgebra spielen aber nicht nur die Kegel, die bei uns den Ungleichungsbedingungen entsprechen, eine Rolle. Vielmehr müssen wir auch endlich die Gitter einbringen, die von den Gewichten gebildet werden. Zuerst gießen wir die Anschauung in eine Definition:

Definition 6.1.10 (Gitter).

- Gitter: Ein (volles) $\mathbb{Z}$-Gitter L in k^n ist der $\mathbb{Z}$-Span einer Basis $w_1, \ldots, w_n$ von k^n:

  $$L = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(w_1, \ldots, w_n) \subset \operatorname{span}_k(w_1, \ldots, w_n) = k^n.$$

  Dies ist eine additive Untergruppe von k^n.

- Volles Untergitter: Die Teilmenge $L' \subset L \subset k^n$ heißt volles Untergitter, sofern

$$L' \;=\; \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\,(v_1, \ldots, v_n) \quad \text{und} \quad \dim(L') = \dim(L) = n.$$

  Hierbei ist die Dimension des Gitters definiert als die Dimension des aufgespannten Unterraums von k^n (also sind $v_1, \ldots, v_n \in L$ wieder eine Basis und L' ist eine Untergruppe von L).

Beispiel 6.1.11 (Standardbeispiel).
Das Standard-$\mathbb{Z}$-Gitter ist gegeben durch $L = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\,(e_1, \ldots, e_n)$ mit $e_i = i$-ter Einheitsvektor. Ein volles Untergitter darin wird beispielsweise durch $L' = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\,(v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_i = 2e_i$ gebildet.

Proposition 6.1.12. Sei hier $K = \mathbb{Q}$ und E ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Sei $L \subset E$ volles $\mathbb{Z}$-Gitter. Seien $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \;\in\; E^*$ mit einer Zerlegung $T = \{1, \ldots, m\} = I \dot\cup J$ wie oben.
Definiere

$$C \;:=\; \{x \in E \mid \langle \lambda_i, x\rangle = \lambda_i(x) \le q_i \;\forall i \in T\}$$

und

$$E' \;:=\; \bigcap_{j \in J} \ker(\lambda_j)$$

sowie

$$C' \;:=\; \{x \in E \mid \langle \lambda_j, x\rangle = \lambda_j(x) \le q_j \;\forall j \in J\}.$$

Dann folgt

i) $C' \cap (L + E')$ ist endliche Vereinigung von Translaten von E'.

ii) $\overline{C \cap L} = C' \cap (L + E')$.

Bevor wir den Beweis in Angriff nehmen, machen wir zwei Bemerkungen zur Veranschaulichung dieser Aussage.

Bemerkung 6.1.13 (E' als Schnitt von Hyperebenen auffassen). Der Raum E' aus der Proposition ist der Schnitt der Kerne von λ_j für $j \in J$. Diese Kerne sind Unterräume der Dimension $\dim(E) - 1$, also Hyperebenen in E (benutzt man die Identifizierung von E mit E^* über $\langle -, -\rangle$, so ist λ_j ein Vektor, der senkrecht auf der zugehörigen Hyperebene steht). E' ist also der Schnitt dieser Hyperebenen.

Bemerkung 6.1.14 (Anschauung für $C' \cap (L + E')$). $L + E'$ kann man sich so vorstellen, dass man das Gitter L nimmt und in jedem Gitterpunkt den Raum E' anklebt. E' ist nach der vorigen Bemerkung ein Schnitt von Hyperebenen. Anschließend wird dieses Arrangement mit einem Polyederkegel C' geschnitten, der durch Ungleichungsbedingungen definiert ist. Liegt jedoch ein bestimmter Gitterpunkt in C', so gilt dies auch für die komplette Kopie von E', die in diesem Punkt angeklebt war. Das liegt daran, dass

$$E' = \bigcap_{j \in J} \ker(\lambda_j) = \{x \in E \mid \langle \lambda_j, x\rangle = \lambda_j(x) = 0 \;\forall j \in J\}$$

ist. So muss bei der Überprüfung, ob Gitterpunkt $+ E'$ in

$$C' = \{x \in E \mid \langle \lambda_j, x\rangle = \lambda_j(x) \le q_j \;\forall j \in J\}$$

enthalten ist, nur $\langle \lambda_j, \text{Gitterpunkt}\rangle \le q_j$ untersucht werden. Es folgt

$$C' \cap (L + E') = (C' \cap L) + E'.$$

Beweis. i) $C' \cap (L+E')$ ist endliche Vereinigung von verschobenen E':
Man betrachtet das Bild einer Abbildung $C' \cap (L+E') \;\to\; \mathbb{Q}^J$ und zeigt einerseits, dass das Bild nur aus endlich vielen Punkten besteht, dass aber andererseits jedes Urbild aussieht wie ein Translat von E'.
Definiere $f:\; C' \cap (L+E') \;\to\; \mathbb{Q}^J$ durch $x \;\mapsto\; (\lambda_j(x))_{j\in J}$. Dieses Bild ist diskret und beschränkt, also endlich:

- Diskret: Das Bild von f ist gerade $f(C' \cap (L+E')) = f(C' \cap L)$: Schließlich ist $E' \subset \ker(f)$ sowie $C' = C' + E'$ nach Definition von C'. Es folgt für $c = l + e \in C' \cap (L+E')$, dass es ein $\tilde{c} \in C'$ gibt mit $l = c - e = \tilde{c} \in L \cap C'$. So hat man elementweise für jedes $f(l+e) \in f(C' \cap (L+E'))$, dass
$$f(l+e) = f(l) \in f(C' \cap L).$$
Nun ist f rational und so besteht das Bild der Gitterbasis von L aus rationalen Punkten p_k. Das Bild $f(L)$ ist damit enthalten in dem gestauchten Standard-$\mathbb{Z}$-Gitter mit Stauchfaktor = kleinstes gemeinsames Vielfaches der Nenner, die bei den p_k auftreten. Dies ist diskret in E.
- Beschränkt: Die obere Grenze liegt nach Definition von C' bei $\lambda_j(x) \le q_j$ für alle $j \in J$, die untere Grenze findet sich wegen $\lambda_j = -\frac{1}{c_j}\sum_{k\in J, k\neq j} c_k\lambda_k$ bei
$$\begin{aligned}\lambda_j(x) &= -\frac{1}{c_j}\sum_{k\in J,k\neq j} c_k\lambda_k(x)\\ &\ge -\frac{1}{c_j}\sum_{k\in J,k\neq j} c_k q_k.\end{aligned}$$

Die Fasern von f sind tatsächlich Translate von E':
$$\begin{aligned}f^{-1}((\lambda_j(x))_j) &= \{x' \in C' \cap (L+E') \mid \lambda_j(x') = \lambda_j(x)\ \forall j \in J\}\\ &= \{x' \in C' \cap (L+E') \mid \lambda_j(x'-x) = 0\ \forall j \in J\}\\ &= \{x' \in L+E' \mid \lambda_j(x') \le q_j \text{ und } \lambda_j(x'-x) = 0\ \forall j \in J\}\\ &= \{e'+x \in L+E' \mid \lambda_j(e'+x) \le q_j \text{ und } \lambda_j(e') = 0\ \forall j \in J\}\\ &\quad\ \text{durch Substitution } e' := x'-x\\ &= \{e'+x \in L+E' \mid \lambda_j(e') = 0\ \forall j \in J\},\\ &\quad\ \text{denn } \lambda_j(e'+x) = \lambda_j(x) \le q_j \text{ war vorausgesetzt,}\\ &= \{e' \in (L+E')-x \mid e' \in E'\} \;+\; x\\ &= E' + x,\\ &\quad\ \text{denn } 0 \in (L+E')-x, \text{ weil } x \text{ selbst in } L+E' \text{ war}\\ &\quad\ \text{und damit } E' \subset (L+E')-x.\end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage der Proposition gezeigt.

ii) $\overline{C \cap L} = C' \cap (L+E')$:
Die Inklusion $C \cap L \subset C' \cap (L+E')$ ist klar, da $C \subset C'$ und $L \subset L+E'$ gelten. Wir verwenden nun wieder die Abbildung $f:\; C' \cap (L+E') \;\to\; \mathbb{Q}^J$ aus Teil (i). Eingeschränkt auf $C \cap L$ ändert sich nichts an ihrem Bild:

- $f(C \cap L) = f(C' \cap (L+E'))$: Sei $l + e' \in C' \cap (L+E')$ mit $l \in L$ und $e' \in E'$. Dann ist
$$f(l+e) = (\lambda_j(l+e))_{j\in J} = (\lambda_j(l))_{j\in J},$$
weil $\lambda_j(e') = 0$ für alle $e' \in E'$. Wir müssen nun den Gitterpunkt l so verschieben, dass er in $C \cap L$ liegt, ohne etwas am Wert von $f(l)$ zu ändern, um ein Urbild zu

finden, das bereits in $C \cap L$ ist. Dazu überlegt man sich zuerst, dass man den Punkt e aus Lemma 6.1.9 mit der Eigenschaft

$$\langle \lambda_i, e\rangle = \lambda_i(e) = \begin{cases} > 0, & \text{für } i \in I \\ = 0, & \text{für } i \in J \end{cases}$$

durch einen Punkt im Gitter L mit derselben Eigenschaft ersetzen kann, die Wahl dieses neuen e's ändert insbesondere nichts an der Aussage von Lemma 6.1.9. Dies ist möglich, da $e \in E = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\text{Gitterbasis}\}$ rationale Koordinaten hat und durch Umskalieren (unter Beibehaltung oben genannter Vorzeichen) in das $\mathbb{Z}$-Gitter überführt werden kann. Nun ist $f(l + \mathbb{Z}e) = f(l)$, weil $\lambda_j(e) = 0$ für alle $j \in J$ nach Konstruktion von e ist, und zugleich liegen Punkte der Form $l \pm Me$ für $M \in \mathbb{N}$ tatsächlich in L. So bleibt nur noch, M in $l - Me$ groß genug zu wählen, um $\lambda_i(l - Me) \leq c_i$ für alle $i \in I$ zu erreichen. Die Ungleichungen $\lambda(l - Me) \leq c_j$ für alle $j \in J$ sind ohnehin erfüllt, und somit ist $l - Me$ unser gesuchtes Urbild in $C \cap L$.

- Jetzt zeigen wir, dass für $\xi \in \operatorname{im}(f)$ die Menge $f^{-1}(\xi) \cap (C \cap L)$ Zariski-dicht in $f^{-1}(\xi)$ ist: Für das Urbild $f^{-1}(\xi)$ gilt $f^{-1}(\xi) = x + E'$ für ein $x \in f^{-1}(\xi)$, also ist

$$(x + E') \cap (C \cap L) \;\text{ dicht in }\; x + E'$$

zu zeigen. Stattdessen zeigt man hier die äquivalente Aussage

$$E' \cap (C - x) \cap (L - x) \;\text{ dicht in }\; E',$$

sodass man [VdB91, Lemma 3.4] anwenden kann (da $x \in f^{-1}(\xi)$ als Gitterpunkt gewählt werden darf, gilt $L - x = L$). Es besagt, dass der Schnitt $\tilde{C} \cap \tilde{L}$ eines Kegels $\tilde{C} = \{y \in \tilde{E} \mid \langle \lambda_i, y\rangle \leq \tilde{c}_i \quad \forall i \in I\}$ mit einem vollen Gitter $\tilde{L} \subset \tilde{E}$ genau dann dicht in $\tilde{E}$ ist, wenn es ein $\tilde{e} \in \tilde{E}$ gibt mit $\langle \lambda_i, \tilde{e}\rangle < 0$ für alle $i \in I$ (alles über $\mathbb{Q}$). Man definiert also

$$\begin{aligned} \tilde{E} &:= E' \\ \tilde{L} &:= E' \cap L \\ \tilde{C} &:= \{y \in \tilde{E} \mid \langle \lambda_i, y\rangle \leq c_i - \langle \lambda_i, x\rangle \quad \forall i \in I\} \end{aligned}$$

und prüft, ob davon die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt werden:

  - $\tilde{L}$ ist ein volles Gitter in $\tilde{E}$: Wir müssen für ein $v \in \tilde{E}$ sehen, dass es im $\mathbb{Q}$-Span von $\tilde{L} = E' \cap L$ ist. L spannt E auf. Das bedeuet, dass ein $v \in \tilde{E} \subset E$ sich in der Gitterbasis $l_1, \ldots, l_n$ schreiben lässt, die Koeffizienten sind dabei in $\mathbb{Q}$. Multipliziert man v mit dem kgV der Nenner, so erhält man einen Gitterpunkt in $L \cap \tilde{E}$. Das zeigt, dass v im $\mathbb{Q}$-Span von $\tilde{L}$ ist, also ist $\tilde{L}$ ein volles Gitter in $\tilde{E}$.
  - Es gibt ein $\tilde{e} \in \tilde{E}$ mit $\langle \lambda_i, \tilde{e}\rangle < 0$ für alle $i \in I$: Diese Rolle wird von $\tilde{e} := -e$ mit dem e aus Lemma 6.1.9 (angewendet auf $\tilde{E}$, $\{1, \ldots, m\} = I$) erfüllt.

- Daraus folgt nun, dass $\overline{C \cap L} = C' \cap (L + E')$ gilt: Wie in Punkt (i) gesehen, ist $C' \cap (L + E')$ endliche Vereinigung der Fasern $f^{-1}(\xi)$ von f. Schließen wir also $C \cap L$ ab, so können wir das für die endlich vielen Schnitte $f^{-1}(\xi) \cap (C \cap L)$ einzeln tun und erhalten mithilfe des letzten Punkts

$$\overline{C \cap L} = \bigcup_{\text{endlich viele } \xi} \overline{f^{-1}(\xi) \cap (C \cap L)} = \bigcup_{\text{endlich viele } \xi} f^{-1}(\xi) = C' \cap (L + E'),$$

was zu zeigen war. ☺

Ein bisschen versteckt konnte man im Beweis sehen, dass beim Abschließen von $C \cap L$ folgendes passiert:

- Die Ungleichungsbedingungen von C werden in zwei Lager I und J aufgeteilt.
- Diejenigen J Ungleichungsbedingungen, die - auf einen geeigneten Unterraum von E eingeschränkt - einen *beschränkten* Polyeder beschreiben, bleiben auch nach dem Abschluss erhalten und ergeben C'. Darin befinden sich endlich viele Gitterpunkte aus L.
- Die anderen I Ungleichungsbedingungen gehen beim Abschließen verloren, da in den zugehörigen Halbräumen unendlich viele Gitterpunkte liegen.
- Dafür wird E' an die endlich vielen Gitterpunkte im Polyeder geklebt.
- Damit wird der gesamte Schnitt $\overline{C \cap L}$ nur noch mit Hilfe von λ_j, q_j $(j \in J)$ beschrieben.

Bemerkung 6.1.15. Es gilt also

$$\overline{L \cap C} = \bigcup_{i=1}^{p} (E' + \delta_i)$$

für endlich viele $\delta_i \in E$, die Repräsentanten für jede Kopie von E' sind. Dieselbe Aussage gilt natürlich auch für eine um $\alpha \in E$ verschobene Polyederkegel-Gitter-Konfiguration:

$$\overline{L \cap C\ + \alpha} \;=\; \overline{L \cap C}\ + \alpha \;=\; \bigcup_{i=1}^{p} E' + (\delta_i + \alpha).$$

Bemerkung 6.1.16. An dieser Stelle sind die δ_i einfach nur irgendwelche Repräsentanten der jeweiligen Kopie von E'. In den späteren Anwendungen werden ganz bestimmte Wahlen getroffen.

Ferner können die beiden folgenden Korollare aus der Proposition gewonnen werden:

Korollar 6.1.17. Für $x \in L$ folgt

$$\overline{(x + C \cap L) \cap (C \cap L)} = \overline{x + C \cap L} \cap \overline{C \cap L}$$

schema-theoretisch.

Beweis. Siehe [MVdB98, Korollar 7.1.4]. ☺

Lemma 6.1.18. Ist $C \cap L$ Zariski-dicht in E (Objekte wie in der Proposition), so folgt für $\gamma, \beta \in L$: $\exists \alpha \in C \cap L$ mit $\alpha + \gamma\ \in C \cap L$ und $\alpha + \gamma + \beta\ \in C \cap L$.

Beweis. Siehe [MVdB98, Lemma 7.1.5]. ☺

6.2 Die Berechnung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$

In diesem Abschnitt führen wir nun wirklich die geometrische Beschreibung der abgeschlossenen Regionen

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \;\subset\; V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\subset\; k^n$$

durch. Vor allen Dingen möchten wir sehen, dass es nur endlich viele verschiedene abgeschlossene Regionen gibt.

Bemerkung 6.2.1. Der moralische Grund dafür, dass es nur endlich viele abgeschlossene Regionen gibt: Je weniger Ungleichungen aktiv sind, desto mehr wird beim Abschluss verklebt. Eine größere Anzahl aktiver Ungleichungen geht jedoch einher mit Integralitätsbedingungen, die nur von endlich vielen Punkten erfüllt werden.

Wir treffen dabei von nun an die Annahme, dass $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ *rational* gegeben sein soll, das heißt, die Koeffizienten in den definierenden Gleichungen bezüglich der Standardbasis $\pi_1, \dots, \pi_n$ sollen in $\mathbb{Q}$ sein.
Eine Konsequenz davon ist das nachfolgende Lemma:

Lemma 6.2.2. Sei $\mathfrak{g}$ und damit auch $V(\mathfrak{g})$ rational, das heißt, die η_i seien in $\mathbb{Q}^n$. Dann ist $\operatorname{Supp} B^\chi$ dicht in $V(\mathfrak{g})$.

Beweis. Aus Lemma 5.3.7 ist bekannt, dass $\operatorname{Supp} B^\chi = V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Z}^n$ ist. Dieses Gitter spannt $V(\mathfrak{g})$ auf, denn man kann eine Basis von $V(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in k^n \mid \eta{\cdot}\alpha = 0\}$ in $\mathbb{Q}^n$ und - durch Erweitern mit dem *kgv* aller Nenner - auch eine Basis in $\mathbb{Z}^n$ finden. Daraus folgt, dass $\overline{V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Z}^n} = V(\mathfrak{g})$ ist [VdB91, Lemma 3.4]. ☺

Zur Erinnerung:

$$V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \; = \{\alpha = (\alpha_i)_{1\le i\le n} \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = \chi \}.$$

Damit ist $V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ ein Translat des Unterraums $V(\mathfrak{g})$ von k^n, für beliebiges $\alpha \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ hat man

$$V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;=\; \alpha \;+\; V(\mathfrak{g}).$$

Außerdem erinnere man sich hier an Korollar 5.4.4, wonach

$$\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}} = \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \gamma \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n \text{ und } \gamma_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \Leftrightarrow \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \; \forall 1 \le i \le r\}$$

für die Regionen bzgl. $\mathcal{A}$ galt, und an Korollar 4.4.7:

$$\langle\alpha\rangle_{B^\chi} \;=\; \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}} \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})).$$

Wir wollen nun diese Resultate so umformulieren, dass sie in das Polyederkegel-und-Gitter-Setting hineinpassen, das im letzten Abschnitt entworfen wurde. Als erstes nehmen wir uns die Indexmenge der 'aktiven Ungleichungen' für $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ vor: Nur für $1 \le i \le r,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}$ entstehen Ungleichungsbedingungen an die Punkte in $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$. Diesen Indizes müssen wir gesonderte Aufmerksamkeit schenken. Definiere also für $\alpha \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ die Indexmenge der 'aktiven Ungleichungen' durch

$$T_\alpha := \{i \mid 1 \le i \le r,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Die (vorläufige) Vorzeichenkonfiguration s_α von α ist dann definiert als

$$s_\alpha \in \{\pm 1\}^{T_\alpha} \text{ durch } \begin{cases} (s_\alpha)_i = +1, & \text{wenn } \alpha_i \ge 0 \\ (s_\alpha)_i = -1, & \text{wenn } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

Der zu α assoziierte Koordinatenkegel ist

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &:= \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \operatorname{sgn}(\gamma_i) = \operatorname{sgn}(\alpha_i) \text{ für alle } i \in T_\alpha\} \\ &= \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \gamma_i \ge 0, \text{ wenn } \alpha_i \ge 0, \quad \gamma_i < 0 \text{ wenn } \alpha_i < 0, \quad \text{für alle } i \in T_\alpha\}. \end{aligned}$$

Hiermit gilt

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}} &= \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \gamma \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n\} \;\cap\; \Delta_\alpha \\ &= (\alpha + \mathbb{Z}^n) \cap \Delta_\alpha. \end{aligned}$$

So können wir nun die Region $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle_{B^\chi} &= \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}} \;\cap\; V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \\ &= (\alpha + \mathbb{Z}^n) \;\cap\; \Delta_\alpha \;\cap\; (\alpha + V(\mathfrak{g})) \\ &= (\mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g})) \;\cap\; (\Delta_\alpha - \alpha) \quad + \; \alpha \\ &=: \; L \cap C \;+\; \alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} L &:= \mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g}) \\ C &:= \Delta_\alpha - \alpha. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ verwenden wir Proposition 6.1.12 (in dieser Proposition wird über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ gearbeitet. Das heißt, wir bilden den Abschluss zunächst von $\langle\alpha\rangle_{B^\chi,\mathbb{Q}} := \langle\alpha\rangle_{B^\chi} \cap \mathbb{Q}^n$ in $\mathfrak{t}^* \cap \mathbb{Q}^n$). Definiere zu diesem Zweck

$$\begin{aligned} E &:= V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n \\ L &:= (\mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g})) \\ T &:= T_\alpha \\ \lambda_i &:= \begin{cases} \lambda_i(u) = -u_i, & \text{falls } \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \lambda_i(u) = u_i, & \text{falls } \alpha_i \in \mathbb{Z}_{<0} \end{cases} \\ q_i &:= \begin{cases} \alpha_i, & \text{falls } \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ -\alpha_i - 1, & \text{falls } \alpha_i \in \mathbb{Z}_{<0}, \end{cases} \end{aligned}$$

sodass in der Tat gilt:

$$C = \{x \in E \mid \lambda_i(x) \leq q_i \quad \forall i \in T\}$$

(eigentlich müsste hier $C \cap \mathbb{Q}^n$ stehen, aber zur Notationsvereinfachung verzichten wir darauf). Nun besagt die Proposition, dass

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi,\mathbb{Q}} - \alpha = \overline{C \cap L} = C' \cap (L + E')$$

mit

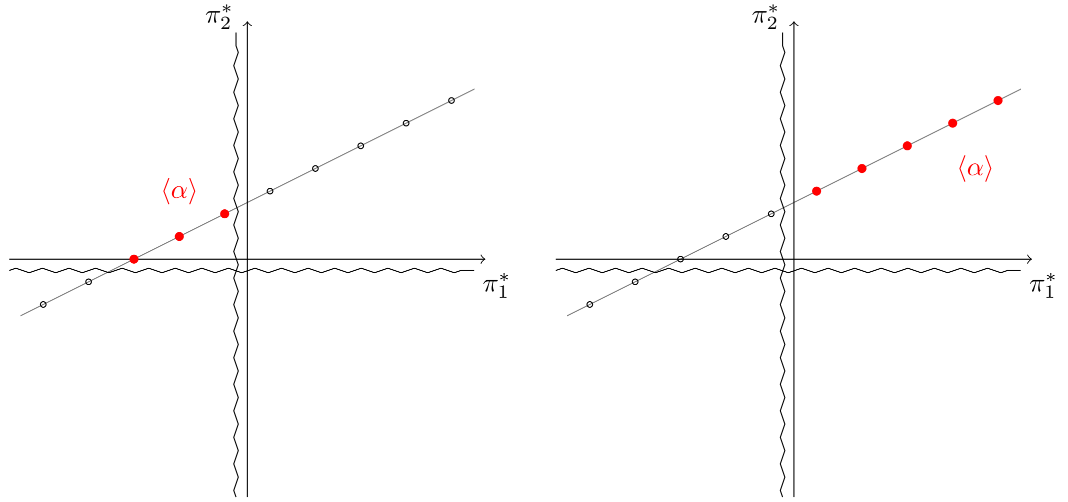
$$\begin{aligned} C' &:= \{x \in E \mid \lambda_j(x) \leq q_j \quad \forall j \in J\} \\ &= \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \mid \gamma_j \geq -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J\} \;\cap\; \mathbb{Q}^n, \\ E' &:= \bigcap_{j \in J} \ker(\lambda_j) \\ &= \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \mid \gamma_j = 0 \quad \forall j \in J \subset T_\alpha\} \;\cap \mathbb{Q}^n \end{aligned}$$

gilt, wobei die Indexmenge J wie in Lemma 6.1.9 ist.

Bemerkung 6.2.3. Die Ungleichungen, die zur Indexmenge J gehören, definieren also wie in Lemma 6.1.9 - auf einen geeigneten Unterraum von $V(\mathfrak{g})$ eingeschränkt - einen *beschränkten* Polyeder.

Vorsicht: Im Folgenden bezeichnen wir mit I stets alle übrigen Indizes, $I := \{1, \ldots, n\} \setminus J$, und *nicht* die entsprechende Indexmenge aus Lemma 6.1.9 (das wäre $T_\alpha \setminus J$).

Bemerkung 6.2.4. Die Indexmenge $J \subset T_\alpha$ ist so gewählt, dass die 'überflüssigen' Ungleichungsbedingungen weggefallen sind, d.h. diejenigen Ungleichungen, die $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ nur in eine Richtung beschränken, sodass sie nach dem Abschließen nicht mehr sichtbar sind. Um nochmal das Beispiel zu bemühen:



(a) Hier ist $J = T_\alpha = \{1, 2\}$, denn beide Ungleichungen werden gebraucht

(b) Hier ist $J = \emptyset$, denn beim Abschließen gehen alle Ungleichungsbedingungen verloren

Abbildung 20: Zwei Beispiele für J

Wir werden diese Gleichheit umformulieren, um $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ auszurechnen und bei der Gelegenheit ein etwas prägnanteres Bild davon zu bekommen, wie eine abgeschlossene Region aussieht, das heißt, von welchen Parametern $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ bestimmt wird. Folgendes Ergebnis erhalten wir:

Proposition 6.2.5 (Beschreibung der abgeschlossenen Regionen). Sei $\alpha \in \mathfrak{t}^*$. Für den Abschluss einer Region $\langle\alpha\rangle_{B^\chi} = \operatorname{Supp} L(\alpha)$, also den Träger des einfachen Moduls $L(\alpha)$ über B^χ, gilt:

$$\begin{aligned}\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \;&=\; \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z},\\ \gamma_j \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0,\\ \gamma_j < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_j < 0\end{array}\right\}\\ &\cap\; \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \sum_{j\in J} \gamma_j \eta_j \;\in\; \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j \;+\; \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\eta_i\right\}.\end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi,\mathbb{Q}} - \alpha \;&=\; C' \cap (L + E')\\ &=\; \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n \mid \gamma_j \geq -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J\}\\ &\quad\cap ((\mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g})) + \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n \mid \gamma_j = 0 \quad \forall j \in J\})\\ &=\; \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n \mid \gamma_j \geq -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J\}\\ &\quad\cap \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n \mid \exists\, \delta \in \mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g}) : \quad \gamma_j = \delta_j \quad \forall j \in J\}\\ &=\; \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n \;\middle|\; \begin{array}{c}\exists \delta \in \mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g}),\\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt :}\\ \gamma_j = \delta_j \geq -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0,\\ \gamma_j = \delta_j < -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j < 0\end{array}\right\}\end{aligned}$$

Abschließend erhält man $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} - \alpha$ als Abschluss von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi,\mathbb{Q}} - \alpha \subset k^n$ über k. Den kann man leicht ausrechnen, wenn man die Darstellung von $C' \cap (L + E')$ aus Proposition 6.1.12 als endliche Vereinigung von Translaten des $\mathbb{Q}$-Vektorraums E' nimmt, denn dann sieht man, dass man nur die k-Abschlüsse der einzelnen Translate von E' nehmen muss, und das ist einfach $k \otimes_{\mathbb{Q}} E'$. Zurückübersetzt in die andere Schreibweise bedeutet dies, dass wir einfach nur den

Körper gewechselt haben:

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} - \alpha \;=\; \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \delta \in \mathbb{Z}^n \cap V(\mathfrak{g}), \\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt :} \\ \gamma_j = \delta_j \geq -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0, \\ \gamma_j = \delta_j < -\alpha_j \;\Leftrightarrow\; \alpha_j < 0 \end{array} \right\}$$

Bemerkung 6.2.6. Beachte, dass die Ungleichungen trotz des Wechsels von $\mathbb{Q}$ nach k immer noch sinnvoll sind, da die Koordinaten δ_j für $j \in J$ integral sein müssen.

Man muss nur noch α addieren, um $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ zu bekommen:

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \;=\; \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \delta \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) : \quad \delta \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n, \\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt :} \\ \gamma_j = \delta_j \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0, \\ \gamma_j = \delta_j < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_j < 0 \end{array} \right\}.$$

Bemerkung 6.2.7. Auch hier ergeben die Ungleichungen Sinn, weil die Koordinaten α_j und damit auch die Koordinaten δ_j für $j \in J$ integral sind.

Jetzt ist die weentliche Arbeit getan, aber wir sind an einer handlicheren Beschreibung interessiert, also formen wir weiter um: Für $j \in J$ gilt $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, also ist auch $\gamma_j = \delta_j \in \mathbb{Z}$, wie auch schon in der Bemerkung festgestellt wurde.

$$\begin{aligned} \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \;=\; & \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_j \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \geq 0, \\ \gamma_j < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_j < 0 \end{array} \right\} \\ \cap & \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \delta \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) : \\ \delta \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n, \\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j = \delta_j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Die linke Menge steht schon richtig da, die rechte muss noch angepasst werden. Dafür ist das nachfolgende Lemma zuständig. ☺

Lemma 6.2.8. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum\limits_{j\in J} \gamma_j \eta_j \;\in\; \sum\limits_{j\in J} \alpha_j \eta_j \;+\; \sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i \\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \\ = & \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \delta \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) : \\ \delta \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n, \\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j = \delta_j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Inklusion '$\subset$' folgt so: Konstruiere für ein γ mit

i) $\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$

ii) $\gamma_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in J$

iii) $\sum\limits_{j\in J} \gamma_j \eta_j \;\in\; \sum\limits_{j\in J} \alpha_j \eta_j + \sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i$, insbesondere $\sum\limits_{j\in J} \alpha_j \eta_j \;=\; \sum\limits_{j\in J} \gamma_j \eta_j + \sum\limits_{i\in I} z_i \eta_i$ mit geeigneten $z_i \in \mathbb{Z}$

ein passendes $\delta \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$. Wir wissen, dass

$$\chi \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k \;=\; \sum_{j\in J} \alpha_j \eta_j \;+\; \sum_{i\in I} \alpha_i \eta_i \;=\; \sum_{j\in J} \gamma_j \eta_j \;+\; \sum_{i\in I} (\alpha_i + z_i) \eta_i$$

mit $z_i \in \mathbb{Z}$ gilt, und setzen nun

$$\delta_k = \begin{cases} \gamma_k & \text{für } k \in J \\ \alpha_i + z_i & \text{für } k \in I. \end{cases}$$

Die andere Inklusion '$\supset$' sieht man folgendermaßen ein: Existiert ein solches δ mit den genannten Eigenschaften, insbesondere $\delta_i - \alpha_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k\eta_k = \chi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\eta_k$, so ist

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} \gamma_j\eta_j &= \sum_{j\in J} \delta_j\eta_j \\ &= \sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I} (\alpha_i - \delta_i)\eta_i \\ &\in \sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i, \end{aligned}$$

wie behauptet (und $\gamma_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in J$ ist ohnehin klar). ☺

Damit ist der Beweis abgeschlossen. Wir halten fest:

Bemerkung 6.2.9. Beachte: Die Bedingung '$\gamma_j \in \mathbb{Z}$' braucht nur in einer der beiden Mengen aufzutauchen. Wir schreiben sie von nun an immer der Menge M_J zu.

Bemerkung 6.2.10. Die abgeschlossene Region $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ kann also als Schnitt zweier Mengen beschrieben werden, von denen die eine, nämlich

$$\left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_j \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_j \geq 0, \\ \gamma_j < 0 \Leftrightarrow \alpha_j < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_j \geq 0 \text{ für alle } j \in J_+, \\ \gamma_j < 0 \text{ für alle } j \in J_- \end{array} \right\},$$

völlig unabhängig vom konkreten α ist. Einzig die Vorzeichenkonfiguration von α geht ein, also die Information, für welche j man $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bzw. $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{<0}$ hat. - Diese Bedingung ist aber für alle α mit fester Vorzeichenkonfiguration gleich. Fixiert man eine solche Vorzeichenkonfiguration, so werden von verschiedenen α's keine zusätzlichen Regionen unterschieden.
Die andere Menge,

$$\left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum\limits_{j\in J} \gamma_j\eta_j \in \sum\limits_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i \\ \text{und für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\},$$

kann nach einem Beispiel aus [MVdB98] jedoch sehr wohl verschiedene Regionen zu einer vorgegebenen Vorzeichenkonfiguration unterscheiden.
Wir werden - in Anlehnung an das θ von [MVdB98] - die Äquivalenzklasse $\sum\limits_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i$ mit ϑ bezeichnen.

Definition 6.2.11. Seien α und J wie zuvor. Wir setzen $J = J_+ \cup J_-$ mit $J_+ = \{j \in J \mid \alpha_j \geq 0\}$ und $J_- = \{j \in J \mid \alpha_j < 0\}$ (hierbei sind die 'überflüssigen Indizes' schon aussortiert!) und definieren

$$\begin{aligned} M_J &:= \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ für } j \in J_+, \\ \gamma_j \in \mathbb{Z}_{<0} \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\} \\ M_\vartheta &:= \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \sum_{j\in J} \gamma_j\eta_j \in \vartheta := \sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i \right\} \end{aligned}$$

Damit ist also $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = M_J \cap M_\vartheta$. Jetzt zählen wir die verschiedenen möglichen Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$: Zunächst einmal kann jedes $\alpha \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ seine eigene Region $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ erzeugen. Unsere Aufgabe ist es, zu sehen, dass dabei nur endlich viele verschiedene Regionen entstehen. Dazu verwenden wir obige Beschreibung.

Proposition 6.2.12. Es gibt nur endlich viele verschiedene *abgeschlossene* Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$.

Für den Beweis benutzen wir einen Trick von [MVdB98]:

Beweis. Als erstes stellen wir fest, dass es nur endlich viele mögliche Vorzeichenkonfigurationen $J = J_+ \cup J_- \subset \{1, \dots, n\}$ geben kann. Ein jedes α befindet sich aber in einer Menge M_J, die 'seiner' Vorzeichenkonfiguration entspricht, und wie wir soeben festgestellt haben, liegt dann auch ganz $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ darin. Wir müssen also nur noch zählen, wieviele verschiedene M_ϑ es zu gegebenem M_J gibt, das heißt, wir müssen die verschiedenen Restklassen $\vartheta = \sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\eta_i$ zählen, wobei $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $j \in J_+$ und $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{<0}$ für alle $j \in J_-$ gilt. Es ist hierfür hinreichend zu sehen, dass es nur endlich viele verschiedene $\sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j$ gibt, wobei

- $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in J$
- Es gibt μ_i mit $\sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum_{i^{-1}I} \mu_i\eta_i = \chi$ (das ist, damit das Ganze auch von einem Punkt in $V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ herkommt).

Und tatsächlich: Man kann ein $\psi \in \mathfrak{g}$ konstruieren und auf die Gleichung $\sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j + \sum_{i^{-1}I} \mu_i\eta_i = \chi$ anwenden, sodass man

$$\sum_{j\in J} \alpha_j\langle\psi, \eta_j\rangle \; + \; 0 \; = \; \langle\psi, \chi\rangle$$

erhält (wofür es dann nur endlich viele Lösungen $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ geben wird, siehe unten).
Wie schon zuvor verwendet wurde, liefert uns Proposition 6.1.12 eine Zerlegung der Indexmenge T_α in 'brauchbare' Indizes (bezeichnet mit J) und 'unbrauchbare Indizes' (alles andere). Aber nicht nur das: Sie garantiert auch die Existenz von Koeffizienten $z_k \in \mathbb{Q}$, sodass

$$\sum_{k\in T_\alpha} z_k\lambda_k \; = \; 0$$

und

$$z_j > 0 \text{ für alle } j \in J, \quad z_k = 0 \text{ sonst.}$$

Setze nun

$$y_k = \begin{cases} -z_k & \text{für } k \in J_+ \\ z_k & \text{für } k \in J_- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und definiere $\psi \in \mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^*)^*$ durch $\langle\psi, \eta_k\rangle := y_k$. Da die η_k keine Basis, sondern nur ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{g}^*$ bilden, muss überprüft werden, ob die y_k dieselben Relationen wie die η_i erfüllen. Gilt also $\sum_{k=1}^{n} a_k\eta_k = 0$, so sollte auch $\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = 0$ sein. Da aber $(a_k)_k \in V(\mathfrak{g})$ ist, darf man $0 = \sum_{k\in T_\alpha} z_k\lambda_k \in V(\mathfrak{g})^*$ darauf anwenden und es ergibt sich wie gewünscht $\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = 0$, wenn man die Definitionen von y_k und λ_k ausschreibt. Nun existiert $\psi \in \mathfrak{g}$ nach der universellen Eigenschaft des Kokerns [AF92, Theorem 3.6] in

$$\begin{tikzcd}
 & & & k \\
0 \arrow[r] & \ker((\eta_k)_k) \arrow[r] & \mathfrak{t}^* = k^n \arrow[r, two heads, "(\eta_k)_k"'] \arrow[ur, "(y_1,\dots,y_n)"] & \mathfrak{g}^* \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\psi"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Es folgt wie angekündigt

$$\sum_{j\in J}\alpha_j y_j \;=\; \langle\psi,\chi\rangle$$

mit $\alpha_j y_j \leq 0$ sowie $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in J$, doch dafür gibt es nur endlich viele Lösungen. ☺

Bemerkung 6.2.13. In zwei Fällen ist die Anzahl der Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ zu vorgegebener Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ stets 1 (immer vorausgesetzt, es gibt überhaupt ein $\alpha \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ mit dieser Vorzeichenkonfiguration):

- $J = \{1, \ldots, n\}$: Dieser Fall kann nur für klassische Weylalgebren $k[x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n]$ eintreten. Hier gilt $M_\vartheta = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$, demnach ist $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = M_J$, es gibt also nur genau eine Region zu der vorgegebenen Vorzeichenkonfiguration. Außerdem besteht die Region hier nur aus endlich vielen Punkten, also gilt auch $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \subsetneq V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$. Dieser Fall trat auch in Beispiel 5.7.1 ein.

- $J = \emptyset$: Hier sieht man sofort, dass $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ ist.

Solche Überlegungen werfen auch die Frage auf, welche Inklusionsbeziehungen zwischen den einzelnen Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ bestehen. [MVdB98, Proposition 7.2.5] gibt darauf eine Antwort, die wir hier an unsere Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ anpassen.

Proposition 6.2.14. Seien α, β in $\mathfrak{t}^*$ gegeben, seien J^α, J^β die jeweiligen Vorzeichenkonfigurationen und $\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta$ wie oben. Es gilt $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \subseteq \overline{\langle\beta\rangle}_{B^\chi}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&J_+^\beta \subseteq J_+^\alpha\\
&J_-^\beta \subseteq J_-^\alpha\\
&\vartheta_\beta = \vartheta_\alpha \mod \sum_{i\in I^\beta}\mathbb{Z}\eta_i.
\end{aligned}$$

Beweis. Aus $J_\pm^\beta \subseteq J_\pm^\alpha$ folgt $M_{J^\alpha} \subseteq M_{J^\beta}$, und aus $\vartheta_\beta = \vartheta_\alpha \mod \sum_{i\in I^\beta}\mathbb{Z}\eta_i$ folgt zunächst $\alpha \in M_{\vartheta^\beta}$ und damit $M_{\vartheta^\alpha} \subset M_{\vartheta^\beta}$, also insgesamt

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \;=\; M_{J^\alpha} \cap M_{\vartheta^\alpha} \;\subseteq\; M_{J^\beta} \cap M_{\vartheta^\beta} \;=\; \overline{\langle\beta\rangle}_{B^\chi}.$$

Andersherum: Ist $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \subseteq \overline{\langle\beta\rangle}_{B^\chi}$ bekannt, so gilt insbesondere $\alpha \in \overline{\langle\beta\rangle}_{B^\chi} = M_{J^\beta} \cap M_{\vartheta^\beta}$. Wegen $\alpha \in M_{J^\beta}$ hat man $J_\pm^\beta \subseteq J_\pm^\alpha$ (die Vorzeichenkonfiguration von α ist also restriktiver als die von β), denn nach Konstruktion enthält die Indexmenge J^β keine überflüssigen Indizes, und so kann es höchstens passieren, dass in $T_\alpha = \{i \mid 1 \leq i \leq r,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ mehr Indizes als nur die in J^β zu Ungleichungen gehören, die ein beschränktes Polytop definieren (vergleiche 6.2.3). Aus $\alpha \in M_{\vartheta^\beta}$ schließt man

$$\sum_{j\in J^\beta}\alpha_j\eta_j \;=\; \sum_{j\in J^\beta}\alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I^\beta} z_i\eta_i$$

mit $z_i \in \mathbb{Z}$, woraus wegen $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in J^\alpha$ die Identität

$$\sum_{j\in J^\beta}\alpha_j\eta_j + \sum_{j\in J^\alpha\setminus J^\beta}\alpha_j\eta_j = \sum_{j\in J^\beta}\alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I^\beta} z_i'\eta_i$$

geschlossen werden kann (mit entsprechend angepassten Koeffizienten $z_i' \in \mathbb{Z}$). Also ist

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\beta \mod \sum_{i\in I^\beta}\mathbb{Z}\eta_i,$$

was den Beweis abschließt. ☺

Es folgt unmittelbar

Korollar 6.2.15. $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \overline{\langle\beta\rangle}_{B^\chi}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} J_+^\beta &= J_+^\alpha \\ J_-^\beta &= J_-^\alpha \\ \vartheta_\beta &= \vartheta_\alpha \mod \sum_{i\in I^\beta = I^\alpha} \mathbb{Z}\eta_i. \end{aligned}$$

Bezieht man Theorem 3.2.17 mit ein, so gilt weiterhin

Korollar 6.2.16. $J(\alpha) = J(\beta)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} J_+^\beta &= J_+^\alpha \\ J_-^\beta &= J_-^\alpha \\ \vartheta_\beta &= \vartheta_\alpha \mod \sum_{i\in I^\beta = I^\alpha} \mathbb{Z}\eta_i. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.2.17 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren). Obiger Korollar ermöglicht es, eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf den Gewichten in $\mathfrak{t}^*$ zu definieren, sodass $\alpha \approx \beta$ genau dann gilt, wenn $J(\alpha) = J(\beta)$ ist. Die primitiven Ideale von $\mathcal{A}$ stehen dann in Bijektion zu den Äquivalenzklassen bezüglich $\approx$. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ gibt es so etwas auch für die universell Einhüllende: Dort definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf der Weylgruppe $W = S_{n-1}$, die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_L$ heißen Linkszellen (siehe [KL79]). Dann stimmen, sofern λ integral ist, die Annihilatoren von $L(w\cdot\lambda)$ und $L(w'\cdot\lambda)$ genau dann überein, wenn w und w' in derselben Linkszelle liegen (für allgemeines λ und Details siehe [Jan83, Satz 5.25]).
Während bei uns die Äquivalenzrelation durch die Geometrie des Gitters beschrieben wird, kann man $\sim_L$ in Kombinatorik übersetzen: Mit Hilfe des Robinson-Schensted-Algorithmus ordnet man jedem Weylgruppenelement w ein Tableau $A(w)$ zu. Dann gilt $w \sim_L w'$ genau dann, wenn $A(w) = A(w')$ ist [Jan83, Kapitel 5.24].

6.3 Die Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$

Aus Proposition 6.1.12 und Bemerkung 6.1.15 kennen wir auch die Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ als endliche Vereinigung von Translaten einer Hyperebene $E' = \bigcap_{j\in J} \ker(\lambda_j)$. Diese Beschreibung möchten wir auch noch etwas weiter treiben. Das folgende Lemma ist ein Auszug aus dem Beweis von [MVdB98, Proposition 7.4.1]. Verwende die gleiche Notation wie zuvor, wenn von C, L etc. die Rede ist.

Lemma 6.3.1. Sei $\alpha \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$. Dann gibt es $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ und $\chi_i \in \mathfrak{h}$, sodass

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \overline{L\cap C \ + \ \alpha} = \bigcup_{i=1}^p E' + (\delta_i + \alpha) = \bigcup_{i=1}^p V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h})),$$

wobei $\mathfrak{h} := \operatorname{span}_k \{\lambda_j \mid j \in J\}$ (bezüglich der kanonischen Identifikation $(\mathfrak{t}^*)^* \cong \mathfrak{t}$, sodass $\lambda_j(\gamma) = \gamma(\lambda_j)$ für alle $\gamma \in \mathfrak{t}^*$) und $\chi_i := (\delta_i + \alpha)|_{\mathfrak{h}}$. Hier werden $V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))$ sowie $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ wie üblich in $\mathfrak{t}^*$ aufgefasst.

Beweis. Die ersten Gleichheit entstammt dem letzten Abschnitt 6.2. Die zweite Gleichheit entspricht Bemerkung 6.1.15. Mit $\mathfrak{h} = \operatorname{span}_k \{\lambda_j \mid j \in J\}$ gilt

$$\begin{aligned} E' &:= \bigcap_{j\in J} \ker(\lambda_j) \\ &= \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \lambda_j(\gamma) = 0 \quad \forall\, j \in J\} \\ &= \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \gamma(\lambda_j) = 0 \quad \forall j \in J\} \quad (\text{nun } \lambda_j \text{ in } \mathfrak{t}) \\ &= \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \gamma(\mathfrak{h}) = 0\} \\ &= V(\mathfrak{h}) \quad \text{aufgefasst in } \mathfrak{t}^*, \end{aligned}$$

und $V(\mathfrak{h}) = E' \subset V(\mathfrak{g})$ (also $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$). Dann ist mit $\chi_i = (\delta_i + \alpha)|_{\mathfrak{h}}$ tatsächlich

$$\begin{aligned}
E' \; + (\delta_i + \alpha) &= \{\beta \in \mathfrak{t}^* \mid \beta(\lambda_j) = 0 \;\forall j \in J\} \; + \; (\delta_i + \alpha) \\
&= \{\beta + (\delta_i + \alpha) \in \mathfrak{t}^* \mid (\beta + (\delta_i + \alpha))(\lambda_j) = (\delta_i + \alpha)(\lambda_j) \;\forall j \in J\} \\
&= \{\beta' \in \mathfrak{t}^* \mid \beta'(\lambda_j) = (\delta_i + \alpha)(\lambda_j) \;\forall j \in J\} \\
&= \{\beta' \in \mathfrak{t}^* \mid \beta'(\mathfrak{h}) = (\delta_i + \alpha)(\mathfrak{h})\} \\
&= \{\beta' \in \mathfrak{t}^* \mid \beta'(\mathfrak{h}) = \chi_i(\mathfrak{h})\} \\
&= \{\beta' \in \mathfrak{t}^* \mid \beta'(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h})) = 0\} \\
&= V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h})).
\end{aligned}$$

☺

Bemerkung 6.3.2 (Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$). An der Darstellung

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \bigcup_{i=1}^{p} (\chi_i + V(\mathfrak{h}))$$

sieht man, dass $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ genau p Zusammenhangskomponenten besitzt: $V(\mathfrak{h})$ ist zusammenhängend, und die einzelnen Translate schneiden sich paarweise nicht. Die Zusammenhangskomponenten fallen also mit den Translaten $V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))$ zusammen.

7 Die Struktur der primitiven Ideale der Algebra B^χ (hervorgegangen aus der Weylalgebra)

In diesem Kapitel ernten wir die Früchte der geometrischen Überlegungen aus dem vorangegangenen Abschnitt. Zunächst fassen wir noch einmal alle wesentlichen Eigenschaften der Algebra B^χ und ihrer primitiven Ideale zusammen, die in ganz enger Beziehung zu den geometrischen Eigenschaften der Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ stehen. Dann machen wir eine kurze Einführung zum Thema Goldierang und rechnen anschließend - wieder unter Ausnutzung der konkreten Beschreibung der Regionen - den Goldierang von primitiven Quoatienten aus. Wir bleiben bei unserer Annahme, dass $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}$ rational sein soll.

7.1 Primitive Ideale

Nach der geometrischen Beschreibung der Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ sollen hier also zuerst ein paar Aussagen über B^χ und die primitiven Ideale von B^χ - also die Annihilatoren einfacher B^χ-Moduln - zusammengestellt werden. Zur Erinnerung: Diese primitiven Ideale konnten durch alleinige Betrachtung der einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(p)} \subset B^\chi$-mod gewonnen werden. Und zudem besitzen sie diese hübsche geometrische Beschreibung, die wir im vorangegangenen Kapitel untersucht haben. Folgende Proposition stellt diese Aussagen nochmal zusammen:

Theorem 7.1.1 (Eigenschaften von B^χ). Sei wie zuvor $B^\chi = \mathcal{A}^\mathfrak{g}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$.

i) B^χ ist ein Integritätsring (nicht notwendig kommutativ).

ii) B^χ ist primitiv.

iii) Jedes Primideal in B^χ hat die Form $J(\alpha)$ mit $\alpha \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ und ist damit primitiv.

iv) Es gibt eine 1 : 1-Korrespondenz

$$\{ \text{ Regionen } \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \subset V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{ Primitive Ideale } \subset B^\chi\}$$
$$\alpha \leftrightarrow J(\alpha)$$

v) B^χ hat nur endlich viele primitive Ideale.

vi) Wenn J primitives Ideal in B^χ ist, dann gilt $J_\alpha = B^\chi_\alpha J_0 + J_0 B^\chi_\alpha$.
J ist in Grad 0 erzeugt.

Beweis. i) B^χ ist ein Integritätsring (nicht notwendig kommutativ):

- $(B^\chi)_0$ ist ein Integritätsbereich: Es gilt (unter Verwendung des Trockenlemmas 2.4.13.vi und 2.4.13.vii sowie der Gleichheit $\mathcal{A}^\mathfrak{g}_0 = \mathcal{A}^\mathfrak{g}$)

$$(B^\chi)_0 = \mathcal{A}^\mathfrak{g}_0/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^\mathfrak{g}_0 = \mathcal{A}_0/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}_0 = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$$

und dies ist der Quotient nach einem Primideal.

- $(B^\chi)_\gamma = (B^\chi)_0 \cdot b_\gamma = b_\gamma \cdot (B^\chi)_0$ ist frei erzeugt: $(B^\chi)_\gamma$ ist hier ganz konkret gegeben durch

$$\begin{aligned}(B^\chi)_\gamma &= \mathcal{A}^\mathfrak{g}_\gamma/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^\mathfrak{g}_\gamma && \text{siehe Trockenlemma 2.4.13.vi}\\ &= \mathcal{A}_\gamma/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}_\gamma && \text{für } \gamma \in V(\mathfrak{g}), \text{ siehe Bemerkung 4.4.3}\\ b_\gamma &= \overline{a_\gamma}\end{aligned}$$

und $\mathcal{A}_\gamma = \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}) \cdot a_\gamma \subset \mathcal{A}$ ist nullteilerfrei (siehe Proposition 5.1.9). Es ist nur noch zu beantworten, wann für $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$ das Produkt $d \cdot a_\gamma$ in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \cdot a_\gamma$

sein kann. Aus der Nullteilerfreiheit von $\mathcal{A}$ folgt aber insbesondere die Eindeutigkeit der Darstellung $d \cdot a_\gamma$, sodass $d \cdot a_\gamma \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \cdot a_\gamma$ genau dann gilt, wenn $d \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ ist. Mit anderen Worten: $(B^\chi)_\gamma$ ist in der Tat von links frei über $(B^\chi)_0$ erzeugt. Selbige Argumente gelten genauso für rechts. Man bekommt nebenbei eine Automorphismus auf $(B^\chi)_0$ gegeben durch $d \mapsto d''$ in

$$\begin{aligned} b_\gamma \cdot (B^\chi)_0 &= (B^\chi)_0 \cdot b_\gamma \\ b_\gamma \cdot d &= d'' \cdot b_\gamma. \end{aligned}$$

- Jetzt wird gezeigt, dass $b_\beta \cdot b_\gamma \neq 0$ ist für alle $\beta, \gamma \in \mathrm{Supp}\, B^\chi$. Wir werden gleich in (ii) sehen, dass es eine Zariski-dichte Region $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ in $\mathrm{Supp}\, B^\chi$ gibt. Und wir wissen aus Lemma 6.1.18, dass es für $\beta, \gamma \in \mathrm{Supp}\, B^\chi$ ein $\delta \in \langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ gibt mit $\alpha + \gamma \in \langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ und $\alpha + \gamma + \beta \in \langle\alpha\rangle_{B^\chi}$. Daraus kann man schließen, dass

$$b_\beta \cdot b_\gamma L(\alpha)_{(\alpha)} = b_\beta L(\alpha)_{(\alpha+\gamma)} = L(\alpha)_{(\alpha+\gamma+\beta)} \neq 0$$

  ist, also in der Tat $b_\beta \cdot b_\gamma \neq 0$.
- Nun betrachte ein beliebiges Produkt $b \cdot b' \in B^\chi$: Schreibe

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot b_{\beta_i}, \quad b' = \sum_{j=1}^{m} d'_j \cdot b_{\gamma_j}$$

  und betrachte das Produkt: Es hat die Form

$$b \cdot b' = \sum_{i,j} d_i d''_j b_{\beta_i} b_{\gamma_j} = \sum_{i,j} d_{ij} b_{\beta_i + \gamma_j}$$

  für geeignete $d_{ij} \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t})$. Es gibt mindestens ein Paar (p, q), sodass sich das Gewicht $\beta_p + \gamma_q$ nur auf genau eine Art und Weise schreiben lässt. Der entsprechende Summand kann sich mit keinem anderen Summanden wegheben und ist nach obigen Argumenten selber $\neq 0$, was den Beweis abschließt. Die Existenz eines solchen Paares (p, q) erhält man durch Angabe einer totalen Ordnung auf den β_i und γ_j: Betrachte die endlich erzeugte abelsche Gruppe

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \{\beta_i, \gamma_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\} \ \subset\ k^n = \mathfrak{t}^*,$$

  sie ist frei und damit isomorph zu irgendeinem $\mathbb{Z}^k$. Von $\mathbb{Z}^k$ erbt $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \{\beta_i, \gamma_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ eine totale Ordnung (beispielsweise die lexikographische), und diesbezüglich gibt es ein maximales β_p unter den β_i sowie ein maximales γ_q unter γ_j. Dann kann man die Summe $\beta_p + \gamma_q$ auf nur genau eine (nämlich diese) Art und Weise schreiben.

ii) B^χ ist primitiv: Wir müssen ein $\alpha \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ finden, sodass $L(\alpha)$ ein treuer B^χ-Modul ist, also $J(\alpha) = \mathrm{Ann} B^\chi(L(\alpha)) = 0$.

- Es gibt ein α mit $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$: Wir erinnern zuerst an Lemma 6.2.2, wonach $\mathrm{Supp}\, B^\chi$ dank der Annahme, dass $\mathfrak{g}$ rational ist, dicht in $V(\mathfrak{g})$ ist. Es gilt für jedes $\beta \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$, dass der Träger von $L(\beta)$ im Gitter $\beta + \mathrm{Supp}\, B^\chi \subset V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ liegt, weil $L(\beta)$ Quotient von $M^{(1)}(\beta)$ ist, und der ist über B^χ in Grad β erzeugt. Dieses Gitter zerlegt sich aber in nur endlich viele Äquivalenzklassen $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$, denn für $\alpha \in \beta + \mathrm{Supp}\, B^\chi$ gilt

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle_{B^\chi} &= \{\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \mid \gamma \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^n \text{ und } \gamma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Leftrightarrow \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall 1 \leq i \leq r\} \\ &= \{\gamma \in (\beta + \mathbb{Z}^n) \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \mid \gamma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Leftrightarrow \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall 1 \leq i \leq r\}, \end{aligned}$$

und das sind maximal 2^r verschiedene Regionen $\langle\alpha\rangle_{B^\chi}$. Also ist

$$V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g})) = \overline{\beta + \operatorname{Supp} B^\chi} = \overline{\bigcup \langle\alpha\rangle_{B^\chi}} = \bigcup \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi},$$

und weil $V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ irreduzibel ist, gilt $V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g})) = \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ für eines der α's.

- Für α mit $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ gilt $J(\alpha)=0$: Nach Proposition 3.2.14 gilt $V(J(\alpha)_0) = \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ mit $J(\alpha)_0$ semiprim, und es folgt $J(\alpha)_0 = I(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}) = 0$ (vgl. Korollar 3.2.16.i). In der gleichen Proposition sah man, dass $J(\alpha)$ jedoch von $J(\alpha)_0$ erzeugt wird (die Voraussetzungen der Proposition werden unter Punkt (iii)d im nächsten Beweis geprüft), also $J(\alpha)=0$.

iii) Jedes Primideal in B^χ hat die Form $J(\alpha)$: Diese Aussage folgt nach Theorem 3.2.17, sobald die Bedingungen

(a) B^χ ist graduiert linksnoethersch,

(b) $\operatorname{length}_{B^\chi}(M^{(1)}(\alpha))$ ist unabhängig von α beschränkt,

(c) $V(\ker(\phi))$ besteht aus nur endlich vielen verschiedenen Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}$,

(d) $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle+\beta)\cap\langle\alpha\rangle}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle+\beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}\right)$ gilt für alle $\beta \in \operatorname{Supp} B^\chi$ sowie für alle $\alpha \in V(\ker\phi)$.

erfüllt sind. Gehen wir das also durch:

(a) Die Weylalgebra ist (graduiert) linksnoethersch: Wurde in Proposition 5.1.9 gezeigt. Deren Unteralgebra $\mathcal{A}^\mathfrak{g}$ ist linksnoethersch: Betrachte eine aufsteigende Kette homogener Ideale $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ in $\mathcal{A}^\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathcal{A}I_i$ Ideal in $\mathcal{A}$, und wir bekommen eine aufsteigende Kette $\mathcal{A}I_1 \subset \mathcal{A}I_2 \subset \ldots$ in $\mathcal{A}$, weil die Inklusionen erhalten bleiben. Dort muss die Kette aber stationär werden, also gilt $\mathcal{A}I_i = \mathcal{A}I_j$ für alle $i,j > N$ für ein N groß genug. Als nächstes sehen wir, dass $(\mathcal{A}I_i)^\mathfrak{g} = I_i$ gilt: $\mathcal{A}$ zerfällt bezüglich der adjungierten $\mathfrak{t}$-Wirkung in Gewichtsräume $\mathcal{A}_\lambda$, also auch bezüglich der induzierten Wirkung von $\mathfrak{g}$. Bezeichne die hieraus resultierende Gewichtsraumzerlegung mit $\mathcal{A} = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{g}^*} \mathcal{A}_{\mu,\mathfrak{g}}$, denn die neuen Gewichtsräume müssen nicht zwingend den alten entsprechen (es kann passieren, dass mehrere Summanden zu einem verklebt werden). Beachte, dass nun $\mathcal{A}_{0,\mathfrak{g}} = \mathcal{A}^\mathfrak{g}$ gilt. Definiere die Projektion auf den 0ten Gewichtsraum durch

$$\begin{aligned}\Phi:\ \mathcal{A} = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{g}^*} \mathcal{A}_{\mu,\mathfrak{g}} &\ \to\ \mathcal{A}_{0,\mathfrak{g}} = \mathcal{A}^\mathfrak{g}\\ a = \sum_{\mu\in\mathfrak{g}^*} a_\mu &\ \mapsto\ a_0.\end{aligned}$$

Wir stellen fest: Φ ist $\mathcal{A}^\mathfrak{g}$-linear, denn für $x \in \mathcal{A}^\mathfrak{g}$ und $a \in \mathcal{A}$ gilt

$$\Phi(xa) = \Phi(\sum xa_\mu) = \sum \Phi(xa_\mu) = xa_0 = x\Phi(a),$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $xa_\mu \in \mathcal{A}_{0+\mu} = \mathcal{A}_\mu$ ist (Graduierung von $\mathcal{A}$). Es folgt also $I_i = (\mathcal{A}I_i)^\mathfrak{g} = (\mathcal{A}I_j)^\mathfrak{g} = I_j$ für alle $i,j > N$, somit ist in der Tat $\mathcal{A}^\mathfrak{g}$ linksnoethersch. Dann ist auch B^χ als Quotient eines linksnoetherschen Rings linksnoethersch.

(b) Die Länge von $M^{(1)}(\alpha)$ ist unabhängig von α beschränkt: Dies wird gezeigt, indem man die Träger der einfachen Subquotienten betrachtet. Ein jeder Modul der Form $M^{(1)}(\alpha)$ ist in $\mathcal{O}^{(1)}$ und so ist sein Träger nach Lemma 2.4.27 die Vereinigung von Äquivalenzklassen $\langle\beta\rangle_{B^\chi} = \operatorname{Supp}_{B^\chi} L(\beta)$ für $\beta \in \mathfrak{t}^*$. Andererseits ist der Träger von

$M^{(1)}(\alpha) = B^\chi/B^\chi\mathfrak{m}_\alpha$ in $\alpha + \text{Supp } B^\chi \subset \alpha + \text{Supp } \mathcal{A} = \alpha + \mathbb{Z}^n$ enthalten, weil $M^{(1)}(\alpha)$ über B^χ von $\overline{1} \in M^{(1)}(\alpha)_{(\alpha)}$ erzeugt wird, siehe Korollar 2.4.16, und weil der Träger von B^χ nach Lemma 5.3.7 gerade $\text{Supp } \mathcal{A} \cap V(\mathfrak{g})$ ist. Nach Korollar 4.4.7 gilt $\langle\beta\rangle_{B^\chi} = \langle\beta\rangle_{\mathcal{A}} \cap V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$, das heißt, anstatt die Regionen $\langle\beta\rangle_{B^\chi}$ zu zählen, können wir die Regionen $\langle\beta\rangle_{\mathcal{A}}$ für die Weylalgebra zählen. Aus Korollar 5.4.4 kennen wir die Beschreibung der Regionen für die Weylalgebra durch

$$\langle\beta\rangle = \{\gamma \in \mathfrak{t}^* \mid \gamma \equiv \beta \mod \mathbb{Z}^n \text{ und } \gamma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Leftrightarrow \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall 1 \leq i \leq r\}.$$

In $\alpha + \mathbb{Z}$ kann es somit nur endlich viele Regionen $\langle\beta\rangle$ geben, maximal 2^r Stück. Diese obere Schranke ist für alle $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ dieselbe, das heißt, für jedes $M^{(1)}(\alpha)$ gibt es maximal 2^r viele verschiedene Kompositionsfaktoren $L(\beta)$ (auch wenn es insgesamt unendlich viele verschiedene Isomorphieklassen von einfachen Moduln in $\mathcal{O}^{(1)}$ gibt). Jetzt muss nur noch die Häufigkeit, mit der jedes $L(\beta)$ auftritt, beschränkt werden: Behauptung ist, dass jeder Kompositionsfaktor $L(\beta)$ nur höchstens einmal in $M^{(1)}(\alpha)$ erscheint. Denn gäbe es in $M^{(1)}(\alpha)$ mindestens zwei Kopien von $L(\beta)$ (bis auf Isomorphie, aber Isomorphie ändert nichts an den auftretenden Gewichten), so wäre $\dim_k M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \geq 2$, aber aus Proposition 2.4.19.iii wissen wir, dass $\dim_k M^{(1)}(\alpha)_{(\beta)} \leq 1$ gilt. Da die Länge eines Moduls die Gesamtanzahl der Kompositionsfaktoren zählt, kann man mit $2^r \cdot 1 = 2^r$ eine gemeinsame obere Schranke für die Länge von $M^{(1)}(\alpha)$ angeben.

(c) $V(\ker(\phi)) = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ besteht nur aus endlich vielen verschiedenen Regionen: Dies war die Aussage von Proposition 6.2.12.

(d) $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle_{B^\chi} + \beta) \cap \langle\alpha\rangle_{B^\chi}}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle_{B^\chi} + \beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle_{B^\chi}}\right)$: Hier wendet man Korollar 6.1.17 auf $x = \beta$, $C \cap L = \langle\alpha\rangle_{B^\chi}$ an (und betrachtet anschließend $I(\dots)$ davon).

iv) Für die 1 : 1-Korrespondenz

$$\begin{array}{c} \{ \text{ Regionen } \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \subset V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ \text{ Primitive Ideale } \subset B^\chi\} \\ \alpha \leftrightarrow J(\alpha) \end{array}$$

können wir ebenfalls Theorem 3.2.17 anwenden.

v) B^χ hat nur endlich viele primitive Ideale: Dies ist ein Korollar aus der Eins-zu-Eins-Korrespondenz zusammen mit der Tatsache, dass es nur endlich viele verschiedene abgeschlossene Regionen gibt.

vi) Die Behauptung, dass $J_\alpha = B^\chi_\alpha J_0 + J_0 B^\chi_\alpha$ gilt, ist wörtlich die Aussage von Proposition 3.2.14.iii und 3.2.14.iv. Dafür musste vorausgesetzt werden, dass $I\left(\overline{(\langle\alpha\rangle_{B^\chi} + \beta) \cap \langle\alpha\rangle_{B^\chi}}\right) = I\left(\overline{\langle\alpha\rangle_{B^\chi} + \beta}\right) + I\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}\right)$ gilt, was wir aber schon für die Punkte (iii) und (iv) gesehen haben. ☺

7.2 Moritakontext zwischen B^χ und $B^{\chi'}$

Dieser Abschnitt funktioniert sogar wieder für eine beliebige Konfiguration $(A, \mathfrak{t}, \phi)$ - es muss nicht die Weylalgebra sein. Hier wird ein Zusammenhang zwischen B^χ und $B^{\chi'}$ hergestellt.

Bemerkung 7.2.1 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren). Stellt man die Frage, welcher Zusammenhang zwischen B^χ und $B^{\chi'}$ besteht, so kann man bei geeigneter Wahl von χ, χ' feststellen, dass B^χ und $B^{\chi'}$ Morita-äquivalent sind (siehe [Sch04]). Es gibt also eine Äquivalenz der Kategorien B^χ-mod $\to$ $B^{\chi'}$-mod, gegeben durch Tensorieren mit speziellen B^χ-$B^{\chi'}$-Bimoduln, die in diesem Abschnitt definiert werden. Das Analogon für universell einhüllende Algebren ist die Äquivalenz der Blöcke $\mathcal{O}_\lambda$ und $\mathcal{O}_\mu$, falls λ und μ zu derselben Facette gehören und ihre Differenz integral ist (siehe [Hum08, Theorem 7.8]). Die Äquivalenz ist dabei gegeben durch einen Verschiebefunktor, den man auch als Tensorieren mit einem Bimodul über einer endlichdimensionalen Algebra beschreiben kann (diese Beschreibung sollte nicht damit verwechselt werden, dass auch bei der Konstruktion des Verschiebefunktors ein Tensorprodukt in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ involviert ist), siehe [Str03] oder [Jan79, Kapitel 2].

Definition 7.2.2 ($B^{\chi,\chi'}$). Für $\chi, \chi' \in \mathfrak{g}^*$ definiere

$$A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'} \;:=\; \{a \in A \mid [\phi(t), a] = (\chi - \chi')(t)a \;\forall\; t \in \mathfrak{g}\}$$

und schließlich

$$B^{\chi,\chi'} \;:=\; A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$$

Lemma 7.2.3 (Eigenschaften von $B^{\chi,\chi'}$). Seien $B^{\chi,\chi'}$ und $A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$ wie oben definiert.

1. $A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'} = \bigoplus_{\alpha \in V(\mathfrak{g}-(\chi-\chi')(\mathfrak{g}))} A_\alpha$

2. $B^{\chi,\chi'}$ ist ein B^χ-$B^{\chi'}$-Bimodul

Beweis.

i)

$$\begin{aligned}
A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'} &= \{a \in A \mid [\phi(t), a] = (\chi - \chi')(t)a \;\forall\; t \in \mathfrak{g}\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid [\phi(t), a] = (\chi - \chi')(t)a \;\forall\; t \in \mathfrak{g}\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha(t)a = (\chi - \chi')(t)a \;\forall\; t \in \mathfrak{g}\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha(t - (\chi - \chi')(t))a = 0 \;\forall\; t \in \mathfrak{g}\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha(\pi)a = 0 \;\forall\; \pi \in \mathfrak{g} - (\chi - \chi')(\mathfrak{g})\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \mathfrak{g} - (\chi - \chi')(\mathfrak{g}) \subset \ker\alpha\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \{a \in A_\alpha \mid \alpha \in V(\mathfrak{g} - (\chi - \chi')(\mathfrak{g}))\} \\
&= \bigoplus_{\alpha \in V(\mathfrak{g}-(\chi-\chi')(\mathfrak{g}))} A_\alpha
\end{aligned}$$

ii) $B^{\chi,\chi'}$ ist ein B^χ-$B^{\chi'}$-Bimodul: Zur Erinnerung, es waren

$$\begin{aligned}
B^\chi &= A^{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \\
B^{\chi'} &= A^{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g} - \chi'(\mathfrak{g})) \\
B^{\chi,\chi'} &= A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}/(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}.
\end{aligned}$$

Nun muss man die folgenden Aussagen überprüfen (unergiebige Rechnungen werden teilweise ausgelassen):

- $B^{\chi,\chi'}$ ist B^χ-Linksmodul bzgl $\overline{a}_\bullet \overline{b} \;:= \overline{ab}$:
  Die Wirkung ist wohldefiniert, denn erstens ist $ab \in A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$ für $a \in A^{\mathfrak{g}}$, $b \in A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$:

$$[t, ab] = [t, a]b + a[t, b] = 0 + a(\chi - \chi')(t) \cdot b = (\chi - \chi')(t) \cdot ab.$$

Zweitens seien $a+m, b+\tilde{m}$ zwei andere Repräsentanten von $\overline{a}, \overline{b}$ mit $m \in A^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))A^{\mathfrak{g}}$ und $\tilde{m} \in (\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$, man rechnet leicht nach, dass

$$\overline{(a+m)(b+\tilde{m})} \;=\; \overline{ab} + \overline{mb} + \overline{a\tilde{m}} + \overline{m\tilde{m}} = \; \overline{ab},$$

da alle anderen Summanden in $(\mathfrak{g} - (\chi-\chi')(\mathfrak{g}))A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$ liegen.

- $B^{\chi,\chi'}$ ist $B^{\chi'}$-Rechtsmodul bzgl $\overline{b}_\bullet \overline{a'} := \overline{ba'}$:
  Erstens ist $ba' \in A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$ für $a' \in A^{\mathfrak{g}}$, $b \in A^{\mathfrak{g}}_{\chi-\chi'}$:
  $$[t, ba] = [t,b]a + b[t,a] = (\chi-\chi')(t)\cdot ba + 0.$$
  Zweitens muss wieder die Unabhängigkeit von der Wahl eines Repräsentanten nachgerechnet werden.
- Die Wirkungen sind miteinander verträglich:
  Klar, denn die Multiplikation in A ist assoziativ. ☺

Die folgende Proposition entspricht genau [MVdB98, Proposition 4.5.1].

Proposition 7.2.4. Sei $J \subset A$ zweiseitiges Ideal, sodass einerseits die Gewichtsräume J_α die Form

$$J_\alpha = J_0 A_\alpha + A_\alpha J_0$$

haben, für alle $\alpha \in \mathfrak{t}^*$, und andererseits mit der Eigenschaft, dass J_0 die Form

$$J_0 = \phi((\mathfrak{h} - \chi_1(\mathfrak{h})) \;\cap \ldots \cap\; (\mathfrak{h} - \chi_p(\mathfrak{h})))$$

hat, wobei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ ein Unterraum ist und die χ_i aus $\mathfrak{h}^*$ kommen. Dann folgt

$$A/J \;\cong\; \begin{pmatrix} B^{\chi_1} & B^{\chi_1,\chi_2} & & \\ B^{\chi_2,\chi_1} & B^{\chi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^{\chi_p} \end{pmatrix}$$

Hierbei besteht die Algebra

$$\begin{pmatrix} B^{\chi_1} & B^{\chi_1,\chi_2} & & \\ B^{\chi_2,\chi_1} & B^{\chi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^{\chi_p} \end{pmatrix}$$

aus Elementen der Form

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{pp} \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } b_{ij} \in B^{\chi_i,\chi_j},\; b_{ii} \in B^{\chi_i},$$

die Multiplikation ist durch 'Matrixmultiplikation' gegeben. Der Beweis der Proposition wird nur skizziert, er findet sich auch recht ausführlich in [MVdB98].

Beweis. Folgende Schritte müssen für den Beweis unternommen werden:

- p orthogonale Idempotente $\overline{e_i}$ in $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})/\bigcap_{i=1}^{p}(\mathfrak{h}-\chi_i(\mathfrak{h}))$ wählen (die kommen daher, dass $\mathrm{Sym}\mathfrak{t}/\bigcap_{i=1}^{p}(\mathfrak{h}-\chi_i(\mathfrak{h}))$ in $\mathfrak{t}^*$ der Vereinigung von p parallelen Hyperebenen $V(\mathfrak{h}-\chi_i(\mathfrak{h}))$ entspricht; man wählt sich nun Funktionen darauf, die jeweils auf der i-ten Hyperebene 1 sind und auf allen anderen Hyperebenen 0 - das geht, weil der Schnitt dieser Hyperebenen leer ist. Diese Funktionen sind genau die Idempotente (ihr Produkt ist Null auf $\bigcup_{j\neq i} V(\mathfrak{h} - \chi_j(\mathfrak{h}))$ und Eins auf $V(\mathfrak{h}-\chi_i(\mathfrak{h}))$)). Ihre Anzahl p ist hierbei maximal.

- Abbildungen $\epsilon_{ij} : A^{\mathfrak{h}}_{\chi_i-\chi_j} \to \overline{e_i}(A/J)\overline{e_j}$ definieren
- Ausrechnen, dass deren Kern jeweils $(\mathfrak{h}-\chi_i(\mathfrak{h}))|_{A^{\mathfrak{h}}_{\chi_i-\chi_j}}$ ist, und schließen, dass $B^{\chi_i,\chi_j} \cong \overline{e_i}(A/J)\overline{e_j}$
- Ausrechnen, dass sich die Multiplikation der Bilder in A/J wie Matrixmultiplikation verhält, $\epsilon_{ij}(a)\epsilon_{jk}(b) = \epsilon_{ik}(ab)$
- Schließen, dass

$$\begin{aligned} A/J &\cong \begin{pmatrix} \overline{e_1}(A/J)\overline{e_1} & \overline{e_1}(A/J)\overline{e_2} & & \\ \overline{e_2}(A/J)\overline{e_1} & \overline{e_2}(A/J)\overline{e_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{e_p}(A/J)\overline{e_p} \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} B^{\chi_1} & B^{\chi_1,\chi_2} & & \\ B^{\chi_2,\chi_1} & B^{\chi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^{\chi_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

☺

7.3 Primitive Quotienten

Zurück zur Weylalgebra, ihrem B^χ und den primitiven Idealen: In diesem Abschnitt wird unterschieden zwischen $\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}$ und $\mathcal{A}^{\mathfrak{h}}/(\mathfrak{h}-\chi(\mathfrak{h}))\mathcal{A}^{\mathfrak{h}}$. Nenne daher ersteren Ring $B^\chi_{\mathfrak{g}}$ und letzteren Ring $B^\chi_{\mathfrak{h}}$. Die folgende Proposition beschreibt den primitiven Quotienten $B^\chi_{\mathfrak{g}}/J$ für ein primitives Ideal $J \subset B^\chi_{\mathfrak{g}}$, das heißt, irgendwo da draußen gibt es einen einfachen Modul, der genau von J annulliert wird. Dank Theorem 7.1.1.iii wissen wir, dass $J = J(\alpha)$ bereits der Annihilator eines einfachen Moduls $L(\alpha)$ aus $\mathcal{O}^{(p)}$ gewesen sein muss.

Proposition 7.3.1. Sei $J \subset B^\chi_{\mathfrak{g}}$ ein primitives Ideal. Dann gibt es einen Unterraum $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ und $\chi_1, \ldots, \chi_p \in \mathfrak{h}^*$ mit $\chi_i|_{\mathfrak{g}} = \chi$ für alle i, sodass

$$B^\chi_{\mathfrak{g}}/J = \begin{pmatrix} B^{\chi_1}_{\mathfrak{h}} & B^{\chi_1,\chi_2}_{\mathfrak{h}} & & \\ B^{\chi_2,\chi_1}_{\mathfrak{h}} & B^{\chi_2}_{\mathfrak{h}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^{\chi_p}_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir wollen Proposition 7.2.4 anwenden, wonach B^χ/J die gewünschte Form hat, sofern J ein zweiseitiges Ideal ist, das folgende zwei Eigenschaften besitzt:

i) $J_\alpha = J_0A_\alpha + A_\alpha J_0$ für alle $\alpha \in \mathfrak{t}^*$

ii) Es gibt einen Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ sowie $\chi_1, \ldots, \chi_p \in \mathfrak{h}$, sodass

$$J_0 = \phi((\mathfrak{h}-\chi_1(\mathfrak{h})) \cap \ldots \cap (\mathfrak{h}-\chi_p(\mathfrak{h})))$$

Gehen wir diese Bedingungen also durch: Zunächst einmal ist der Annihilator J eines Moduls L ein zweiseitiges Ideal in B^χ (siehe Lemma 3.1.2). Zweitens ist die Bedingung (i) nach Sammelproposition 7.1.1.vi erfüllt. Für die letzte Forderung (ii) müssen wir ein geeignetes $\mathfrak{h}$ sowie die $\chi_i \in \mathfrak{h}$ ausfindig machen (ϕ kommt bei uns ja bloß von der Inklusion): J ist primitiv, damit auch prim (siehe Bemerkung 3.2.8) und nach Sammelproposition 7.1.1.iii folgt, dass es ein $\alpha \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))$ geben muss, sodass $J = J(\alpha) = \mathrm{Ann}_{B^\chi}(L(\alpha)) \subset B^\chi$ schon der Annihilator eines $L(\alpha)$'s sein muss. Nach Proposition 3.2.14.ii weiß man, dass $V(J(\alpha)_0) = \overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ ist. Man formt also um:

$$J_0 \;=\; J(\alpha)_0 \;=\; \sqrt{J(\alpha)_0} \;=\; I(V(J(\alpha)_0)) \;=\; I(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}),$$

wobei $J(\alpha)_0 = \sqrt{J(\alpha)_0}$ daraus folgt, dass $J(\alpha)_0$ Proposition 3.2.14.i entsprechend semiprim ist (und Bemerkung 3.2.10 hatte festgestellt, dass 'semiprim' eine Verallgemeinerung von 'Radikalideal' ist). Aus Lemma 6.3.1 kennt man die Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ als Vereinigung von affinen Unterräumen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \bigcup_{i=1}^p V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))$.

$$\begin{aligned} J &= I\Big(\bigcup_{i=1}^p V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))\Big) \\ &= \bigcap_{i=1}^p I(V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))) \\ &= \bigcap_{i=1}^p \sqrt{(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))} \\ &= \bigcap_{i=1}^p (\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h})). \end{aligned}$$

Nun können wir Proposition 7.2.4 anwenden. Obacht bei der Notation: B^{χ_i} aus der Proposition ist gleich $A^\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))A^\mathfrak{h}$ mit $A = B^\chi_\mathfrak{g}$, analog gilt dies für $B^{\chi_i,\chi_j}_\mathfrak{h}$. Man muss also noch nachweisen, dass

$$B^{\chi_i}_\mathfrak{h} \;=\; \left(B^\chi_\mathfrak{g}\right)^\mathfrak{h} / (\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))\left(B^\chi_\mathfrak{g}\right)^\mathfrak{h}$$

gilt (sowie die analoge Aussage für den Bimodul zeigen). Diese Rechnungen werden aus ästhetischen Gründen nicht wiedergegeben. ☺

Als nächstes möchten wir den Goldierang dieses primitiven Quotienten ausrechen. Es bietet sich an, ihn zunächst zu definieren.

7.4 EXKURS: Der Goldierang

In diesem Abschnitt wird definiert, was der Goldierang eines Rings bzw. eines Moduls ist. Weil hierzu etwas weiter ausgeholt werden muss (wir brauchen Lokalisierungen und müssen uns anschließend mit verschiedenen Varianten bei der Definition des Goldierangs auseinandersetzen), findet sich zu Beginn des nächsten Kapitels 7.5 eine Kurzzusammenfassung, sodass dieser Exkurs einfach übergangen werden kann.
Wir betrachten hier einen Ring R mit Eins, insbesondere kann R nichtkommutativ sein.
Der Abschnitt verwendet hauptsächlich die Einführung von [Lam99] (dort werden alle Aussagen für Rechtsmoduln getroffen, funktionieren aber genauso für Linksmoduln), sowie [Jan83].

7.4.1 Lokalisierungen

Bei der Definition des Goldierangs benutzt man Lokalisierungen von Ringen, hier ist daher ein kleiner Überblick über das Thema. Als Motivation für die kommenden Konstruktionen für nichtkommutative Ringe beginnen wir mit Lokalisierung für kommutative Ringe, bevor wir die Ore-Lokalisierung besprechen. Ausführlich findet sich dies in [Lam99, Kapitel 9].

Bemerkung 7.4.1. Schöne Eigenschaften der Lokalisierung im kommutativen Fall: Gegeben seien

- ein kommutativer Ring R

- und eine multiplikative Teilmenge $S \subset R$, das heißt, S ist abgeschlossen unter Multiplikation, und es gilt $1 \in S$, $0 \notin S$.

Dann ist die Lokalisierung R_S von R an S ein kommutativer Ring R_S zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\varepsilon : \ R \to R_S$, sodass $\varepsilon(s)$ Einheit in R_S für alle $s \in S$ ist. Sie erfüllt die folgenden schönen Eigenschaften:

- Jedes Element in R_S sieht wie ein 'Bruch' $\varepsilon(s)^{-1}\varepsilon(r)$ mit $r \in R, \ s \in S$ aus.
- Der Kern von ε entspricht gerade denjenigen Elementen, die Nullteiler bzgl. S sind, also
$$\ker(\varepsilon) \ = \ \{r \in R \mid rs = 0 \text{ für ein } s \in S\}.$$
- Ist R kommutativer Integritätsring, so ist $\mathrm{Q}(R) = R_{R\setminus\{0\}}$.

Lokalisierungen von Ringen - egal, ob kommutativ oder nichtkommutativ - sollen nur folgender universellen Eigenschaft genügen:

Definition 7.4.2 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung). Eine Lokalisierung von R nach einer multiplikativen Teilmenge S ist ein Ring R_S zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\varepsilon : \ R \to R_S$, sodass das Bild von S unter ε in der Einheitengruppe von R_S liegt, mit der universellen Eigenschaft:
Gibt es einen anderen Ring R' und einen Ringhomo $\varepsilon' : \ R \to R'$ mit Bild von S in den Einheiten von R', so faktorisiert dieses ε' über ε, das heißt es gibt einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $f : \ R_S \to R'$ mit $\varepsilon' = f \circ \varepsilon$.

Bemerkung 7.4.3.

- Für jede multiplikative Teilmenge S in jedem beliebigen Ring R (insbesondere auch nichtkommutativ) lässt sich eine Lokalisierung R_S finden. Dieses R_S wird aber nur durch Erzeuger und Relationen angegeben und kann sehr hässlich sein: Die oben genannten schönen Eigenschaften gehen unter Umständen verloren, statt eines 'Bruchs' erhält man 'Wörter in Nennern und Zählern', die sich nicht vereinfachen lassen.
- Für kommutative Ringe ist natürlich klar, dass man diese Wörter so umsortieren darf, dass die 'Nenner' alle links, die 'Zähler' alle rechts stehen (oder umgekehrt). Bei nichtkommutativen Ringen muss man an dieser Stelle Zusatzanforderungen stellen.
- Beachte aber: Egal, durch welche Zusatzanforderungen an R oder S man die eine oder andere schöne Zusatzeigenschaft der Lokalisierung erzwingt - letztlich sind alle Lokalisierungen, die man für R und S konstruieren kann und die universelle Eigenschaft erfüllen, zueinander isomorph.

Der Lösungsvorschlag, um unschöne Phänomene zu umgehen: Lokalisiere nur noch nach speziellen Mengen S, sodass etwas hübscheres herauskommt. Das macht - sofern sie existiert - die Ore-Lokalisierung, siehe hierzu [Lam99, Kapitel 10].

Definition 7.4.4 (Ore-Lokalisierung). Der Ring Q heißt Ore-Lokalisierung bzw. Links-Quotientenring bezüglich der multiplikativen Menge $S \subset R$, falls es einen Ringhomomorphismus $\varphi : \ R \to Q$ gibt, sodass gilt:

- Das Bild von S unter φ ist in den Einheiten von Q enthalten - d.h. φ ist S-invertierend.
- Jedes Element in Q sieht wie ein 'Bruch' $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ mit $r \in R, \ s \in S$ aus.
- $\ker(\varphi) \ = \ \{r \in R \mid sr = 0 \text{ für ein } s \in S\}$.

Die letzten beiden Punkte sind die schönen Eigenschaften, die vom kommutativen Fall abgeguckt sind. Nach [Lam99, Theorem 10.6] ist die Existenz einer solch gelungenen Lokalisierung äquivalent dazu, dass S die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- Links-permutierbar: Für alle $r \in R$ und $s \in S$ ist der Schnitt $Sr \cap Rs$ nichtleer.
- Links-reversibel: Für alle $r \in R$ gilt: Ist da ein $s' \in S$ mit $rs' = 0$, dann gibt es ein weiteres $s \in S$ mit $sr = 0$.

Nenne nun $Q = S^{-1}R$ die Ore-Lokalisierung oder den Quotientenring von R an der Nenner-Menge S. Insbesondere heißt $S^{-1}R$ Klassischer Quotientenring, wenn die Menge S, nach der man da lokalisiert, die Menge aller regulären Elemente in R ist (ein Element $s \in R$ ist regulär, falls es weder rechter noch linker Nullteiler ist). $S^{-1}R$ erfüllt zusammen mit der Inklusion $R \hookrightarrow S^{-1}R$ die universelle Eigenschaft.

Der Ring R muss jedoch nicht zwingend einen klassischen Quotientenring besitzen. Wenn doch, so nennt man R eine Linksordnung innerhalb dieses Quotientenrings, und definiert wie in [Lam99, Kapitel 11A]:

Definition 7.4.5. Sei $Q \supseteq R$ ein beliebiger Ring mit Unterring. R heißt Linksordnung in Q, sofern

$$\{\text{reguläre Elemente von } R\} \subseteq \{\text{invertierbare Elemente von } Q\}$$

und

$$Q = \{s^{-1}r \mid r \in R,\ s \text{ regulär } \in R\}.$$

Ist der Ring R also eine Linksordnung in Q, so ist Q ein klassischer Quotientenring über R.

Bemerkung 7.4.6. Man kann alle obigen Definitionen auch für Rechtsordnungen, Rechtsquotientenringe etc. treffen. Ist $S \subset R$ rechts-permutierbar und rechts-reversibel, so ist RS^{-1} der Rechtsquotientenring von R bezüglich S. Laut [Lam99, Korollar 10.14] gilt: Existieren sowohl RS^{-1} als auch $S^{-1}R$, so erfüllen sie beide die universelle Eigenschaft und sind damit isomorph zueinander.

7.4.2 Goldieringe

Nun fragt man sich, wann ein Ring R einen klassischen Quotientenring Q hat, der die schöne Eigenschaft hat, *halbeinfach* zu sein. Die Antwort liefert Goldies Theorem: R muss semiprim sein und darüber hinaus ein Goldiering sein.
Ein Ring darf sich Goldiering nennen, wenn er in zweierlei Hinsicht 'klein' bleibt. Erstens dürfen nicht zuviele Ideale 'nebeneinander' hineinpassen, das misst die sogenannte uniforme Dimension. Zweitens müssen aufsteigende Ketten ganz bestimmter Ideale stationär werden. Formal sieht das so aus:

Definition 7.4.7 (Uniforme Dimension eines Moduls). M hat uniforme Dimension m, falls er einen essentiellen Untermodul der Gestalt $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ hat, sodass alle U_i uniform sind:

- Ein Untermodul $N \subset M$ heißt essentiell, falls jeder andere Untermodul ($\neq 0$) unser N nichttrivial schneidet.
- $N \subset M$ heißt uniform, falls je zwei seiner Untermoduln ($\neq 0$) nichttrivialen Schnitt haben.

Schreibe in diesem Fall u.dim$(M) = m$. Existiert kein m, sodass obige Summe in M essentiell ist, dann setze u.dim$(M) = \infty$.

Bemerkung 7.4.8.

- Die Wohldefiniertheit der uniformen Dimension folgt aus dem Steinitzschen Austauschsatz [Lam99, Theorem 6.1].
- Wir messen damit die Größe eines Moduls, indem wir gucken, wie groß eine direkte Summe von Untermoduln $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ darin maximal sein kann:
  - Der Begriff des essentiellen Untermoduls wird gebraucht, um die Maximalität der direkten Summe $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ in M zu beschreiben: Man kann keine weiteren direkten Summanden mehr in M finden.
    ('Neben ihm hat kein weiterer Untermodul Platz')
  - Der Begriff des uniformen Untermoduls wird gebraucht, um auszudrücken, dass innerhalb der Summanden U_i nicht noch mehr direkte Summen von Untermoduln stecken, die die Anzahl der Summanden in M erhöhen könnten.
    ('Keine zwei seiner Untermoduln haben nebeneinander Platz')

Wir brauchen diese Definition nur für Ringe und ihre Linksideale, anstelle von Moduln mit ihren Linksuntermoduln. Für Ringe bedeutet misst die uniforme Dimension demnach, wieviele Ideale mit trivialem Schnitt in den Ring hineinpassen. Die aufsteigende Kettenbedingung für eine Menge von Idealen $\{\mathfrak{I}_i\}_{i \in I}$ in R kürzen wir nachfolgend wie üblich mit ACC ab (das heißt beliebige Inklusionsketten $\mathfrak{I}_{i_1} \subseteq \mathfrak{I}_{i_2} \subseteq \ldots$ von Idealen darin werden nach endlich vielen Schritten stationär).

Definition 7.4.9 (Goldie-Ring). R heißt Links-Goldie-Ring nach [Lam99, Definition 11.9 und Abschnitt 6E], falls gilt:

1. $\mathrm{u.dim}(R) < \infty$ für R als Linksmodul über sich selbst.
2. Für Links-Annihilatoren $\mathrm{Ann}_R(K) = \{r \in R \mid r \cdot k = 0 \; \forall k \in K\}$ von beliebigen Teilmengen $K \subset R$ (auf denen R von links operierend betrachtet wird, die aber nicht multiplikativ abgeschlossen oder gar Ideale sein müssen), gilt ACC.

Bemerkung 7.4.10.

- Diese Annihilatoren sind nur Linksideale, weil $K \subset R$ kein Ideal sein muss.
- Auch die Bedingung $\mathrm{u.dim}(R) < \infty$ lässt sich in eine ACC-Bedingung umwandeln, sodass eine äquivalente Definition von Goldieringen lautet:
  1. $\mathrm{u.dim}(R) < \infty$: Diese Bedingung ist äquivalent zu ACC auf solchen Linksidealketten in R, die aus 'Schnitt-Komplementen' bestehen, also Ketten solcher Linksideale, die maximal sind mit der Eigenschaft, trivialen Schnitt mit irgendeinem anderen Linksideal zu haben [Lam99, Proposition 6.30'].
  2. ACC soll auf solchen Linksidealketten in R gelten, die aus Annihilatoren von Teilmengen von R bestehen.

Ein noetherscher Ring hat für solche Bedingungen natürlich nur ein müdes Lächeln übrig, da er die allgemeinste ACC-Bedingung überhaupt erfüllt, nämlich ACC auf *allen* Idealen. Also ist jeder noethersche Ring ein Goldiering.

Theorem 7.4.11 (Goldie). Sei R Ring. Es sind äquivalent [Lam99, Theorem 11.13]:

- R ist Linksordnung in einem halbeinfachen Ring Q
- R ist semiprim und Links-Goldie, das heißt, (0) ist ein semiprimes (zweiseitiges) Ideal von R und es gelten $\mathrm{u.dim}(R) < \infty$ sowie ACC für Links-Annihilatoren $\mathrm{Ann}_R(K)$, $K \subset R$.

7.4.3 Goldierang für Goldieringe

Es kursieren recht viele leicht bis stark voneinander abweichende Definitionen des Goldierangs, die meist an den jeweiligen Verwendungszweck angepasst sind. In diesem Abschnitt verschaffen wir uns einen Überblick darüber, der sich an [Lam91], [Lam99] und [Dix96] orieniert. Eine Übersicht für prime noethersche Ringe lässt sich in [Jan83, Kapitel 11] finden.
Eine Definition des Goldierangs für Links-R-Moduln über *beliebigen* Ringen R findet sich unter dem Pseudonym 'reduzierter Rang' bei [Lam99, Definition 7.34] und lautet wie folgt:

Definition 7.4.12 (Goldierang I). Sei M ein Links-R-Modul. Es bezeichne $\mathcal{Z}(M) := \{m \in M \mid \mathrm{Ann}_R(m)$ ist essentiell in $R\}$ die singulären Elemente von M. Dann definiere den Goldierang von M als [Lam99, Definition 7.34]

$$\mathrm{Grk}_R(M) = \mathrm{u.dim}(M) - \mathrm{u.dim}(\mathcal{Z}(M)).$$

Ist R ein semiprimer Links-Goldiering, so ist die obige Definition des Goldierangs eines Links-R-Moduls nach [Lam99, Proposition 11.15] äquivalent zu folgender Umformulierung, die häufig als Definition des Goldierangs verwendet wird (wir folgen hier dieser Konvention):

Definition 7.4.13 (Goldierang II). Sei R semiprimer Links-Goldiering, Q der klassische Quotientenring von R. Sei M ein Links-R-Modul. Dann definiere den Goldierang von M als

$$\mathrm{Grk}_R(M) := \mathrm{length}_Q(Q \otimes_R M).$$

Hierbei ist $\mathrm{length}_Q(Q \otimes_R M)$ die Kompositionslänge vom Links-Q-Modul $Q \otimes_R M$.

Bemerkung 7.4.14. Die Existenz des klassischen Quotientenrings für semiprime Links-Goldieringe folgt hierbei aus Goldies Theorem 7.4.11.

Nun interessieren wir uns ja für den Goldierang des Rings $B^\chi/J(\alpha)$ als Modul über sich selbst.

Bemerkung 7.4.15. Erinnerung: $B^\chi/J(\alpha)$ ist ein primitiver noetherscher Ring (primitiv nach Definition, und noethersch als Quotient des noetherschen Rings B^χ: Im Beweis von Theorem 7.1.1.iii wird gezeigt, dass B^χ linksnoethersch ist. Ebenso kann man einsehen, dass B^χ noethersch ist, denn die zugrundeliegende Weylalgebra ist beidseitig noethersch, siehe Bemerkung 5.1.10). Insbesondere ist $B^\chi/J(\alpha)$ auch prim [Lam91, Proposition 11.6] und Links-Goldie. Für solche Ringe können beide Definitionen vereinfacht werden.

Lemma 7.4.16 (Vereinfachung von Goldierang I). Sei R ein primer noetherscher Ring. Dann ist der Goldierang von R als Linksmodul über sich selbst gerade

$$\mathrm{Grk}_R(R) = \mathrm{u.dim}(R).$$

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{Z}(R) = 0$ ist. Dazu müssen wir sehen, dass es kein $r \in R$ außer 0 gibt, dessen Linksannihilator $\{a \in R \mid ar = 0\}$ essentiell in R ist. Äquivalent dazu ist es, zu zeigen, dass essentielle Linksideale $\mathfrak{a}$ von R nie die Form $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(r)$ haben, mit anderen Worten: In jedem essentiellen Linksideal $\mathfrak{a}$ sitzt ein Element a, das keinen Rechtsnullteiler $ar = 0$ hat. Dies ist - unter der Voraussetzung, dass R noethersch und semiprim ist - gerade die Aussage von [Dix96, Lemma 3.6.11]. ☺

Lemma 7.4.17 (Vereinfachung von Goldierang II). Sei R ein primer noetherscher Ring. Dann ist der Goldierang von R als Linksmodul über sich selbst gerade

$$\mathrm{Grk}_R(R) = n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte Zahl ist, sodass für den klassischen Quotientenring Q von R gilt:

$$Q \cong M^n(D).$$

Hierbei ist D ein (ebenfalls eindeutig bestimmter) Schiefkörper.

Beweis. Da R prim und noethersch ist, kann man den Goldierang wie in Definition 7.4.13 mit $\mathrm{Grk}_R(R) = \mathrm{length}_Q(Q \otimes_R R) = \mathrm{length}_Q(Q)$ angeben. Q ist nach [Dix96, Theorem 3.6.12.iii] ein einfacher artinscher Ring (hierbei geht ein, dass R nicht nur semiprim, sondern sogar prim ist), und man kann das Wedderburn-Artin-Theorem anwenden [Lam91, Theorem 3.5, Korollar 3.13], wonach Q isomorph zum Matrizenring $M^n(D)$ über einem eindeutig bestimmten Schiefkörper D zu eindeutig bestimmtem n ist. Nun ist n die Länge von $M^n(D)$ über sich selbst [Lam91, Theorem 3.3], und damit ist $\mathrm{Grk}_R(R) = n$. ☺

Bemerkung 7.4.18. Sei auch hier wieder R prim und noethersch. Ist R nullteilerfrei, so ist sein klassischer Quotientenring Q bereits ein Schiefkörper, sodass $\mathrm{Grk}_R(R) = 1$ folgt (vergleiche [Jan83, Kapitel 11.3]).

Für unseren primitiven Quotienten $B^\chi/J(\alpha)$ darf man sich also aussuchen, wie man den Goldierang bestimmen möchte: Man kann $\mathrm{Grk}(B^\chi/J(\alpha)) = \mathrm{u.dim}(B^\chi/J(\alpha))$ benutzen und muss dann zählen, wieviele Linksideale $I_1, \ldots, I_n$ es maximal in $B^\chi/J(\alpha)$ geben kann, sodass ihre Summe $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ direkt ist (vergleiche [Jan83, Anhang 11A.3]).

7.5 Der Goldierang eines Primitiven Quotienten

Als Anwendung von der Aussage 7.3.1 über primitive Quotienten möchte man nun gerne sehen:

Satz 7.5.1. Der Goldierang von $B^\chi_{\mathfrak{g}}/J(\alpha)$ gleicht der Anzahl von Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$.

Hierzu ein paar Vorbemerkungen.

Bemerkung 7.5.2 (Goldierang). Einige Hintergrundinformationen zur Definition des Goldierangs wurden im Exkurs behandelt. Hier reicht es aber, die Definition für prime noethersche Ringe R zu kennen:

$$\mathrm{Grk}_R(R) \ := \ \max\{n \mid \text{es gibt eine direkte Summe von Linksidealen } I_1 \oplus \ldots \oplus I_n \subset R\}.$$

In der Tat ist B^χ (abstammend von der Weylalgebra) prim und noethersch, siehe Bemerkung 7.4.15.

Bemerkung 7.5.3 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren). Der Fall von universell einhüllenden Algebren und speziell der $\mathfrak{U}(\mathfrak{s}l_n)$ motiviert, warum der Goldierang von primitiven Quotienten wissenswert ist: Ist L ein einfacher endlichdimensionaler Modul über $\mathfrak{U}(\mathfrak{s}l_n)$, so ist seine Dimension nämlich genau der Goldierang des entsprechenden primitiven Quotienten (siehe [Jos84], [Pre10, Theorem B] und [Bru10, Theorem 1.1]), also

$$\dim(L) \ = \ \mathrm{Grk}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s}l_n)}\left(\mathfrak{U}(\mathfrak{s}l_n)/\mathrm{Ann}(L)\right).$$

Es ist damit eine ganz naheliegende Frage, nach Hilfsmitteln zur Berechnung des Goldierangs zu suchen.

Nun zu dem Beweis des Satzes:

Beweis. Bezeichne den Ring $B^\chi_{\mathfrak{g}}/J(\alpha)$ für die Dauer dieses Beweises mit B. Wir zählen also Linksideale I_i in B. In Proposition 7.3.1 wurde gezeigt, dass

$$B \ = \ \begin{pmatrix} B_{\mathfrak{h}}^{\chi_1} & B_{\mathfrak{h}}^{\chi_1,\chi_2} & & \\ B_{\mathfrak{h}}^{\chi_2,\chi_1} & B_{\mathfrak{h}}^{\chi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\mathfrak{h}}^{\chi_p} \end{pmatrix},$$

wobei $B_{\mathfrak{h}}^{\chi_i,\chi_j} \cong \overline{e_i}B\overline{e_j}$ für paarweise orthogonale Idempotente $\overline{e_i}$, $\overline{e_j}$ gilt. Hierbei ist $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_p}$ eine maximale Menge orthogonaler Idempotente in B. Wir finden also mindestens die p Spaltenideale $B\overline{e_i}$ in B, und da $B = B\overline{e_1} \oplus \ldots \oplus B\overline{e_p}$ eine direkte Summenzerlegung ist, müssen wir nur noch prüfen, ob in den einzelnen Spaltenidealen $B\overline{e_i}$ noch weitere direkte Summen von Idealen stecken. Benutze fortan die Abkürzung B_{ij} für $B_{\mathfrak{h}}^{\chi_i,\chi_j} \cong \overline{e_i}B\overline{e_j}$.

- Nimm also $B\overline{e_i} \supseteq I_i \oplus I_i'$ für die i-te Spalte an, wobei I_i und I_i' Linksideale von B seien. Wir wollen sehen, dass eins dieser Ideale trivial gewesen sein muss, und nehmen zunächst das Gegenteil an. Hierfür sucht man ein reguläres Element in $I_i \oplus \bigoplus_{j\neq i} B\overline{e_j}$:

- Dazu wird zuerst in I_i ein Element konstruiert, das genau auf Höhe des Diagonaleintrags ungleich Null ist (I_i ist im i-ten Spaltenideal enthalten). Sei $a \in I_i$ ungleich Null (I_i soll nichttrivial sein). Ist der 'Diagonaleintrag' $a_i \neq 0$, so multipliziere a (von links) mit dem Idempotent $\overline{e_i}$ und erhalte damit ein Element der gewünschten Form. Ist der Diagonaleintrag Null, so muss irgendein anderer Eintrag a_{ji} ungleich Null gewesen sein. Wie eben kann man erwirken, dass a_{ji} der einzige nichttriviale Eintrag unseres Idealelements ist. Man zeigt das folgende Lemma:

  Lemma 7.5.4. Gilt $B_{ij}a_{ji} = 0$, so war a_{ji} schon Null.

  Beweis. Aus $B_{ij}a_{ji} = 0$ folgt $(a_{ji}B_{ij})(a_{ji}B_{ij}) = 0$ in dem Integritätsbereich B_{jj} und damit auch $a_{ji}B_{ij} = 0$. Nun betrachtet man das Idempotent $e = \overline{e_i} + \overline{e_j}$. Die Matrizen in eBe haben ihre Einträge nur noch an den Positionen (i,i), (i,j), (j,i), (j,j). Man rechnet nach, dass mit a wie oben $((eBe)a(eBe))^2 = 0$ gilt, und prüft die Identität

  $$B(eBe)a(eBe)B \cdot B(eBe)a(eBe)B \;=\; B((eBe)a(eBe))^2B \;= 0.$$

  Weil B prim war, folgt $B(eBe)a(eBe)B = 0$ und aufgrund von

  $$a = e^4 \cdot a \cdot e^4 \in B(eBe)a(eBe)B = 0$$

  folgt schließlich $a = 0$ und somit $a_{ji} = 0$. ☺

  Da wir aber von $a_{ji} \neq 0$ ausgegangen sind, ist $B_{ij}a_{ji} \neq 0$. Im Anschluss kann man also unser a mit einem geeigneten $b \in B$ multiplizieren (insbesondere ist $b_{ij} \neq 0$), sodass $c := ba$ auf der Höhe des Diagonaleintrags einen Eintrag ungleich Null hat.

- Dieses Element kann nun zu einem regulären Element in B ergänzt werden, indem man eine Matrix C mit Einträgen $c_{ii} = c$ definiert, wobei die restlichen Diagonaleinträge durch beliebige reguläre Elemente aus den Integritätsringen B_{jj} aufgefüllt werden und alle Nicht-Diagonaleinträge gleich Null gesetzt werden.

- C ist tatsächlich regulär in B: Angenommen, man hat ein anderes Element $P \in B$, sodass das Produkt PC der beiden Matrizen Null ist. Von jedem einzelnen Eintrag p_{ij} weiß man nun, dass $p_{ij}c_{jj} = 0$ ist. Insbesondere ist $p_{jj}c_{jj} = 0$, was sofort $p_{jj} = 0$ impliziert, weil B_{jj} Integritätsring ist. Für alle anderen p_{ij} mit $i \neq j$ findet man wieder ein Element $q_{ji} \in B_{ji}$ mit $q_{ji}p_{ij} \neq 0$, sofern $p_{ij} \neq 0$ gilt. Dies führt nun sofort zu einem Widerspruch, da $q_{ji}p_{ij} \cdot c_{jj} = 0$ ein Produkt im Integritätsring B_{jj} ist, sodass $q_{ji}p_{ij} = 0$ und damit wie behauptet dann $p_{ij} = 0$ folgt.

- Aus der Existenz eines regulären Elements in $I_i \oplus \bigoplus_{j\neq i} B\overline{e_j}$ folgt, dass $I_i \oplus \bigoplus_{j\neq i} B\overline{e_j}$ essentiell ist, siehe [Lam99, Theorem 11.13, (2)⇒(5)]. Insbesondere ist der Schnitt von $I_i \oplus \bigoplus_{j\neq i} B\overline{e_j}$ mit I_i' nicht null. Dies kann nur eintreten, wenn bereits der Schnitt von I_i mit I_i' nicht null war, was im Widerspruch zu der Annahme steht, dass $B\overline{e_i} \supseteq I_i \oplus I_i'$ eine direkte Summe war.

- Damit kann in *keiner* Spalte eine direkte Summe von nichttrivialen Idealen enthalten sein.

Es folgt, dass

$$\mathrm{Grk}_{B^\chi_{\mathfrak{g}}/J(\alpha)}\left(B^\chi_{\mathfrak{g}}/J(\alpha)\right) = p = \text{ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } \overline{\langle B^\chi\rangle}_\alpha$$

gilt, denn dass $p =$ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle B^\chi\rangle}_\alpha$ ist, haben wir bereits in Bemerkung 6.3.2 gesehen. ☺

Bemerkung 7.5.5 (Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$). Wir haben schon in Bemerkung 6.3.2 gesehen, dass $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \bigcup E' + \delta_i + \alpha = \bigcup V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))$ ist. E' ist hierbei zusammenhängend in der Zariski-Topologie, und die einzelnen Translate schneiden sich paarweise nicht. Die Zusammenhangskomponenten fallen also mit den Translaten $E' + \delta_i + \alpha$ bzw. mit den $V(\mathfrak{h} - \chi_i(\mathfrak{h}))$ zusammen. Daher gibt es die Chance, den Goldierang von ${B^\chi}_{\mathfrak{g}}/J(\alpha)$ zu berechnen, indem man die Translate zählt. Diese Aufgabe werden wir in Abschnitt 7.7 darauf reduzieren, Gitterpunkte in einem Polytop zu zählen, und dies wird von sogenannten Ehrhartpolynomen geleistet.

Bemerkung 7.5.6 (Verbindung zu universell einhüllenden Algebren). Wie schon in Bemerkung 7.5.3 angekündigt wurde, ist man daran interessiert, den Goldierang primitiver Quotienten berechenbar zu machen. Für universell einhüllende Algebren beschreibt Joseph in [Jos80a, Korollar 5.12] Goldierangfunktionen

$$p_\Lambda(\mu) \;=\; \mathrm{Grk}\left(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}(L(\mu))\right),\ \mu \in \mathfrak{h}^*$$

auf $\Lambda = \lambda + P(R)$ (hierbei ist $P(R)$ das integrale Wurzelgitter und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$), die auf gewissen Teilmengen von Λ Polynomgestalt haben.
Die Crux bei diesen Goldierangpolynomen ist jedoch, dass sie zumeist nur bis auf einen Skalar bestimmt sind (siehe beispielsweise [Jos80a, Kapitel 1.4]), und schon diese Resultate sind keinesfalls einfach zu bekommen und gelten nur in Spezialfällen, siehe [Jos80a], [Jos80b, Theorem 10.4]. Konkrete Polynome sind im Allgemeinen unbekannt. Für Liealgebren vom Typ A konnten jedoch vor kurzem konkrete Formeln gefunden werden, siehe [Pre10, Theorem B] und [Bru10, Theorem 1.6]. Die Beweise sind nicht trivial und verwenden Hilfsmittel aus der Theorie endlicher W-Algebren und der Darstellungstheorie in positiver Charakteristik.

7.6 EXKURS: Polyeder, Polytope und das Ehrhart-Polynom

Hier geht es darum, die Anzahl von Gitterpunkten in einem Polytop zu ermitteln. Genauer gesagt: Man fixiert ein Gitter, schneidet es mit einem Polytop, und beobachtet nun, wie sich die Anzahl der enthaltenen Gitterpunkte bei Streckung des Polytops verändert. Der Clou ist, dass diese Änderung polynomiell im Streckfaktor ist - die Gestalt des Polynoms selbst hängt vom Gitter und vom Polytop ab.
Dieser Exkurs orientiert sich hauptsächlich an den Einführungen von [Zie95] sowie [BR07]. Beide Einführungen arbeiten nur über $\mathbb{R}$. Das Buch [BR07] verwendet stets nur das Standard-$\mathbb{Z}$-Gitter, es lassen sich diese Aussagen jedoch durch Koordinatentransformation auf beliebige Gitter übertragen (siehe [BR07, Bemerkung 3.3]).
Man kann ein Polytop P im $\mathbb{R}^n$ konstruieren, indem man eine Handvoll Eckpunkte fixiert und davon das Polytop aufspannen lässt. Man bekommt jedoch dieselbe Form, indem man aus dem gesamten umgebenden Raum mithilfe von Hyperebenen das Polytop ausschneidet (oder anders gesagt: indem man es sich als Schnitt von Halbräumen vorstellt). Formal führen diese beiden Ansätze zu folgenden Definitionen:

Definition 7.6.1 (Polytop). Es gibt zwei mögliche Definitionen für ein Polytop P im $\mathbb{R}^n$:

- P ist die konvexe Hülle einer endlichen Punktemenge im $\mathbb{R}^n$:

$$P = \text{conv}(p_1, \dots, p_k) = \{\lambda_1 p_1 + \dots \lambda_k p_k \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$$

- P ist Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume

$$P = P(A, z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq z, \text{ das heißt } (Ax)_i \leq z_i \; \forall 1 \leq i \leq l\},$$

  der *beschränkt* ist, das heißt, P enthält keinen 'Strahl' $\{x + ty \mid t \geq 0\}$ für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ (sonst heißt es Polyeder)

Die Dimension eines Polyeders ist die des aufgespannten (affinen) Unterraums vom $\mathbb{R}^n$ (siehe [Zie95, Definition 0.1]).

Zum Glück beschreiben beide Definitionen das gleiche Objekt:

Satz 7.6.2 ([Zie95, Theorem 1.1]). Diese beiden Definitionen sind äquivalent: Es gilt $P = \text{conv}(\{p_1, \dots, p_k\})$ für ein k und gewisse $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $P = P(A, z)$ für ein $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$ und $z \in \mathbb{R}^l$ für ein geeignetes l gilt.

Nun musste man ja in der Definition des Polytops via Halbräume extra mit aufnehmen, dass es beschränkt sein soll. Lässt man diese Bedingung fallen, so erhält man die Definition des Polyeders. Aber auch in diesem Fall gibt es wieder zwei mögliche Ansätze, die zum gleichen Ergebnis führen.

Definition 7.6.3 (Polyeder). Eine Teilmenge P des $\mathbb{R}^n$ heißt Polyeder, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:

- $P = \text{conv}(p_1, \dots, p_k) + \text{cone}(q_1, \dots, q_m)$ ist Summe einer Konvexen Menge und eines Kegels:

$$\text{conv}(p_1, \dots, p_k) = \{\lambda_1 p_1 + \dots \lambda_k p_k \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$$

  und

$$\text{cone}(q_1, \dots, q_m) = \{\lambda_1 q_1 + \dots \lambda_m q_m \mid \lambda_i \geq 0\}$$

- P ist Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume, der möglicherweise unbeschränkt ist:

$$P = P(A, z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq z, , \text{ ie } (Ax)_i \leq z_i \; \forall 1 \leq i \leq l\}$$

Die Dimension eines Polyeders ist die des aufgespannten (affinen) Unterraums vom $\mathbb{R}^n$ (siehe [Zie95, Kapitel 0, Kapitel 1.1]).

Satz 7.6.4 ([Zie95, Theorem 1.2]). Diese beiden Definitionen sind äquivalent: Es gilt $P = \text{conv}(\{p_1, \dots, p_k\}) + \text{cone}(q_1, \dots, q_m)$ für $p_i, q_j \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $P = P(A, z)$ für ein $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$ und $z \in \mathbb{R}^l$.

Fixiere nun ein volles $\mathbb{Z}$-Gitter $L = \text{span}_{\mathbb{Z}} (w_1, \dots, w_n) \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 7.6.5 (Integrale Polytope). Ein bezüglich L integrales Polytop ist ein Polytop mit Ecken $p_1, \dots, p_k$ in L (vergleiche [BR07, Kapitel 2.1]).

Definition 7.6.6 (Gestreckte Polytope). Sei P ein integrales Polytop und $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Die Streckung (oder Dilatation) von P um x ist ein Polytop, das mit xP bezeichnet wird,

$$xP \;:=\; \{x \cdot p \in \mathbb{R}^n \mid p \in P\}.$$

Definition 7.6.7 (Gitterpunkt-Zählfunktion). Sei P ein integrales Polytop bezüglich L und $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Definiere die Gitterpunkt-Zählfunktion $L_P(x)$ wie in [BR07, Kapitel 2.2] durch

$$L_P(x) \ := \ \#(xP \cap L).$$

Die Funktion $L_P(x)$ gibt also in Abhängigkeit vom Streckfaktor $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ an, wieviele Gitterpunkte in dem (abgeschlossenen) Polytop P liegen. Hierbei wird verwendet, dass die Eckpunkte des Polytops Gitterpunkte sind, sodass auch für $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Polytop xP integral ist. Das Besondere: $L_P(x)$ ist polynomiell, wie [BR07, Theorem 3.8] (im Original [Ehr62]) besagt.

Theorem 7.6.8 (Ehrhart für integrale Polytope). Ist P ein integrales Polytop der Dimension n, so ist $L_P(x)$ ein Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad n.

Bemerkung 7.6.9. Für $x \notin \mathbb{Z}$ haben die Zahlen $L_P(x)$ keine weitere Bedeutung.

Definition 7.6.10. Sei P integrales Polytop. Schreibe fortan $\mathrm{EHP}_P(x)$ anstelle $L_P(x)$ und bezeichne das Polynom als 'Ehrhartpolynom'.

Das Konzept des Gitterpunktezählens in einem Polytop lässt sich auch auf rationale Polytope erweitern, Polytope also, deren Eckpunkte nicht unbedingt in $L = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\,(w_1, \ldots, w_n)$ liegen müssen, sondern in $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(w_1, \ldots, w_n)$ sein dürfen. Solche Polytope werden durch Ungleichungsbedingungen mit integralen Koeffizienten bezüglich der w_i beschrieben, das heißt, das System $P = P(A, z)$ hat Koeffizienten $a_{ij}, z_j \in \mathbb{Z}$. Hier kann man zwar keine Polynomgestalt von $L_P(x)$ erwarten, aber immerhin *Quasipolynomgestalt.* Ein Quasipolynom f vom Grad n der Periode $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ist ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten, die periodische Funktionen mit Periode m sind (f selbst muss natürlich nicht periodisch sein!). Weil wir mit $L_P(x)$ nur eine Funktion $\mathbb{Z} \to k$ betrachten, können wir f als endliche Familie von echten Polynomen ansehen. Wir verwenden also folgende vereinfachte Definition eines Quasipolynomes:

Definition 7.6.11 (Quasipolynom, vereinfachte Definition). Ein Quasipolynom f der Periode m ist gegeben durch Polynome $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $f(x) = f_j(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $x = j \mod m$ (siehe auch [MW05]).

Gegeben einen rationalen Punkt in $\mathbb{R}^n$ mit vollständig gekürzten Koordinaten $\frac{z_i}{n_i}$, so nennen wir die n_i die Nenner des Punktes.
Das analoge Resultat lautet nun [BR07, Theorem 3.23]:

Theorem 7.6.12 (Ehrhart für rationale Polytope). Ist P ein rationales Polytop der Dimension n, so ist $L_P(x)$ ein Quasipolynom in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad n mit Periode $m \leq d$ für $d = \min\{x \in \mathbb{Z}_{>0} \mid xP \text{ integral }\} = \mathrm{kgV}\{\text{Nenner der Eckpunkte}\}$. Es gilt sogar: Die Periode teilt d.

Man kann also für ein rationales Polytop die Familie $\{xP \mid x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ aufteilen in m verschiedene Kleinfamilien $\mathcal{P}_j := \{xP \mid x = j \mod m\}$, für die die Gitterpunkt-Zählfunktion $L_P(x)$ polynomiell in x ist.

Definition 7.6.13. Sei P rationales Polytop. Wir schreiben auch für das Quasipolynom $\mathrm{EHP}_P(x)$ anstelle $L_P(x)$ und bezeichnen es als 'Ehrhart-Quasipolynom'.

Bemerkung 7.6.14. Für Polytope, die nicht rational sind, gibt es bislang keine vergleichbaren Resultate, siehe [BR07, Bemerkung 3.8].

Bemerkung 7.6.15. Anstelle xP als Dilatation des Polytops P zu sehen, kann man xP auch als Schnitt eines geeigneten Polyederkegels mit einer Hyperebene auffassen (siehe [BR07, Kapitel

3.3]): Angenommen, das Polytop P lebt im $\mathbb{R}^n$ und hat Eckpunkte $p_1, \dots, p_m$. Dann definiere den Kegel darüber als

$$\operatorname{cone}(P) = \{\lambda_1(p_1, 1) + \dots \lambda_m(p_m, 1) \mid \lambda_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Das ursprüngliche Polytop P ist nun der Schnitt vom Kegel mit der Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1\},$$

also $P = \operatorname{cone}(P) \cap H$.

Bemerkung 7.6.16 (Grundkörperwechsel). In diesem Kapitel wurden Gitterpunkte im $\mathbb{R}^n$ gezählt, wir möchten jedoch über beliebigen Grundkörpern k der Charakteristik 0 arbeiten und Gitterpunkte in $\mathfrak{t}^* = k^n$ zählen. Wir können die Gitterpunkte aber ebensogut in $\mathbb{Q}^n \subset k^n$ zählen, denn wir arbeiten stets nur mit rationalem $V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ und rationalen Kegeln, das heißt, die definierenden Gleichungen haben ausschließlich rationale Koeffizienten, und damit betrachten wir nur rationale Polyeder. Durch anschließendes Hochinduzieren von $\mathbb{Q}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ durch $k \otimes_{\mathbb{Q}} -$ ändert sich nichts an der Anzahl der Gitterpunkte im rationalen Polytop. Das Ehrhartpolynom des Polytops über $\mathbb{R}$ zählt also die Gitterpunkte im Polytop über k.

7.7 Anwendung der Ehrharttheorie auf Familien von Regionen $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$

Wo finden wir in $\mathfrak{t}^*$ Familien integraler oder rationaler Polytope P mitsamt ihren Dilatationen xP für $x \in \mathbb{Z}_{>0}$? Sie treten bei dem Versuch auf, die Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ zu zählen, für all diejenigen $\alpha \in \mathfrak{t}^*$, die dieselbe Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ haben. Eine Region $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ wurde in Kapitel 6.2 beschrieben als Schnitt $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = M_J \cap M_\vartheta$ für

$$\begin{aligned} M_J &= \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+, \\ \gamma_j < 0 \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\} \\ M_\vartheta &= \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \sum_{j \in J} \gamma_j \eta_j \;\in\; \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j \;+\; \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\eta_i \right\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.7.1 (Dr Jekyll and Mr Hyde). An dieser Beschreibung wird deutlich, dass sich M_J ganz wunderbar für die Beschreibung durch Gitterpunkte und Polytope eignet, während das Verhalten von M_ϑ nur schwer kontrollierbar erscheint, insbesondere hat M_ϑ bisher noch keine Beschreibung durch ein brauchbares Gitter erhalten.

Wegen der schweren Kontrollierbarkeit der Menge M_ϑ werden die folgenden Untersuchungen nur in einem Spezialfall durchgeführt. Wir treffen für den restlichen Abschnitt folgende Annahmen:

Ann1 Fixiere wie üblich $\mathfrak{g}$ und damit auch $V(\mathfrak{g})$ *rational*, das heißt, die definierenden Gleichungen sollen Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ haben.

Ann2 Fixiere eine Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ für $\mathfrak{g}$.

Ann3 Fordere

$$\mathfrak{g}^* = \operatorname{span}_k \{\eta_j \mid j \in J\} \oplus \operatorname{span}_k \{\eta_i \mid i \in I\}.$$

Diese Voraussetzung garantiert $M_\vartheta = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ (siehe Lemma 7.7.4), also ist $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = M_J$.

Wir fixieren hierbei jedoch nur die Vorzeichenkonfiguration J, nicht jedoch das α selbst, noch nicht einmal das χ. Wir möchten nämlich gerade untersuchen, wie sich die Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ mit der von $\overline{\langle\alpha'\rangle}_{B^{\chi'}}$ verbinden lässt, wobei $\alpha' = x \cdot \alpha$ mit $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $\chi' = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k \eta_k$.

Bemerkung 7.7.2. Die Annahme (**Ann3**) ist beispielsweise erfüllt, wenn

- $I = \emptyset$,
- $\eta_i = 0$ für alle $i \in I$, oder
- $J = \emptyset$

gilt. Der dritte Fall, $J = \emptyset$, ist allerdings langweilig, weil dann schon $\overline{\langle \alpha \rangle}_{B^\chi} = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ gilt. In Beispiel 5.7.1 haben wir sowohl den Fall $I = \emptyset$ als auch den Fall $J = \emptyset$ beobachten können, siehe dazu auch Bemerkung 6.2.4.

Bemerkung 7.7.3. Entscheidend an der Forderung $\mathfrak{g}^* = \mathrm{span}_k \{\eta_j \mid j \in J\} \oplus \mathrm{span}_k \{\eta_i \mid i \in I\}$ ist, dass daraus die Äquivalenz von

$$\sum_{k \in I \cup J} \gamma_k \eta_k = \sum_{k \in I \cup J} \alpha_k \eta_k.$$

und

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \eta_j = \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j \quad \text{und} \quad \sum_{i \in I} \gamma_i \eta_i = \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i$$

folgt.

Außerdem ist M_ϑ unter dieser Annahme nun leicht kontrollierbar:

Lemma 7.7.4. Gilt $\mathfrak{g}^* = \mathrm{span}_k \{\eta_j \mid j \in J\} \oplus \mathrm{span}_k \{\eta_i \mid i \in I\}$, so folgt $M_\vartheta = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$.

Beweis. Die Inklusion $M_\vartheta \subset V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ ist klar. Sei also $\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$. Hieraus folgt unter der Voraussetzung an $\mathfrak{g}^*$, dass

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \eta_j = \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j.$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \eta_j \in \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j + \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \eta_i,$$

und es folgt $\gamma \in M_\vartheta$ nach Definition von M_ϑ. ☺

Bemerkung 7.7.5. Unter der Voraussetzung an $\mathfrak{g}^*$ ist

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \eta_j \in \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j + \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \eta_i$$

sogar äquivalent zu

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \eta_j = \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j.$$

Das folgende Lemma ist nur illustrativ - es sagt, dass die Eigenschaft $M_\vartheta = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ unter Dilatation von $\overline{\langle \alpha \rangle}_{B^\chi}$ erhalten bleibt (und somit an unseren Verwendungszweck angepasst ist):

Lemma 7.7.6. Betrachte $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ mit $M_\vartheta = V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$. Es wird dann für $\alpha' = x \cdot \alpha$ (mit $x \in \mathbb{Z}_{>0}$) die Identität $M'_\vartheta = V(\mathfrak{g} - \chi'(\mathfrak{g}))$ gewahrt, wobei $\chi' = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k \eta_k$ ist.

Beweis. Man formt dazu M'_ϑ etwas um:

$$\begin{aligned}
M'_\vartheta &= \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \sum_{j\in J}\gamma_j\eta_j \in \sum_{j\in J}\alpha'_j\eta_j + \sum_{i\in I}\mathbb{Z}\eta_i\right\} \\
&= \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \sum_{j\in J}\gamma_j\eta_j \in \sum_{j\in J}x\alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I}\mathbb{Z}\eta_i\right\} \\
&\supset \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \sum_{j\in J}\gamma_j\eta_j \in x\left(\sum_{j\in J}\alpha_j\eta_j + \sum_{i\in I}\mathbb{Z}\eta_i\right)\right\} \\
&= \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g})) \mid \frac{1}{x}\gamma \in M_\vartheta\right\} \\
&= \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g})) \mid \frac{1}{x}\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g}))\right\} \\
&= V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g})),
\end{aligned}$$

und die Inklusion $M'_\vartheta \subset V(\mathfrak{g}-\chi'(\mathfrak{g}))$ ist ohnehin klar. ☺

Definiere als nächstes die Zutaten für die Beschreibung von einer Region $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ durch Gitterpunkte in einem Polytop. Unter unserer Voraussetzung, dass

$$\mathfrak{g}^* = \operatorname{span}_k\{\eta_j \mid j\in J\} \oplus \operatorname{span}_k\{\eta_i \mid i \in I\}$$

ist, folgt sofort

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = M_J = \left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } j\in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z},\\ \gamma_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+,\\ \gamma_j < 0 \text{ für } j\in J_-\end{array}\right\}.$$

Verbindet man dies mit der Beschreibung aus Lemma 6.3.1, nämlich

$$\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \bigcup_{i=1}^{p} E' + (\delta_i + \alpha), \tag{2}$$

so liest man ab, dass man in diesem Spezialfall die δ_i besonders geschickt wählen kann. Diese Beschreibung spielt hier hauptsächlich eine illustrative Rolle, denn die konkreten Wahlen der δ_i werden wir im weiteren Verlauf nicht mehr brauchen. Nichtsdestotrotz schlägt sie die Brücke zwischen der ursprünglichen Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ wie in (2) und unserer angestrebten Beschreibung von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ mit Gitterpunkten und Polyedern.

Proposition 7.7.7 (Beschreibung der $\boldsymbol{\delta_i}$ aus Gleichung (2)**).** Man kann

$$\{\delta_1,\ldots,\delta_p\} = \left\{\delta' \in V(\mathfrak{g}) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } i\in I \text{ gilt } \delta'_i = 0,\\ \text{für alle } j\in J \text{ gilt } \delta'_j \in \mathbb{Z},\\ \delta'_j \geq -\alpha_j \text{ für } j\in J_+,\\ \delta'_j < -\alpha_j \text{ für } j \in J_-\end{array}\right\}$$

wählen.

Beweis. Es ist $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} = \bigcup_{\delta'} E' + (\delta'+\alpha)$ zu zeigen, mit andern Worten, wir müssen

$$\left\{\gamma \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } j\in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z},\\ \gamma_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+,\\ \gamma_j < 0 \text{ für } j\in J_-\end{array}\right\} = E' + \left\{\delta' \in V(\mathfrak{g}) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } i\in I \text{ gilt } \delta'_i = 0,\\ \text{für alle } j\in J \text{ gilt } \delta'_j \in \mathbb{Z},\\ \delta'_j \geq -\alpha_j \text{ für } j\in J_+,\\ \delta'_j < -\alpha_j \text{ für } j \in J_-\end{array}\right\} + \alpha$$

sehen. Dazu formen wir die zweite Menge zuerst etwas um. Zunächst einmal ist

$$\left\{\delta' \in V(\mathfrak{g}) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } i\in I \text{ gilt } \delta'_i = 0,\\ \text{für alle } j\in J \text{ gilt } \delta'_j \in \mathbb{Z},\\ \delta'_j \geq -\alpha_j \text{ für } j\in J_+,\\ \delta'_j < -\alpha_j \text{ für } j \in J_-\end{array}\right\} + \alpha = \left\{\delta'' \in V(\mathfrak{g}-\chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{für alle } i\in I \text{ gilt } \delta''_i = \alpha_i,\\ \text{für alle } j\in J \text{ gilt } \delta''_j \in \mathbb{Z},\\ \delta''_j \geq 0 \text{ für } j\in J_+,\\ \delta''_j < 0 \text{ für } j \in J_-\end{array}\right\},$$

anschließend addiert man in jedem Punkt δ'' den Unterraum $E' = \{\gamma \in V(\mathfrak{g}) \mid \gamma_j = 0 \text{ für } j \in J\}$ und erhält

$$\left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } i \in I \text{ gibt es ein } e \in E' \text{ mit } \gamma_i = \alpha_i + e_i, \\ \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+, \\ \gamma_j < 0 \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\}$$

Daraus folgt unmittelbar die Inklusion $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi} \supset \bigcup_{\delta'} E' + (\delta' + \alpha)$. Für die andere Richtung ist einzusehen, dass die Bedingung

$$\text{Für alle } i \in I \text{ gibt es ein } e \in E' \text{ mit } \gamma_i = \alpha_i + e_i$$

für alle $\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$ automatisch erfüllt ist. Sei also $\gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g}))$. Dann ist $\gamma - \alpha \in V(\mathfrak{g})$, das heißt

$$\sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - \alpha_k)\eta_k = 0.$$

Es gilt dank der Voraussetzung $\mathfrak{g}^* = \operatorname{span}_k \{\eta_j \mid j \in J\} \oplus \operatorname{span}_k \{\eta_i \mid i \in I\}$, dass nun schon

$$\sum_{i \in I} (\gamma_i - \alpha_i)\eta_i = 0$$

gewesen sein muss. Definiere e durch $e_i := \gamma_i - \alpha_i$ für $i \in I$ und $e_j = 0$ für alle $j \in J$. Es folgt $e \in V(\mathfrak{g})$, und nach Definition ist e auch in E', wie gewünscht. ☺

Wir vergeben die Bezeichnung

$$D := \left\{ \delta \in V(\mathfrak{g} - \chi(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } i \in I \text{ gilt } \delta_i = \alpha_i, \\ \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \delta_j \in \mathbb{Z}, \\ \delta_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+, \\ \delta_j < 0 \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\}.$$

Lemma 7.7.8. Seien $\delta, \delta' \in D$ gegeben. Dann gilt $E' + \delta = E' + \delta'$ genau dann, wenn bereits $\delta = \delta'$ gilt.

Beweis. Die Punkte γ in $E' + \delta$ sind alle von der Form $e + \delta$ für ein $e \in E'$. Weil nach Definition von E' gilt, dass $e_j = 0$ für alle Koordinaten mit $j \in J$ ist, folgt $\gamma_j = \delta_j$ für alle $j \in J$. Gilt also $E' + \delta = E' + \delta'$, so folgt $\delta_j = \delta'_j$ für alle $j \in J$. Nach Definition der $\delta, \delta' \in D$ gilt aber zugleich $\delta_i = \delta'_i = \alpha_i$ für alle $i \in I$. Insgesamt erhalten wir $\delta = \delta'$. Die andere Implikation ist klar. ☺

Der folgende Korollar begründet, dass die Punkte aus D zur Zählung der Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ benutzt werden können.

Korollar 7.7.9. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ entspricht genau der Kardinalität $\#D$.

Beweis. Wir haben schon in Bemerkung 6.3.2 festgestellt, dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ mit der Anzahl der Translate von E' zusmmenfällt. Nun gibt jedes $\delta \in D$ ein Translat $\delta + E'$. Das vorige Lemma 7.7.8 garantiert, dass wir keine Zusammenhangskomponente doppelt zählen. ☺

Sei pr_J die Projektion von k^n auf $k^J := \operatorname{span}_k\{\pi_j \mid j \in J\}$. Die Kardinalität von D bleibt unter dieser Projektion erhalten:

Proposition 7.7.10.

- Es gilt

$$\mathrm{pr}_J(D) = \left\{ d \in k^J \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum\limits_{j\in J} d_j\eta_j = \sum\limits_{j\in J} \alpha_j\eta_j \\ \text{für alle } j \in J \text{ gilt } d_j \in \mathbb{Z}, \\ d_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+, \\ d_j < 0 \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\}.$$

- Es gilt $\#D = \#\mathrm{pr}_J(D)$.

Beweis.

- Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen von pr_J und D.
- Aus unserer Voraussetzung an $\mathfrak{g}^*$ folgt, dass es eine Bijektion zwischen D und $\mathrm{pr}_J(D)$ gibt. Die Abbildung $D \to \mathrm{pr}_J(D)$ ist selbstverständlich durch $\delta \mapsto \mathrm{pr}_J(\delta)$ gegeben. Für die Umkehrabbildung $\mathrm{pr}_J(D) \to D$ betrachte man ein $d \in \mathrm{pr}_J(D)$. Es gilt insbesondere $\sum\limits_{j\in J} d_j\eta_j = \sum\limits_{j\in J} \alpha_j\eta_j$. Definiere nun $d \mapsto \delta$ mit $\delta_j := d_j$ für alle $j \in J$ und $\delta_i := \alpha_i$ für alle $i \in I$. Dies ist in der Tat ein Element in D. ☺

Bemerkung 7.7.11. Es gilt sogar (als unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen)

$$\#D = \#\mathrm{pr}_J(D) = \#\mathrm{pr}_J(M_J) = \#\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}\right),$$

was die konkrete Angabe der Gitterpunkte überflüssig macht.

Weil $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}\right)$ ohnehin in $\mathbb{Z}^J$ lebt, ist es zulässig, nur noch über $\mathbb{Q}$ zu arbeiten. Wir fassen unsere neue Situation nochmals zusammen:

Definition 7.7.12. Wir arbeiten von nun an mit

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^J &:= \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\pi_j \mid j \in J\} \\ \alpha_J &:= (\alpha_j)_{j\in J} \in \mathbb{Q}^J \\ \chi_J &:= \sum_{j\in J} \alpha_j\eta_j \\ V_J &:= \left\{ v \in \mathbb{Q}^J \mid \sum_{j\in J} v_j\eta_j = \chi_J \right\}. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, zu zeigen, dass $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}\right)$ sich als Schnitt eines Polytopes mit einem Gitter beschreiben lässt, die wie folgt definiert werden:

Definition 7.7.13. Definiere das Polytop

$$P_J := \left\{ d \in V_J \;\middle|\; \begin{array}{ll} d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{array} \right\}$$

sowie das Standard-$\mathbb{Z}$-Gitter

$$L \;=\; \mathbb{Z}^J \;=\; \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\pi_j \mid j \in J\}.$$

Lemma 7.7.14. Hierbei ist natürlich $P_J \cap L = \mathrm{pr}_J(D) = \mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}\right)$.

Beweis. Folgt durch Ausschreiben der Definitionen. ☺

Wir verfeinern unsere Vorgehensweise ein weiteres Mal: Um einen gemeinsamen Rahmen für $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ und seine Dilatation $\overline{\langle x\alpha\rangle}_{B^{\chi'}}$ zu finden, übersetzen wir das Polytop P_J nun im Sinne von Bemerkung 7.6.15 in eine Beschreibung als Schnitt eines Polyederkegels Δ_J mit einem Unterraum in $\mathbb{Q}^J$.

Definition 7.7.15 (Der Polyederkegel). Wir definieren den Polyederkegel durch

$$\begin{aligned}\Delta_J &:= \{v \in \mathbb{Q}^J \mid v_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+,\ v_j \leq -1 \text{ für } j \in J_-\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{array}{l} \Lambda_j(v) \leq 0 \text{ für } j \in J_+, \\ \Lambda_j(v) \leq -1 \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

wobei in den definierenden Ungleichungen die Funktionen

$$\Lambda_j := \begin{cases} \Lambda_j(v) = -v_j, & \text{falls } j \in J_+ \\ \Lambda_j(v) = v_j, & \text{falls } j \in J_- \end{cases}$$

verwendet werden.

Bemerkung 7.7.16 (Vergleich mit dem Polyederkegel C'). Die Definition der Λ_j orientiert sich hierbei an der Definition der λ_j in Abschnitt 6.2, während $\Delta_J - \alpha$ das Analogon zum Kegel C' aus Abschnitt 6.2 ist.

Der Vorteil dieser Definition von Δ_J ist, dass sie unabhängig von χ ist, damit eignet sie sich dazu, die Zusammenhangskomponenten für alle Regionen $\overline{\langle x\alpha\rangle}_{B^{\chi'}}$ mit $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ zu zählen.

Proposition 7.7.17 (Eigenschaften von P_J und Δ_J). Die Mengen P_J und Δ_J erfüllen die folgenden Eigenschaften:

1. $P_J = \Delta_J \cap V_J$.
2. P_J ist in der Tat ein Polytop, also ein beschränkter Polyeder.

Beweis.

1. $P_J = \Delta_J \cap V_J$ kann man an den Definitionen ablesen.
2. P_J ist ein Polyeder, da P_J durch lineare Gleichungen (in der Definition von V_J) und lineare Ungleichungsbedingungen (in der Definition von Δ_J) gegeben ist. Die Beschränktheit prüfen wir am verschobenen Polyeder $P_J - \alpha_J = (\Delta_J - \alpha_J) \cap V_0$, wobei

$$V_0 = \{v \in \mathbb{Q}^J \mid \sum_{j \in J} v_j \eta_j = 0\} = \mathrm{pr}_J(V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n).$$

Nach Definition gilt zudem $\lambda_j(\gamma) = \Lambda_j(\mathrm{pr}_J(\gamma))$ für alle $\gamma \in V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n$, sodass das Bild der Λ_j auf V_0 durch λ_j bestimmt wird. Für die $\lambda_j \in (V(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{Q}^n)^*$ existieren nach Lemma 6.1.9 (und nach Definition der Indexmenge J) rationale Koeffizienten $q_j > 0$, sodass

$$\sum_{j \in J} q_j \lambda_j = 0.$$

Betrachten wir Λ_j eingeschränkt auf V_0 als Element von V_0^*, so folgt

$$\sum_{j \in J} q_j \Lambda_j = 0,$$

und wir können nun obere und untere Schranken für alle Koeffizienten v_j von $v \in (\Delta_J - \alpha_J) \cap V_0$ angeben:

- $j \in J_+$: In diesem Fall gilt $v_j \geq -\alpha_j$ und
$$v_j = -\Lambda_j(v) = \frac{1}{q_j} \sum_{k \neq j} q_k \Lambda_k(v) \leq \frac{1}{q_j} \sum_{k \neq j} q_k(-\alpha_k).$$
- $j \in J_-$: In diesem Fall gilt $v_j \leq -1 - \alpha_j$ und
$$v_j = \Lambda_j(v) = -\frac{1}{q_j} \sum_{k \neq j} q_k \Lambda_k(v) \geq \frac{1}{q_j} \sum_{k \neq j} q_k \alpha_k.$$

Das nächste Ziel ist, für $\alpha' = x\alpha$ mit $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ die Menge $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha'\rangle}_{B^{\chi'}}\right)$ als 'Dilatation' von $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^{\chi}}\right)$ zu beschreiben. Präziser ausgedrückt: Wir werden P'_J (das zu α' assoziierte Polytop) als Streckung von P_J um einen geeigneten Streckfaktor beschreiben. Wir werden dabei beobachten, dass das Streckzentrum z unserer Dilatation nicht immer der Punkt $0 \in \mathbb{Q}^J$ ist, sondern (in Abhängigkeit von J, nicht aber von χ!) als Punkt $z \in \mathbb{Q}^J$ mit
$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j \in J_+ \\ -1 & \text{für } j \in J_- \end{cases}$$
definiert werden sollte. Das heißt, man muss $P_J \cap L$ zuerst um $-z$ verschieben, P_J dann strecken und das Resultat wieder zurückverschieben, um $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha'\rangle}_{B^{\chi'}}\right)$ aus $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^{\chi}}\right)$ zu bekommen. Der Streckfaktor ist nicht x selber, sondern nur linear in x. Die Umskalierung wird nötig, um der z-Verschiebung Rechnung zu tragen. Die lästigen Details finden sich in der untenstehenden Proposition.

Proposition 7.7.18 (Dilatation). Die Beschreibung von $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^{\chi}}\right)$ als Schnitt $P_J \cap L$ ist unter Umskalierung verträglich mit Dilatation, das heißt, für $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt
$$\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle x\alpha\rangle}_{B^{\chi'}}\right) \;=\; (f(x)(P_J - z) + z) \cap L.$$
Hierbei nimmt die lineare Funktion $f(x)$ die Umskalierung des Streckfaktors vor, genauer gilt
$$f(x) = \frac{x - a_0}{1 - a_0} \qquad \text{mit } a_0 \text{ derart, dass } z \in a_0 \cdot \alpha + V_0$$
mit $V_0 = \{v \in \mathbb{Q}^J \mid \sum_{j\in J} v_j\eta_j = 0\}$ dem Analogon zu $V(\mathfrak{g})$ wie zuvor. Insbesondere ist a_0 nur von α und z, nicht jedoch von x abhängig.

Beweis. Hierzu muss man wieder nur die Definitionen zusammenfügen. Aus $x > 0$ und x integral folgt, dass die Vorzeichenkonfiguration von $x\alpha$ dieselbe ist wie die von α. Es gilt also
$$\overline{\langle x\alpha\rangle}_{B^{\chi'}} = M'_J = \left\{ \gamma \in V(\mathfrak{g} - \chi'(\mathfrak{g})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } j \in J \text{ gilt } \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_j \geq 0 \text{ für } j \in J_+, \\ \gamma_j < 0 \text{ für } j \in J_- \end{array} \right\}$$
und nach Lemma 7.7.14 weiter $\mathrm{pr}_J\left(\overline{\langle x\alpha\rangle}_{B^{\chi'}}\right) = P'_J \cap L$ mit
$$P'_J := \left\{ d \in V'_J \;\middle|\; \begin{array}{ll} d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{array} \right\},$$
wobei
$$V'_J := \left\{ v \in \mathbb{Q}^J \mid \sum_{j\in J} v_j\eta_j = \sum_{j \in J} \alpha'_j \eta_j = \chi'_J \right\}$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass $P'_J = f(x)(P_J - z) + z$ bzw.

$$P'_J - z = f(x)(P_J - z)$$

gilt. Zunächst bestimmen wir $f(x)$. Zur Erinnerung: $f(x)$ muss derart sein, dass Multiplikation von dem verschobenen $(\alpha - z)$ mit $f(x)$ und anschließendes Zurückverschieben um z mit dem ursprünglichen $x\alpha$ übereinstimmt, bis auf ein Element

$$v_0 \in V_0 := \{v \in \mathbb{Q}^J \mid \sum_{j \in J} v_j \eta_j = 0\},$$

dem Analogon von $V(\mathfrak{g})$. In Formeln:

$$f(x)(\alpha - z) + z = x\alpha + v.$$

Sei a_0 derart, dass $z \in a_0 \cdot \alpha \in V_0$, also $z = a_0\alpha + v_0$ mit $v_0 \in V_0$. Eine kurze Rechnung ergibt

$$f(x) = \frac{x - a_0}{1 - a_0} \quad \text{und} \quad v = \frac{1 - x}{1 - a_0} v_0.$$

Die Behauptung folgt nun aus einer kurzen Manipulation der Definitionen:

$$\begin{aligned}
f(x)(P_J - z) &= f(x) \cdot \left(\left\{ d \in V_J \;\middle|\; \begin{matrix} d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} - z \right) \\
&= f(x) \cdot \left(\left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} d_j \eta_j = \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j & \\ d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} - z \right) \\
&= f(x) \cdot \left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} (d_j + z_j) \eta_j = \sum_{j \in J} \alpha_j \eta_j & \\ d_j + z_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j + z_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} \\
&= f(x) \cdot \left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} d_j \eta_j = \sum_{j \in J} (\alpha_j - z_j) \eta_j & \\ d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq 0 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} d_j \eta_j = f(x) \cdot \sum_{j \in J} (\alpha_j - z_j) \eta_j & \\ d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq 0 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit

$$\begin{aligned}
P'_J - z &= \left\{ d \in V'_J \;\middle|\; \begin{matrix} d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} - z \\
&= \left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} d_j \eta_j = \sum_{j \in J} x\alpha_j \eta_j & \\ d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} - z \\
&= \left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} (d_j + z_j) \eta_j = \sum_{j \in J} x\alpha_j \eta_j & \\ d_j + z_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j + z_j \leq -1 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ d \in \mathbb{Q}^J \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{j \in J} d_j \eta_j = \sum_{j \in J} (x\alpha_j - z_j) \eta_j & \\ d_j \geq 0 & \text{für } j \in J_+, \\ d_j \leq 0 & \text{für } j \in J_- \end{matrix} \right\},
\end{aligned}$$

so muss man nur noch die Gleichheit von

$$f(x) \cdot \sum_{j \in J} (\alpha_j - z_j)\eta_j = \sum_{j \in J} (x\alpha_j - z_j)\eta_j$$

einsehen. Nun ist aber nach Konstruktion

$$f(x)(\alpha - z) = (x\alpha - z) + v,$$

und weil $v \in V_0$ ist, gilt in der Tat

$$\sum_{j \in J} v_j \eta_j = 0,$$

was den Beweis abschließt. ☺

Ein Glück ist jedoch, dass z ein Gitterpunkt ist, sodass man für die Zählung der Gitterpunkte im gestreckten Polytop P'_J nicht mehr zurückverschieben muss. Eine unmittelbare Folgerung von Proposition 7.7.18 ist also der nächste Korollar:

Korollar 7.7.19. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in allen Regionen der Form $\overline{\langle x\alpha \rangle}_{B^{\chi'}}$ für $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ ist gleich $\#(f(x)(P_J - z) \cap L)$.

Beweis. Da z selber ein Gitterpunkt ist, ist die Zahl der Punkte in $(f(x)(P_J - z) + z) \cap L$ gleich derer in $f(x)(P_J - z) \cap L$. ☺

Jetzt kommt die Ehrharttheorie zum Einsatz.

Bemerkung 7.7.20.

- Es muss hierfür unbedingt gelten, dass $V(\mathfrak{g}) = \{(\alpha)_i \in k^n \mid \sum \alpha_i \eta_i = \chi\}$ eine Beschreibung mit rationalen (bzw. integralen) Koeffizienten besitzt - andernfalls lässt sich die Ehrharttheorie nicht anwenden. Daher haben wir Annahme (**Ann1**) voraussetzen müssen.
- Das klassische Ehrhart-Quasipolynom verlangt nach einem integralen Streckfaktor. Wir müssten daher nicht nur x, sondern auch $f(x)$ integral annehmen. Es gibt jedoch zwei Möglichkeiten, dies zu umgehen, sie werden in Abschnitt 7.8 diskutiert.

Korollar 7.7.21. Seien $x, f(x) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Sei $m := \min\{f(x) \in \mathbb{Z}_{>0} \mid f(x)P_J \text{ integral }\}$. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle x\alpha \rangle}_{B^{\chi'}}$, gegeben durch $\#(f(x)(P_J - z) \cap L)$, ist quasipolynomiell in x, das heißt, für alle $x, f(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $f(x) = j \mod m$ ist

$$\#\{\text{Zusammenhangskomponenten von } \overline{\langle x\alpha \rangle}_{B^{\chi'}}\} = \#(f(x)(P_J - z) \cap L) = \mathrm{EHP}_{P_J - z}(f(x))$$

ein Polynom in $\mathbb{Q}[x]$.

Bemerkung 7.7.22. Die Periode m kann Theorem 7.6.12 zufolge sogar kleiner als $\min\{f(x) \in \mathbb{Z}_{>0} \mid f(x)(P_J - z) \text{ integral }\}$ sein, teilt diese Zahl aber immer.

Beweis (von Korollar 7.7.21). Nachdem in Korollar 7.7.19 festgestellt wurde, dass die Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle x\alpha \rangle}_{B^{\chi'}}$ durch die Gitterpunkte in $f(x)(P_J - z) \cap L$ gezählt werden, ist die Aussage eine unmittelbare Folgerung aus dem Ehrharttheorem 7.6.12 für rationale Polytope. ☺

7.8 Die Berechnung des Goldieranges primitiver Quotienten unter Verwendung des Ehrhartpolynoms

Wir erinnern an die Annahmen aus dem letzten Abschnitt:

Ann1 Fixiere wie üblich $\mathfrak{g}$ und damit auch $V(\mathfrak{g})$ *rational*, das heißt, die definierenden Gleichungen sollen Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ haben.

Ann2 Fixiere eine Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ für $\mathfrak{g}$.

Ann3 Fordere $\mathfrak{g}^* = \operatorname{span}_k \{\eta_j \mid j \in J\} \oplus \operatorname{span}_k \{\eta_i \mid i \in I\}$.

Dann erhalten wir mit den zuvor ausgearbeiteten Resultaten folgenden Satz über den Goldierang des primitiven Quotienten $B^\chi/J(\alpha)$, wobei B^χ wie zuvor aus der Weylalgebra hervorgeht:

Satz 7.8.1 (Goldierang von $B^\chi/J(\alpha)$, integraler Fall). Sei $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ zur Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ gegeben. Seien $x, f(x) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es werden die Annahmen (**Ann1**)-(**Ann3**) vorausgesetzt. Dann ist der Goldierang der primitiven Quotienten $B^{\chi'}/J(x\alpha)$ ein Quasipolynom in x gegeben durch

$$\operatorname{Grk}_{B^{\chi'}/J(x\alpha)}(B^{\chi'}/J(x\alpha)) \;=\; \operatorname{EHP}_{P_J - z}(f(x)),$$

wobei $\operatorname{EHP}_{P_J - z}(f(x))$ das Ehrhart-Quasipolynom des rationalen Polytopes

$$P_J - z$$

bezüglich des Standardgitters $L = \mathbb{Z}^J$ aus Abschnitt 7.7 verknüpft mit der linearen Umskalierung $f(x)$ aus Proposition 7.7.18 ist.

Beweis. Nach Satz 7.5.1 gleicht der Goldierang des primitiven Quotienten $B^{\chi'}/J(x\alpha)$ der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\overline{\langle x\alpha \rangle}_{B^{\chi'}}$. Diese Zahl wird Korollar 7.7.21 zufolge durch das Ehrhart-Quasipolynom $\operatorname{EHP}_{P_J - z}(f(x))$ bestimmt. ☺

Nähere Eigenschaften dieser Polynome finden sich in der Literatur über Ehrhartpolynome, zur Berechnung ihrer Koeffizienten vergleiche beispielsweise [BR07]. Insbesondere kann man aus der klassischen Ehrharttheorie folgenden Korollar gewinnen:

Korollar 7.8.2. Der Grad des Goldierang-Quasipolynoms aus Satz 7.8.1 ist höchstens $|J|$.

Beweis. Dies folgt aus der entsprechenden Aussage über Ehrhart-Quasipolynome, siehe [BR07, 3.23]. Wir verknüpfen das Ehrhart-Quasipolynom nur mit einer linearen Funktion, sodass der Grad erhalten bleibt. ☺

Wir mussten die zusätzliche Voraussetzung $f(x) \in \mathbb{Z}$ in Satz 7.8.1 annehmen, um die klassische (und wohlbekannte) Theorie von Ehrhart-Quasipolynomen anwenden zu können. Allerdings kann man auf diese Voraussetzung verzichten, wenn man mit der entsprechenden Verallgemeinerung des Ehrhart-Quasipolynoms arbeitet. Das *rationale Ehrhart-Quasipolynom* $\operatorname{EHP}^{\mathbb{Q}}$, wie es sich in [Lin11] findet, nimmt rationale Dilatationsfaktoren entgegen. Nun ist $f(x)$ aber stets rational, da $f(x) = \frac{x - a_0}{1 - a_0}$ gilt und a_0 die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ ist (man rechnet den Schnittpunkt des Strahls durch α mit dem durch rationale Koeffizienten gegebenen affinen Unterraum $z + V_0$ aus). Somit fallen weitere Bedingungen an $f(x)$ weg. Dann gilt allgemeiner die Aussage

Satz 7.8.3 (Goldierang von $B^\chi/J(\alpha)$, rationaler Fall I). Sei $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ zur Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ gegeben. Sei $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es werden die Annahmen (**Ann1**)-(**Ann3**) vorausgesetzt. Dann ist der Goldierang der primitiven Quotienten $B^{\chi'}/J(x\alpha)$ ein Quasipolynom in x gegeben durch

$$\operatorname{Grk}_{B^{\chi'}/J(x\alpha)}(B^{\chi'}/J(x\alpha)) \;=\; \operatorname{EHP}^{\mathbb{Q}}_{P_J - z}(f(x)),$$

wobei $\operatorname{EHP}^{\mathbb{Q}}_{P_J - z}(f(x))$ das rationale Ehrhart-Quasipolynom des rationalen Polytopes

$$P_J - z$$

bezüglich des Standardgitters $L = \mathbb{Z}^J$ aus Abschnitt 7.7 verknüpft mit der linearen Umskalierung $f(x)$ aus Proposition 7.7.18 ist.

Der Goldierang von $B^{\chi'}/J(x\alpha)$ lässt sich unter obigen Voraussetungen also durch eine endliche Familie von Polynomen beschreiben, auch im Fall des rationalen Ehrhart-Quasipolynoms, siehe [Lin11, Theorem 1.6]
Nun gibt es in unserer speziellen Situation aber auch die Möglichkeit, das Problem von rationalen Streckfaktoren gänzlich zu vermeiden, indem man ein geschicktes Polytop wählt: Unser Streckfaktor hat die Gestalt $\frac{x-a_0}{1-a_0}$ mit $a_0 = \frac{a_Z}{a_N} \in \mathbb{Q}$. Aus der Konstruktion von a_0 geht überdies hervor, dass $a_0 < 1$ ist, also gilt $a_N - a_Z > 0$. Man kann den Streckfaktor nun umschreiben in

$$\frac{x-a_0}{1-a_0} = \frac{a_N x + a_Z}{a_N - a_Z}.$$

Der Nenner dieses Bruchs ist unabhängig von x, da er unter alleiniger Verwendung von α und $\mathfrak{g}$ berechnet wurde, und somit *konstant*.
Definiere also das neue rationale Referenzpolytop $Q := \frac{1}{a_N - a_Z}(P_J - z)$. Es gilt

$$f(x) \cdot (P_J - z) \;=\; (a_N x + a_Z) \cdot Q,$$

wir haben die rationale Dilatation von $P_J - z$ also in eine integrale Dilatation von Q umgewandelt. Eine dritte Variante unseres Satzes lautet nun:

Satz 7.8.4 (Goldierang von $B^\chi/J(\alpha)$, rationaler Fall II). Sei $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ zur Vorzeichenkonfiguration $J = J_+ \cup J_-$ gegeben. Sei $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es werden die Annahmen (**Ann1**)-(**Ann3**) vorausgesetzt. Dann ist der Goldierang der primitiven Quotienten $B^{\chi'}/J(x\alpha)$ ein Quasipolynom in x gegeben durch

$$\mathrm{Grk}_{B^{\chi'}/J(x\alpha)}(B^{\chi'}/J(x\alpha)) \;=\; \mathrm{EHP}_Q(a_N x + a_Z),$$

wobei $\mathrm{EHP}_Q(a_N x + a_Z)$ das klassische Ehrhart-Quasipolynom des rationalen Polytopes

$$Q := \frac{1}{a_N - a_Z}(P_J - z)$$

bezüglich des Standardgitters $L = \mathbb{Z}^J$ aus Abschnitt 7.7 verknüpft mit der *integralen* linearen Umskalierung $a_N x + a_Z$) ist.

Bemerkung 7.8.5. Ein Resultat wie in Satz 7.8.1 für primitive Quotienten eines zentralen Quotienten der hypertorischen einhüllenden Algebra wurde schon in [BLPW10, Bemerkung 7.5] erwähnt.

Bemerkung 7.8.6. Es wäre natürlich wünschenswert, die Annahmen an $\mathfrak{g}^*$ etwas zu reduzieren. Musson und Van den Bergh geben in [MVdB98, Beispiel 7.2.7] ein Beispiel an, wo für eine vorgegebene Vorzeichenkonfiguration zwei verschiedene Mengen M_ϑ, M'_ϑ entstehen. Somit ist nicht zu erwarten, dass Annahme (**Ann3**) fallen gelassen werden kann. Jedoch bleibt die Hoffnung, die Menge M_ϑ so umzuformen, dass man ein konkretes Untergitter des Standardgitters $\mathbb{Z}^n$ ablesen kann. Die zweite Frage lautet dann, ob diese Untergitter für $\overline{\langle\alpha\rangle}_{B^\chi}$ und $\overline{\langle x\alpha\rangle}_{B^{\chi'}}$ übereinstimmen. Dann nämlich ließe sich ein ähnliches Resultat wie 7.8.1 erzielen, wobei das Ehrhart-Quasipolynom bezüglich dieses neuen Untergitters ausgerechnet werden müsste.

Literatur

[AF92] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller, *Rings and categories of modules*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 13, Springer-Verlag, New York, 1992.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[Blo81] Richard E. Block, *The irreducible representations of the Lie algebra* $\mathfrak{sl}_2$ *and of the Weyl algebra*, Adv. in Math. **39** (1981), no. 1, 69–110.

[BLPW10] Tom Braden, Anthony Licata, Nicholas Proudfoot, and Ben Webster, *Hypertoric category* $\mathcal{O}$, arXiv 1010.2001 (2010).

[BR07] Matthias Beck and Sinai Robins, *Computing the continuous discretely*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007, Integer-point enumeration in polyhedra.

[Bru10] Jonathan Brundan, *Moeglin's theorem and Goldie rank polynomials in Cartan type* A, arXiv 1010.0640 (2010).

[Cou95] Severino Collier Coutinho, *A primer of algebraic* D*-modules*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Dix96] Jacques Dixmier, *Enveloping algebras*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Revised reprint of the 1977 translation.

[Ehr62] Eugène Ehrhart, *Sur les polyèdres rationnels homothétiques à* n *dimensions*, C. R. Acad. Sci. Paris **254** (1962), 616–618.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[Ful93] William Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Hum78] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978, Second printing, revised.

[Hum08] ———, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category* $\mathcal{O}$, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Jan79] Jens Carsten Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 750, Springer, Berlin, 1979.

[Jan83] ———, *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Jos80a] A. Joseph, *Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra. I, II*, J. Algebra **65** (1980), no. 2, 269–283, 284–306.

[Jos80b] ______, *Kostant's problem, Goldie rank and the Gel′fand-Kirillov conjecture*, Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 191–213.

[Jos81] ______, *Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra. III*, J. Algebra **73** (1981), no. 2, 295–326.

[Jos84] ______, *Primitive ideals in enveloping algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983) (Warsaw), PWN, 1984, pp. 403–414.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), no. 2, 165–184.

[Kun97] Ernst Kunz, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, vol. 87, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[Lam91] Tsit Yuen Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 131, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Lam99] ______, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 189, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Lin11] Eva Linke, *Rational Ehrhart quasi-polynomials*, Journal of Combinatorial Theory **Series A 118** (2011), 1966–1978.

[Los10] Ivan Losev, *Finite W-algebras*, arXiv 1003.5811 (2010).

[Mat89] Hideyuki Matsumura, *Commutative ring theory*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid.

[MS05] Volodymyr Mazorchuk and Catharina Stroppel, *Translation and shuffling of projectively presentable modules and a categorification of a parabolic Hecke module*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 7, 2939–2973 (electronic).

[MVdB98] Ian M. Musson and Michel Van den Bergh, *Invariants under tori of rings of differential operators and related topics*, Mem. Amer. Math. Soc. **136** (1998), no. 650.

[MW05] Tyrrell B. McAllister and Kevin M. Woods, *The minimum period of the Ehrhart quasi-polynomial of a rational polytope*, J. Combin. Theory Ser. A **109** (2005), no. 2, 345–352.

[Oda88] Tadao Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988, An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.

[Pre10] Alexander Premet, *Enveloping algebras of Slodowy slices and Goldie rank*, arXiv 1009.3229 (2010).

[Sch04] Stefan Schwede, *Morita theory in abelian, derived and stable model categories*, Structured ring spectra, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 315, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 33–86.

[Soe86] Wolfgang Soergel, *Équivalences de certaines catégories de $\mathfrak{g}$-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986), no. 15, 725–728.

[Str03] Catharina Stroppel, *Category $\mathcal{O}$: gradings and translation functors*, J. Algebra **268** (2003), no. 1, 301–326.

[TY05] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[VdB91] Michel Van den Bergh, *Differential operators on semi-invariants for tori and weighted projective spaces*, Topics in invariant theory (Paris, 1989/1990), Lecture Notes in Math., vol. 1478, Springer, Berlin, 1991, pp. 255–272.

[Zie95] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995.