Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 6	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 21 (*Die Russellsche Antinomie*, 3 Punkte)**.** Es bezeichne $S_\in = \{\in\}$ die Sprache der Mengenlehre mit einem zweistelligen Relationssymbol $\in$. Beweisen Sie

$$\vdash \forall x \neg \forall y \, [y \in x \longleftrightarrow y \notin y]$$

mit Hilfe des Herbrand-Verfahrens mit Inkonsistenzprüfung durch Resolutionen.

Aufgabe 22 (3 Punkte)**.** Sei S eine Sprache und ψ eine atomare S-Formel, in der das Symbol $\equiv$ nicht auftaucht. Beweisen Sie

$$\vdash \exists x \, \forall y \, \psi \longrightarrow \forall y \, \exists x \, \psi$$

mit Hilfe des Herbrand-Verfahrens mit Inkonsistenzprüfung durch Resolutionen.

Aufgabe 23. Gegeben sei eine Sprache S. Ist $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur, so bezeichne $S_\mathfrak{A}$ die eindeutig bestimmte Sprache, die S um ein Konstantensymbol $\dot{a}$ für jedes $a \in |\mathfrak{A}|$ erweitert, und $\mathfrak{A}_*$ bezeichne die eindeutig bestimmte $S_\mathfrak{A}$-Expansion von $\mathfrak{A}$ mit $\dot{a}^{\mathfrak{A}_*} = a$ für alle $a \in |\mathfrak{A}|$. Zuletzt bezeichne $\Delta(\mathfrak{A})$ die Menge aller $S_\mathfrak{A}$-Sätze, die in $\mathfrak{A}_*$ gelten und entweder atomar oder die Negation einer atomaren Formel sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) (2 Punkte) Eine S-Struktur $\mathfrak{B}$ besitzt genau dann eine Substruktur, die zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist, wenn eine $S_\mathfrak{A}$-Expansion $\mathfrak{B}_*$ von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}_* \models \Delta(\mathfrak{A})$ existiert.

(2) (3 Punkte) Folgende Aussagen sind für jede Menge Φ von S-Sätzen äquivalent:

  (a) Es existiert eine Menge Γ von universellen S-Sätzen mit $\Phi \vdash \Gamma$ und $\Gamma \vdash \Phi$.

  (b) Gilt $\mathfrak{B} \models \Phi$, so folgt $\mathfrak{A} \models \Phi$ für jede Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$.

  (Hinweis: *Betrachten Sie die Theorien* $\Gamma = \{\varphi \text{ universell} \mid \Phi \vdash \varphi\}$ *und* $\Delta(\mathfrak{A}) \cup \Phi$ *für alle* $\mathfrak{A} \models \Gamma$.)

  Gilt eine der beiden äquivalenten Aussagen, so sagen wir, dass Φ *universell axiomatisierbar* ist.

(3) (3 Punkte) Sei Φ eine universell axiomatisierbare Menge von S-Sätzen und $\varphi = \exists x \, \psi$ ein S-Satz mit $\Phi \vdash \varphi$. Wenn S mindestens ein Konstantensymbol enthält, dann existieren konstante S-Terme $t_0, \ldots, t_{m-1}$ mit

$$\Phi \vdash \psi\frac{t_0}{x} \vee \ldots \vee \psi\frac{t_{m-1}}{x}.$$

  (Hinweis: *Verwenden Sie* (2) *und Ideen aus dem Beweis des Satzes von Herbrand.*)

(4) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es keine Schranke für die natürliche Zahl m in Teilaufgabe (3) gibt, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Sprache S_n mit mindestens einem Konstantensymbol, eine universell axiomatisierbare Menge Φ_n von S_n-Sätzen und eine quantorenfreie S_n-Formel ψ_n mit $\Phi_n \vdash \exists x\, \psi_n$ und der Eigenschaft, dass

$$\Phi_n \nvdash \psi_n \frac{t_0}{x} \vee \ldots \vee \psi_n \frac{t_{n-1}}{x}$$

für alle konstanten S_n-Terme $t_0, \ldots, t_{n-1}$ gilt.

Aufgabe 24. Sei S eine Sprache, $\langle L_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ eine Sequenz von atomaren S-Formeln, in denen das Symbol $\equiv$ nicht auftaucht, und

$$C = \{\{L_0, L_1, L_2\}\} \cup \{\{\bar{L}_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

(1) (2 Punkte) Konstruieren Sie eine endliche Menge D von Klauseln, so dass $C \cup D$ die eindeutige minimale Menge von Klauseln ist, die C enthält und unter der Bildung von Resolventen abgeschlossen ist.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass C genau dann erfüllbar ist, wenn $L_0 \neq L_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Abgabe: Freitag, 22. November 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 28.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Di. 26.11., Mi. 27.11. und Do 28.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.