# Einführung in die Mathematische Logik
# Wintersemester 2019/20

| | |
|---|---|
| Übungsaufgaben | Prof. Dr. Peter Koepke |
| Serie 4 | PD Dr. Philipp Lücke |

**Aufgabe 13** (8 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls.

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \to \psi \\ \hline \Gamma & \neg\psi \to \neg\varphi \end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \to \psi \\ \Gamma & \varphi \to \neg\psi \\ \hline \Gamma & \neg\varphi \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{ll} \Gamma & (\varphi \wedge \psi) \to \xi \\ \hline \Gamma & \varphi \to (\psi \to \xi) \end{array}$$

$$(4)\quad \begin{array}{ll} \Gamma & ((\varphi \vee \chi) \ \wedge \ (\neg\varphi \vee \psi)) \ \vee \ ((\neg\varphi \vee \chi) \ \wedge \ (\varphi \vee \psi)) \\ \hline \Gamma & \chi \vee \psi \end{array}$$

**Aufgabe 14** (4 Punkte)**.** Es sei $S = \{\preceq\}$ eine Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol und $\Gamma$ ist die Menge der folgenden $S$-Sätze.

(a) $\forall x \; x \preceq x$.

(b) $\forall x \; \forall y \; \forall z \; [(x \preceq y \wedge y \preceq z) \;\longrightarrow\; x \preceq z]$.

(c) $\forall x \; \forall y \; \exists w \; [w \preceq x \;\wedge\; w \preceq y \;\wedge\; \forall u \; [(u \preceq x \;\wedge\; u \preceq y) \longrightarrow u \preceq w]]$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), dass

$$\Gamma \vdash \forall x \; \forall y \; \forall z \; \exists w$$
$$[w \preceq x \;\wedge\; w \preceq y \;\wedge\; w \preceq z \;\wedge \forall u \; [(u \preceq x \;\wedge\; u \preceq y \;\wedge\; u \preceq z) \longrightarrow u \preceq w]] \,.$$

gilt.

**Aufgabe 15** (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine abzählbare Sprache $S$ und eine konsistente Menge $\Phi$ von $S$-Formeln mit der Eigenschaft, dass keine Variable der Form $v_{2 \cdot n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ in Formeln in $\Phi$ verwendet wird. Zeigen Sie, dass eine Henkin-Menge $\Psi \subseteq L^S$ mit $\Phi \subseteq \Psi$ existiert.

**Aufgabe 16.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Kompaktheitssatzes.

(1) (2 Punkte) Gegeben sei eine Sprache $S$ und eine Menge $\Phi$ von $S$-Sätzen, die endliche Modelle besitzt. Dann ist die Klasse aller endlichen $S$-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi$ genau dann axiomatisierbar, wenn es eine natürliche Zahl $N$ gibt, so dass die Trägermenge jeder $S$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi$ höchstens $N$ Elemente enthält.

(2) (2 Punkte) Es bezeichne $S_{Gr}$ die Sprache der Gruppentheorie. Dann gibt es für jeden $S_{Gr}$-Satz $\varphi$, der in jeder unendlichen Gruppe gilt, eine natürliche Zahl $N$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi$ in jeder Gruppe mit mindestens $N$ Elementen gilt.

Abgabe: Freitag, 08. November 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.