Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 3	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 9 (10 Punkte)**.** Leiten Sie die folgenden Regeln im Sequenzenkalkül ab:

(1) $$\begin{array}{ll} \Gamma & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \varphi \longrightarrow \psi \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{ll} \Gamma & \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \longrightarrow \psi \end{array}$$

(3) $$\begin{array}{ll} \Gamma & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \varphi \longrightarrow \psi \end{array}$$

(4) Schnittregel:
$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \varphi \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

(5) Kontraposition:
$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & \neg\psi & \neg\varphi \end{array}$$

(6) $\wedge$-Einführung:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \wedge \psi \end{array}$$

(7) $\wedge$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \wedge \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array}$$

(8) $\wedge$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \wedge \psi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

(9) $\exists$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi\frac{t}{x} \\ \hline \Gamma & \exists x\varphi \end{array}$$

(10) $\exists$-Elimination:
$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \exists x\varphi \\ \Gamma & \varphi\frac{y}{x} & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}, \text{ wobei } y \notin \mathrm{free}(\Gamma \cup \{\exists\varphi, \psi\}).$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)**.** Formulieren und beweisen Sie abgeleitete Regeln für die $\longleftrightarrow$ -Einführung und -Elimination im Sequenzenkalkül.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** Es sei S eine Sprache und Φ eine konsistente Menge von S-Formeln.

(1) Es bezeichne $\mathcal{F}_+$ die kleinste Klasse von S-Formeln, die alle atomaren Formeln enthält und unter Konjunktionen und $\forall$-Quantifikation abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass
$$\Phi \vdash \varphi \iff \mathfrak{T}^\Phi \models \varphi$$
für jede Formel φ in $\mathcal{F}_+$ gilt.

Es bezeichne nun $S_R = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ die erweiterte Sprache der Ringtheorie und $\Phi_K \subseteq L^{S_R}$ die Axiome der Körpertheorie.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ ein Ring ist.
(3) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ kein Körper ist.
(4) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Es sei S eine Sprache und $\mathfrak{M}$ ein S-Modell mit $|\mathfrak{M}| = \{t^{\mathfrak{M}} \mid t \in T^S\}$. Definiere
$$Th(\mathfrak{M}) \ = \ \{\varphi \in L^S \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}.$$

(1) Beweisen Sie, dass $Th(\mathfrak{M})$ eine Henkin-Menge ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Modelle $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{T}^{Th(\mathfrak{M})}$ isomorph sind.

Abgabe: Freitag, 01. November 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.