

**Einführung in die Mathematische Logik**  
**Wintersemester 2019/20**

---

Übungsaufgaben  
Serie 9

Prof. Dr. Peter Koepke  
PD Dr. Philipp Lücke

---

**Aufgabe 33** (4 Punkte). Eine Relation  $R$  ist *fundiert*, falls

$$(A \neq \emptyset \wedge A \subseteq \text{field}(R)) \longrightarrow \exists a \in A \forall b \in A \neg(bRa)$$

für jede Klasse  $A$  gilt. Formulieren Sie ein *Induktionsschema* für Relationen  $R$  mit der Eigenschaft, dass die Gültigkeit des Schemas äquivalent zur Fundiertheit der jeweiligen Relation ist.

**Aufgabe 34** (5 Punkte). Das Axiomensystem HF besteht aus den Axiomen von EML (d.h. den Axiomen Ex, Ext, Pair und Union, wobei Ex die Existenz der leeren Menge postuliert) und dem *Induktionsschema*, das für jeden Klassenterm  $B$  das Axiom

$$(\emptyset \in B \wedge \forall x \forall y [x \in B \longrightarrow x \cup \{y\} \in B]) \longrightarrow B = V$$

enthält. Zeigen Sie, dass alle Axiome von ST und die Negation des Unendlichkeitsaxioms aus HF abgeleitet werden können.

**Aufgabe 35** (9 Punkte). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) Ist  $A$  eine Klasse, die aus transitiven Mengen besteht, so ist sowohl  $\bigcup A$  als auch  $\bigcap A$  transitiv.
- (2) Ist  $A$  eine transitive Klasse, so ist sowohl  $\bigcup A$  als auch  $\bigcap A$  transitiv.
- (3) Die Potenzmenge einer transitiven Menge ist transitiv.
- (4) Jede transitive Menge ist entweder leer oder enthält die leere Menge.
- (5) Die Klasse aller transitiven Mengen ist nicht transitiv.
- (6) Ist  $A$  eine Klasse mit  $\emptyset \neq A \subseteq \text{Ord}$ , so gilt  $\bigcap A \in \text{Ord}$ .
- (7) Ist  $x$  eine Menge mit  $x \subseteq \text{Ord}$ , so gilt  $\bigcup x \in \text{Ord}$ .
- (8) Eine Menge ist genau dann eine Ordinalzahl, wenn sie transitiv ist und durch die  $\in$ -Relation linear geordnet wird.
- (9) Es existiert eine transitive Menge, die keine Ordinalzahl ist.

**Aufgabe 36** (2 Punkte). Bestimmen Sie die Klasse aller Ordinalzahlen  $\alpha$  mit der Eigenschaft, dass  $\mathcal{P}(\alpha)$  eine Ordinalzahl ist.

Abgabe: Freitag, 13. Dezember 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.