Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 11	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 31 (11 Punkte)**.** Eine Menge x ist *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : n \longrightarrow V$ mit $ran(f) = x$ gibt. Ist x eine endliche Menge, so definieren wir

$$card(x) \;=\; \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists f : n \longrightarrow x \; ran(f) = x\} \;\in\; \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen in ST:

(1) Ist x eine endliche Menge, so ist $card(x)$ das eindeutige $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass es eine Bijektion $f : n \longrightarrow x$ gibt.

(2) Für jede Menge x ist $\{x\}$ eine endliche Menge mit $card(\{x\}) = 1$.

(3) Für alle Mengen x und y ist $\{x, y\}$ eine endliche Menge und es gilt

$$card(\{x, y\}) = 2 \iff card(\{x, y\}) \neq 1 \iff x \neq y.$$

(4) Ist x eine endliche Menge und jedes Element von x ist eine endliche Menge, dann ist $\bigcup x$ eine endliche Menge.

(5) Ist y eine Teilmenge einer endlichen Menge x, so ist y eine endliche Menge mit $card(y) \leq card(x)$.

(6) Sind x und y endliche Mengen, so sind $x \cup y$ und $x \cap y$ endliche Mengen mit

$$card(x \cup y) + card(x \cap y) \;=\; card(x) + card(y).$$

(7) Sind x und y endliche Mengen, so ist $x \times y$ eine endliche Menge mit

$$card(x \times y) \;=\; card(x) \cdot card(y).$$

(8) Ist x eine endliche Menge, so ist $\mathcal{P}(x)$ eine endliche Menge mit

$$card(\mathcal{P}(x)) \;=\; 2^{card(x)}.$$

(9) Ist F eine Funktion und x ist eine endliche Menge, so ist $F[x]$ eine endliche Menge mit $card(F[x]) \leq card(x)$.

(10) Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist eine endliche Menge mit $card(n) = n$.

(11) Ist $\mathbb{N}$ eine Menge, so ist $\mathbb{N}$ keine endliche Menge.

Aufgabe 32. (1) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass die Axiome von ST beweisen, dass es eine eindeutige Klassenfunktion $F : \mathbb{N} \longrightarrow V$ mit $F(0) = \emptyset$ und $F(n+1) = \mathcal{P}(F(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Ist $F : \mathbb{N} \longrightarrow V$ die eindeutige Klassenfunktion mit den oben genannten Eigenschaften, so setzen wir $V_n = F(n)$ und $V_\omega = F[\mathbb{N}]$.

(2) (1 Punkte) Beweisen Sie in ST, dass die Klasse V_ω genau dann eine Menge ist, wenn (Inf) gilt.

(3) (3 Punkte) Beweisen Sie in ST, dass eine Menge genau dann ein Element von V_ω ist, wenn sie Teilmenge einer endlichen transitiven Menge ist.

(4) (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ ein Modell von ST mit $\mathfrak{M} \models v_n \in V_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\mathfrak{M}_{V_\omega}$ das eindeutig bestimmte Submodell von $\mathfrak{M}$ mit Trägermenge $\{a \in M \mid \mathfrak{M} \models a \in V_\omega\}$, so gelten die Axiome (Ext), (Pair), (Union) und (Pow) in $\mathfrak{M}_{V_\omega}$.

Abgabe: Mittwoch, 04. Juli 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.