Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 11	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 41 (4 Punkte)**.** Gegeben sei ein Modell (M, E) von ZFC. Definiere

$$A \;=\; \{x \in M \mid (M, E) \models \text{"}x \textit{ ist abzählbar}\text{"}\}$$

und $B = M \setminus A$. Bestimmen Sie, welche ZFC-Axiome in den Strukturen $(A, E \restriction (A \times A))$ und $(B, E \restriction (B \times B))$ gelten.

Aufgabe 42 (8 Punkte)**.** Beweisen Sie in ZF, dass das Auswahlaxiom zu den folgenden Aussagen äquivalent ist:

(1) *Das Hausdorffsche Maximalitätsprinzip*: Jede partielle Ordnung $(P, \leq)$ besitzt eine $\subseteq$-maximale linear geordnete Teilmenge $X \subseteq P$, d.h. X wird durch $\leq$ linear geordnet und für jede Teilmenge $X \subseteq Y \subseteq P$, die durch $\leq$ linear geordnet wird, gilt bereits $X = Y$.

(2) *Existenz maximaler Antiketten*: Jede partielle Ordnung $(P, \leq)$ besitzt eine $\subseteq$-maximale Antikette $A \subseteq P$, d.h. A ist eine Antikette in $(P, \leq)$ (d.h. für alle $p, q \in A$ existiert kein $r \in P$ mit $r \leq p$ und $r \leq q$) und für jede Antikette B in $(P, \leq)$ mit $A \subseteq B$ gilt bereits $A = B$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen in ZFC:

(1) *Existenz maximaler Ideale*: Jedes Element eines kommutativen Ringes, das keine Einheit ist, ist in einem maximalen Ideal enthalten.

(2) *Existenz von nicht-prinzipalen Ultrafiltern*: Für jede unendliche Menge X existiert $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:
   (a) $\{x\} \notin \mathcal{U}$ für alle $x \in X$.
   (b) $A \cap B \in \mathcal{U}$ für alle $A, B \in \mathcal{U}$.
   (c) Falls $A \in \mathcal{U}$ und $A \subseteq B \subseteq X$, so gilt $B \in \mathcal{U}$.
   (d) Für alle $A \subseteq X$ gilt entweder $A \in \mathcal{U}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Aufgabe 44 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung konstruierte Struktur $(\mathbb{R}^+, \cdot^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}})$ eine abelsche Gruppe ist.

Abgabe: Freitag, 10. Januar 2020, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.