

Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben
Serie 7

Prof. Dr. Peter Koepke
PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 25 (6 Punkte). Wir betrachten eine Sprache, die aus einem Konstantensymbol zero , einem einstelligen Funktionssymbol succ sowie zwei dreistelligen Relationssymbolen add und mult besteht, und folgende Axiome:

- A1. $\forall X \text{ add}(X, \text{zero}, X)$
- A2. $\forall X, Y, Z [\text{add}(X, Y, Z) \rightarrow \text{add}(X, \text{succ}(Y), \text{succ}(Z))]$
- M1. $\forall X \text{ mult}(X, \text{zero}, \text{zero})$
- M2. $\forall X, Y, Z, U [(\text{mult}(X, Y, U) \wedge \text{add}(U, X, Z)) \rightarrow \text{mult}(X, \text{succ}(Y), Z)]$

Leiten Sie aus diesen Axiomen die Aussage

$$\text{mult}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), \text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))))))$$

mit Hilfe erststufiger Resolution her.

Aufgabe 26 (4 Punkte). Es bezeichne ST° das Axiomensystem, das aus allen Axiomen und Axiomenschemata von ST mit Ausnahme aller Instanzen des Aussonderungsschemas besteht. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) ST° beweist die Existenz der leeren Menge, d.h.

$$\text{ST}^\circ \vdash \exists x \forall y \neg(y \in x).$$

- (2) $\text{ST}^\circ \vdash \text{ST}$.

Aufgabe 27 (4 Punkte). Bestimmen Sie die Axiome bzw. Axiomenschemata¹ von ST , die in den folgenden L^\in -Strukturen gelten:

- (1) Die Struktur $(\mathbb{Z}, <)$, bestehend aus den ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit ihrer natürlichen Ordnung $<$.
- (2) Die Struktur $(\mathbb{R}, <)$, bestehend aus den reellen Zahlen \mathbb{R} mit ihrer natürlichen Ordnung $<$.

Aufgabe 28 (6 Punkte). Betrachten Sie die durch

$$m E n \iff \exists k, r \in \mathbb{N} [r < 2^m \wedge n = (2 \cdot k + 1) \cdot 2^m + r]$$

auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N} definierte zweistellige Relation E . Zeigen Sie, dass alle Axiome von ST in (\mathbb{N}, E) gelten.

Abgabe: Freitag, 29. November 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.

¹An dieser Stelle soll die Frage beantwortet werden, ob *alle* Instanzen des jeweiligen Schemas in der gegebenen Struktur gelten.