Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 8	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 29. Gegeben seien Klassenfunktionen F, G und H.

(1) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $F^{-1}[A_0 \cap \ldots A_n] = F^{-1}[A_0] \cap \ldots \cap F^{-1}[A_n]$ für alle Klassen $A_0, \ldots, A_n$ gilt.

(2) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass genau dann $F = G$ gilt, wenn $dom(F) = dom(G)$ und $F(x) = G(x)$ für alle $x \in dom(F)$ gilt.

(3) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $F \circ G$ mit $dom(F \circ G) = dom(G) \cap (G^{-1}[dom(F)])$ und $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ für alle $x \in dom(F \circ G)$ existiert.

(4) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(F \circ G)^{-1}[A] = G^{-1}[F^{-1}[A]]$ für jede Klasse A gilt.

(5) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$ gilt.

Für eine Klasse A bezeichne $\mathrm{id_A}$ die eindeutig bestimmte Klassenfunktion F mit $dom(F) = A$ und $F(a) = a$ für alle $a \in A$.

(6) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass F genau dann injektiv ist, wenn eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion I mit $I \circ F = \mathrm{id_{dom(F)}}$ existiert.

Aufgabe 30 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine Äquivalenzrelation E mit

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ [xEz \longrightarrow z \in y].$$

Konstruieren Sie eine Klassenfunktion $Q : \mathrm{field}(E) \to V$ mit

$$\forall x\ \forall y\ [xEy \longrightarrow Q(x) = Q(y)]$$

und der Eigenschaft, dass für jede Klassenfunktion $F : \mathrm{field}(E) \to V$ mit

$$\forall x\ \forall y\ [xEy \longrightarrow F(x) = F(y)]$$

eine eindeutig bestimmte Klassenfunktion $G : ran(Q) \to V$ mit $F = G \circ Q$ existiert.

Aufgabe 31. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) (1 Punkt) Die Klasse $\{\{x\} \mid x \in V\}$ ist eine echte Klasse.

(2) (1 Punkt) Eine Klasse A ist genau dann eine echte Klasse, wenn die Klasse $\{x \mid x \subseteq A\}$ eine echte Klasse ist.

(3) (2 Punkte) Konstruieren Sie eine Klasse A mit der Eigenschaft, dass die Klasse $\{x \in A \mid \forall y \in x\ y \notin A\}$ eine echte Klasse ist.

Aufgabe 32.

(1) (2 Punkte) Beweisen Sie

$$\forall x \; \forall y \; \exists z \; x \times y = z$$

ohne Verwendung des Potenzmengenaxioms.

Eine Klassenfunktion $F : V \times V \longrightarrow V$ ist ein *Paarfunktion*, wenn

$$\forall x \; \forall y \; \forall x' \; \forall y' \; [F(x,y) = F(x',y') \;\longleftrightarrow\; (x = x' \wedge y = y')]$$

gilt.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klassenfunktion, die Mengen x und y auf das Kuratowski-Paar (x,y) abbildet, eine Paarfunktion ist.

(3) (1 Punkt) Konstruieren Sie eine Paarfunktion F mit $F(x,y) \neq (x,y)$ für alle Mengen x und y.

Abgabe: Freitag, 06. Dezember 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.