Einführung in die Mathematische Logik
Wintersemester 2019/20

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 1	PD Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 1. Es sei $S_{Arith} = \{+, \ \cdot\ , 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik mit Konstantensymbolen 0 und 1 sowie zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\ \cdot\ $.

(1) (2 Punkte) Formulieren Sie die folgenden Axiome der Körpertheorie als S_{Arith}-Formeln in polnischer Notation, die nur den Quantor $\forall$ und die logischen Junktoren $\perp$, $\neg$ und $\to$ benutzen:

   (a) *Existenz von Inversen bezüglich der Multiplikation.*

   (b) *Distributivität.*

(2) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass jeder S_{Arith}-Term aus einer ungeraden Anzahl von Symbolen besteht.

Aufgabe 2 (Eindeutige Lesbarkeit von Termen und Formeln)**.** Gegeben sei eine Sprache S.

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für jeden Term $t \in T^S$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

   (a) t ist eine Variable.

   (b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Sequenz $t_0, \ldots, t_{n-1} \in T^S$ und ein eindeutig bestimmtes n-stelliges Funktionssymbol $f \in S$ mit $t = ft_0 \ldots t_{n-1}$.

(2) (2 Punkte) Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für Formeln in L^S.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathbb{B}$ die boolesche Algebra der Wahrheitswerte. Zeigen Sie, dass jede Funktion $F : |\mathbb{B}|^n \longrightarrow |\mathbb{B}|$ durch Komposition der Funktionen $\wedge^{\mathbb{B}}$ und $-^{\mathbb{B}}$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 4. Eine partielle Ordnung $(I, \leq_I)$ ist eine *gerichtete Menge*, falls für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i, j \leq_I k$ existiert.
Ist S eine Sprache und $(I, \leq_I)$ eine gerichtete Menge, so nennen wir

$$(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle, \langle f_{i,j} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j \rangle)$$

ein *gerichtetes System von S-Strukturen über* $(I, \leq_I)$, falls die folgenden Aussagen für alle $i, j, k \in I$ gelten:

(a) $\mathfrak{A}_i$ ist eine S-Struktur.

(b) Gilt $i \leq_I j$, so ist $f_{i,j} : |\mathfrak{A}_i| \to |\mathfrak{A}_j|$ eine Einbettung von S-Strukturen.

(c) $f_{i,i} = \mathsf{id}_{|\mathfrak{A}_i|}$ und $i \leq_I j \leq_I k$ impliziert $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$.

Sei $(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle f_{i,j} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j\rangle)$ ein gerichtetes System von S-Strukturen über einer gerichtete Menge $(I, \leq_I)$. Setze

$$D \;=\; \{(x,i) \mid i \in I,\ x \in |\mathfrak{A}_i|\}$$

Wir definieren eine Relation $\approx$ auf D durch

$$(x,i) \;\approx (y,j) \iff \exists k \in I\ [i, j \leq_I k \ \wedge\ f_{i,k}(x) = f_{j,k}(y)].$$

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf D ist.

Für $i \in I$ definieren wir

$$f^i : |\mathfrak{A}_i| \longrightarrow {}^{D}\!/\!\approx;\ x \mapsto [x,i],$$

wobei $[x,i]$ die Äquivalenzklasse von $(x,i) \in D$ bezüglich $\approx$ bezeichnet und ${}^{D}\!/\!\approx$ die Menge aller Äquivalenzklassen ist.

(2) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass $f^i = f^j \circ f_{i,j}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt.

(3) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| = {}^{D}\!/\!\approx$ gibt, so dass alle $f^i : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}$ Einbettungen von S-Strukturen sind. Diese Struktur nennt man den *direkten Limes* des gerichtetens Systems.

(4) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die oben konstruierte Struktur $\mathfrak{A}$ die folgende *universelle Eigenschaft* besitzt und durch sie bis aus auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: ist $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $\langle g^i \mid i \in I\rangle$ ein System von Einbettungen $g^i : |\mathfrak{A}_i| \to |\mathfrak{B}|$, so dass $g^i = g^j \circ f_{i,j}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Einbettung $f : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ mit $g^i = f \circ f^i$ für alle $i \in I$.

(5) (4 Bonuspunkte) Es sei S_K die Sprache der Körpertheorie und $\mathbf{K}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{C}$, die eine endliche, algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind. Für $K, L \in \mathbf{K}$ mit $K \subseteq L$ definieren wir $\mathfrak{A}_K$ als die kanonische S_K-Struktur mit Trägermenge K und $f_{K,L}$ als die kanonische Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{K}, \subseteq)$ eine gerichtete Menge ist und bestimmen Sie den Teilkörper von $\mathbb{C}$, der zum direkten Limes des so definierten gerichteten Systems isomorph ist.

Abgabe: Freitag, 18. Oktober 2019, bis 10:00 Uhr in den Briefkästen 6 und 7.