Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 2	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Gegeben sei eine Sprache S, ein S-Term t und S-Modelle $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, die als S-Strukturen übereinstimmen. Beweisen Sie, dass $t^{\mathfrak{M}} = t^{\mathfrak{M}'}$ gilt, falls $x^{\mathfrak{M}} = x^{\mathfrak{M}'}$ für alle $x \in var(t)$ gilt.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** Es sei $S = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ die Sprache der geordneten Körper und S_f die Erweiterung von S durch ein einstelliges Funktionssymbol f.
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Sprache S_f:

(1) f ist streng monoton wachsend.
(2) f ist stetig.
(3) f ist gleichmäßig stetig.
(4) f ist differenzierbar.

Aufgabe 7. Gegeben sei eine Sprache S. Für eine Menge Φ von S-Sätzen besteht die zugehörige *Modellklasse* $\mathrm{Mod}^S(\Phi)$ aus allen S-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$. Eine Klasse K von S-Strukturen heißt *axiomatisierbar*, falls eine Menge Φ von S-Sätzen mit $K = \mathrm{Mod}^S(\Phi)$ existiert.

(1) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass die Klasse aller S-Strukturen $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass die Menge $|\mathcal{A}|$ genau n Elemente besitzt, für jede natürliche Zahl $n > 0$ nicht leer und axiomatisierbar ist.
(2) (1 Punkt) Gegeben sei eine axiomatisierbare Klasse K von S-Strukturen. Zeigen Sie, dass die Klasse aller $\mathcal{A} \in K$ mit der Eigenschaft, dass $|\mathcal{A}|$ eine unendliche Menge ist, axiomatisierbar ist.
(3) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}^S(\Phi \cup \Psi) = \mathrm{Mod}^S(\Phi) \cap \mathrm{Mod}^S(\Psi)$ für alle Mengen Φ und Ψ von S-Sätzen gilt.
(4) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}^S(\Phi \cap \Psi) \supseteq \mathrm{Mod}^S(\Phi) \cup \mathrm{Mod}^S(\Psi)$ für alle Mengen Φ und Ψ von S-Sätzen gilt, und konstruieren Sie Mengen Φ und Ψ von S-Sätzen mit $\mathrm{Mod}^S(\Phi \cap \Psi) \nsubseteq \mathrm{Mod}^S(\Phi) \cup \mathrm{Mod}^S(\Psi)$.

Aufgabe 8. (1) (4 Punkte) Gegeben sei eine Sprache S , $\Phi \subseteq L^S$ und ein S-Modell $\mathfrak{M}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle S-Formeln φ und ψ.

(a) Falls $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$, so gilt $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$.
(b) Falls $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$, so gilt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$.
(c) Falls $\Phi \models \varphi$, so gilt $\Phi \models \varphi \vee \psi$ und $\Phi \models \psi \vee \varphi$.
(d) Falls $\Phi \models \varphi \vee \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$, so gilt $\Phi \models \varphi$.

(2) (1 Punkte) Definieren Sie eine Sprache S, $\Phi \subseteq L^S$ und S-Formeln φ und ψ, so dass $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$, $\Phi \not\models \varphi$ und $\Phi \not\models \psi$ gilt.

Abgabe: Freitag, 25. Oktober 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.