Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 12	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 33 (Relativierungen, 4 Punkte)**.** Gegeben sei ein Klassenterm A. Wir definieren die *Relativierung* φ^A einer $\in$-Formel φ induktiv durch die folgenden Regeln:

- $\varphi^A = \varphi$ für jede atomare $\in$-Formel φ.
- $(\neg\varphi)^A = \neg\varphi^A$.
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^A = \varphi^A \longrightarrow \psi^A$.
- $(\forall x\ \varphi)^A = \forall x\ [x \in A \longrightarrow \varphi^A]$.

Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ nun ein $\in$-Modell mit $\mathfrak{M} \models v_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{M}_A$ das eindeutig bestimmte Submodell von $\mathfrak{M}$ mit Trägermenge $\{a \in M \mid \mathfrak{M} \models a \in A\}$. Beweisen Sie, dass

$$\mathfrak{M}_A \models \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi^A$$

für jede $\in$-Formel gilt.

Aufgabe 34 (5 Punkte)**.** Gegeben sie ein Modell $\mathfrak{M}$ von ST mit $\mathfrak{M} \models v_n \in V_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das in Aufgabe 32 definierte Submodell $\mathfrak{M}_{V_\omega}$ von $\mathfrak{M}$ ein Modell von $\mathsf{ST} + \neg(\mathsf{Inf})$ ist (Hinweis: *Verwenden Sie die Aufgaben 31, 32 und 33*).

Aufgabe 35 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgende abgeleitete Regel des Sequenzenkalküls:

$$\frac{\Gamma \quad ((\varphi \vee \chi) \ \wedge\ (\neg\varphi \vee \psi)) \ \vee\ ((\neg\varphi \vee \chi) \ \wedge\ (\varphi \vee \psi))}{\Gamma \quad \chi \vee \psi}$$

Aufgabe 36. Es bezeichne $S_{Gr} = \{\mathbb{1}, \circ, {}^{-1}\}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie und $\Phi_{Gr} \subseteq L^{S_{Gr}}$ die Axiome der Gruppentheorie. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Satzes von Herbrand:

(1) (2 Punkte) $\Phi_{Gr} \vdash \mathbb{1} = \mathbb{1}^{-1}$.

(2) (2 Punkte) $\Phi_{Gr} \vdash \forall x\ [\exists y\ x \circ y \neq y \longleftrightarrow x \neq \mathbb{1}]$.

Aufgabe 37. Gegeben sei eine Sprache S mit einem zweistelligen Funktionssymbol f. Mit K bezeichnen wir die Klasse aller S-Strukturen $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ mit der Eigenschaft, dass die Menge $\{z \in A \mid f^{\mathfrak{A}}(y, z) = x\}$ für alle $x, y \in A$ unendlich ist.

(1) (2 Punkt) Zeigen Sie, dass die Klasse K axiomatisierbar ist.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klasse K nicht endlich axiomatisierbar ist.

Abgabe: Mittwoch, 11. Juli 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.