

Einführung in die Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben
Serie 9

Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 26 (8 Punkte). Es bezeichne S die Erweiterung der Sprache $S_{NT} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ der Zahlentheorie um ein zweistelliges Funktionssymbol $\exp$. Die Theorie $\text{PA}_{\exp}$ besteht aus den Axiomen von PA , dem Induktionsschema für alle S -Formeln und den Axiomen

- $\forall n \exp(n, 0) = 1$.
- $\forall m, n \exp(n, m + 1) = \exp(n, m) \cdot n$.

Zeigen Sie, dass die Konsistenz der Theorie $\text{PA}_{\exp}$ die Konsistenz der Theorie $\text{ST} \cup \{\neg \text{Inf}\}$ impliziert (Tipp: *Betrachten Sie die durch*

$$m E n \iff \mathfrak{M} \models \exists k \exists r [r < \exp(2, m) \wedge n = (2 \cdot k + 1) \cdot \exp(2, m) + r].$$

definierte zweistellige Relation).

Aufgabe 27 (*Das Cantor-Polynom*). Sei $S_{NT} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ die Sprache der Zahlentheorie.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1 Punkt) $\text{PA} \vdash \forall x \forall y [x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x]$.
- (1 Punkt) $\text{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z [x + y = x + z \longrightarrow y = z]$.
- (1 Punkt) $\text{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z [x \cdot y = x \cdot z \longrightarrow (x = 0 \vee y = z)]$.

Mit φ bezeichnen wir die S_{NT} -Formel

$$(1 + 1) \cdot v_2 \equiv (v_0 + v_1) \cdot (v_0 + v_1 + 1) + (1 + 1) \cdot v_0.$$

- (2 Punkte) Beweisen Sie, dass

$$\text{PA} \vdash \forall x \forall y \exists z [\varphi(x, y, z) \wedge \forall u (\varphi(x, y, u) \longrightarrow u \equiv z)].$$

Sei nun S die Sprache, die S_{NT} um ein zweistelliges Funktionssymbol c erweitert, und T die definitorische Erweiterung von PA , die c durch φ definiert.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1 Punkt) $T \vdash \forall z c(0, z + 1) = c(0, z) + z + 1$.
- (2 Punkt) $T \vdash \forall x \forall y c(x, y) = c(0, x + y) + x$.
- (2 Punkte) $T \vdash \forall x_0 \forall x_1 \forall y_0 \forall y_1 [c(x_0, y_0) = c(x_1, y_1) \longrightarrow x_0 + y_0 = x_1 + y_1]$.
- (2 Punkte) Ist $\mathfrak{M}$ ein Modell von T , so ist $\mathfrak{M}(c)$ eine Bijektion.

Abgabe: Mittwoch, 20. Juni 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 21.06. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 18.06., Di. 19.06. und Mi 20.06. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.