Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 5	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 17. Sei S eine Sprache.

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für jede Menge Φ von S-Sätzen äquivalent sind:
   (a) Die Klasse $\mathrm{Mod}^S(\Phi)$ ist endlich axiomatisierbar.
   (b) Es existiert eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ mit $\mathrm{Mod}^S(\Phi_0) = \mathrm{Mod}^{\mathrm{S}}(\Phi)$.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klasse aller unendlichen S-Strukturen nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** Es sei $S_G = \{E\}$ die Sprache der Graphentheorie mit einem zweistelligem Relationssymbol E und

$$\Phi \;=\; \{\forall x \, \neg E(x,x), \; \forall x \forall y \; [E(x,y) \longrightarrow E(y,x)]\}$$

seien die Axiome der Graphentheorie. Ist $\mathcal{G}$ ein Graph, dann ist eine Sequenz $\langle a_0, \ldots, a_{n+2} \rangle$ von paarweise verschiedenen Elementen von $|\mathcal{G}|$ ein *Zykel*, falls

$$\mathcal{G} \models E(a_0, a_1) \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; E(a_{n+1}, a_{n+2}) \;\wedge\; E(a_{n+2}, a_0)$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Klasse aller Graphen, die Zykel enthalten, nicht axiomatisiert werden kann.

Aufgabe 19. (1) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Klasse aller algebraisch abgeschlossenen Körper in der Sprache $S_K = \{+, \,\cdot\,, 0, 1\}$ der Körpertheorie axiomatisierbar ist.

(2) (3 Punkte) Gegeben sei eine natürliche Zahl n. Konstruieren Sie einen Körper F mit den folgenden Eigenschaften:
   (a) F ist nicht algebraisch abgeschlossen.
   (b) Jedes Polynom in $F[X]$ hat entweder eine Nullstelle in F oder Grad größer als n.

   (Hinweis: *Betrachten Sie einen algebraischen Abschluss des Körpers mit zwei Elementen und konstruieren Sie eine aufsteigende Kette von endlichen Teilkörpern. Verwenden Sie die Multiplikativität der Körpergrade endlicher Körpererweiterungen, um zu zeigen, dass gewisse Polynome keine Nullstellen in der Vereinigung der Kette besitzen.*)

(3) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 20 (2 Punkte)**.** (1) (3 Punkte) Gegeben sie eine Sprache S. Zeigen Sie ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes, dass

$$\vdash (\varphi \wedge \varphi') \longleftrightarrow Qx_0 \ldots Qx_{m-1} Q' x'_0 \ldots Q' x'_{n-1} \; (\psi \wedge \psi')$$

für alle S-Formeln $\varphi = Qx_0 \ldots Qx_{m-1} \; \psi$ und $\varphi' = Q'x'_0 \ldots Q'x'_{n-1} \; \psi'$ in pränexer Normalform mit $x_0, \ldots, x_{m-1} \subseteq frei(\psi)$, $x'_0, \ldots, x'_{n-1} \subseteq frei(\psi')$ und $frei(\psi) \cap frei(\psi') = \emptyset$ gilt.

(2) (3 Punkte) Sei $S = \{+, \cdot\}$ eine Sprache mit zwei zweistelligen Funktionssymbolen. Formen Sie den S-Satz

$$\forall x \; [\forall y \; (x + y = y) \longrightarrow \neg \exists z \; \forall u \; u \cdot (x \cdot z) = u]$$

in pränexe Normalform und Skolem-Normalform um.

Abgabe: Freitag, 15. November 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.