Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 10	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 37 (Die *Von-Neumann-Hierarchie* und ihre Rangfunktion)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen in ZF:

(1) (2 Punkte) Es existiert eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $N : \mathrm{Ord} \longrightarrow V$ mit den folgenden Eigenschaften:
  (a) $N(0) = \emptyset$.
  (b) $N(\alpha+1) = \mathcal{P}(N(\alpha))$ für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$.
  (c) $N(\alpha) = \bigcup\{N(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathrm{Lim}$.

(2) (2 Punkte) Es gilt $V = \bigcup \mathrm{ran}(N)$.

(3) (1 Punkt) Es existiert eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $R : V \longrightarrow \mathrm{Ord}$ mit

$$x \in N(R(x)+1) \setminus N(R(x))$$

für jede Menge x.

(4) (1 Punkt) Jede Menge x von Ordinalzahlen besitzt eine eindeutig bestimmte kleinste obere Schranke $\mathrm{lub}(x)$ in der kanonischen Ordnung der Ordinalzahlen.

(5) (2 Punkte) Für jede Menge x gilt

$$R(x) \ = \ \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid x \subseteq N(\alpha)\} \ = \ \mathrm{lub}(\{R(y) \mid y \in x\}).$$

Aufgabe 38 (*Scott's Trick*, 4 Punkte)**.** Konstruieren Sie in ZF für jede Äquivalenzrelation E eine Klassenfunktion $Q : \mathrm{field}(E) \to V$ mit

$$\forall x \ \forall y \ [xEy \longrightarrow Q(x) = Q(y)]$$

und der Eigenschaft, dass für jede Klassenfunktion $F : \mathrm{field}(E) \to V$ mit

$$\forall x \ \forall y \ [xEy \longrightarrow F(x) = F(y)]$$

eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $G : ran(Q) \to V$ mit $F = G \circ Q$ existiert (Hinweis: *Betrachten Sie für jedes* $x \in \mathrm{field}(E)$ *das Element*

$$\min\{R(y) \mid y \in \mathrm{field}(E), \ xEy\}$$

von Ord).

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie durch Beweise und Gegenbeispiele in ZF, welche Axiome der Ringtheorie in den Ordinalzahlen mit Ordinalzahladdition und -multiplikation gelten.

Aufgabe 40 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen in ZF:

(1) Für jede Teilmenge x einer Ordinalzahl λ gilt entweder $\operatorname{card}(x) = \operatorname{card}(\lambda)$ oder es existiert eine Kardinalzahl κ mit $\operatorname{card}(x) = \kappa < \operatorname{card}(\lambda)$.

(2) Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl und X eine abzählbare Menge von abzählbaren Teilmengen von κ mit $\kappa = \bigcup\bigcup X$. Dann existiert eine abzählbare Teilmenge x von κ mit $\kappa = \bigcup x$ (Hinweis: *Die Existenz einer solchen Überdeckung wird durch die Axiome von* ZF *nicht ausgeschlossen*).

Abgabe: Freitag, 20. Dezember 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.