Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Übungsaufgaben — Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 10 — Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 28. (1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Theorie PA genau dann konsistent ist, wenn die Theorie ST konsistent ist.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Theorie ST genau dann inkonsistent ist, wenn $\mathsf{ST} \vdash (\mathsf{Inf})$ gilt.

(Tipp: *Verwenden Sie den Beweis von Aufgabe 26*).

Aufgabe 29. (1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Aussonderungsschema aus den übrigen Axiomen von ST folgt.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathsf{ST} - (\mathsf{Pow}) \vdash \forall x \; \forall y \; \exists z \; z = x \times y$.

Aufgabe 30. (a) Eine Menge z heißt *transitiv*, wenn für alle Mengen x und y aus $x \in y \in z$ bereits $x \in z$ folgt.

(b) Eine Menge x ist eine *Ordinalzahl*, wenn x und alle Elemente von x transitiv sind.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen in jedem Modell von ST gelten:

(1) (1 Punkte) Jede transitive Menge ist entweder leer oder enthält die leere Menge.

(2) (1 Punkte) Ist eine Menge x transitiv, so ist auch die Menge $x + 1 := x \cup \{x\}$ transitiv.

(3) (1 Punkte) Ist x eine Menge von transitiven Mengen, so ist $\bigcup x$ transitiv.

(4) (1 Punkte) Eine transitive Menge ist genau dann eine Ordinalzahl, wenn sie durch die $\in$-Relation linear geordnet wird.

(5) (1 Punkte) Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist eine Ordinalzahl.

(6) (1 Punkte) Ist $n \in \mathbb{N}$, dann hat jede nichtleere Teilmenge x von n ein Maximum.

(7) (1 Punkte) Ist α eine Ordinalzahl, so ist auch $\alpha + 1$ eine Ordinalzahl

(8) (1 Punkte) Ist x eine Menge von Ordinalzahlen, so ist auch $\sup(x) := \bigcup x$ eine Ordinalzahl.

(9) (2 Punkte) Sind α und β Ordinalzahlen mit $\alpha \subseteq \beta$, so gilt entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha \in \beta$.

(10) (1 Punkte) Für jede Ordinalzahl α gilt genau eine der folgenden Aussagen:
- $\alpha = \emptyset$.
- Es existiert ein eindeutig bestimmtes $\beta \in \alpha$ mit $\alpha = \beta + 1$.
- $\emptyset \in \alpha = \sup(\alpha)$.

(11) (1 Punkte) Die Klasse aller Ordinalzahlen wird durch die $\in$-Relation linear geordnet.

Abgabe: Mittwoch, 27. Juni 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.