

Einführung in die Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben
Serie 7

Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 22 (2 Punkte). Gegeben sei eine Sprache S . Zeigen Sie, dass

$$\vdash (\varphi \wedge \varphi') \longleftrightarrow Qx_0 \dots Qx_{m-1} Q'x'_0 \dots Q'x'_{n-1} (\psi \wedge \psi')$$

für alle S -Formeln $\varphi = Qx_0 \dots Qx_{m-1} \psi$ und $\varphi' = Q'x'_0 \dots Q'x'_{n-1} \psi'$ in pränexer Normalform mit $\text{frei}(\psi) \cap \text{frei}(\psi') = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 23 (3 Punkte). Sei $S = \{+, \cdot\}$ eine Sprache mit zwei zweistelligen Funktionssymbolen. Formen Sie den S -Satz

$$\forall x [\forall y (x + y = y) \longrightarrow \neg \exists z \forall u u \cdot (x \cdot z) = u]$$

in pränexer Normalform und Skolem-Normalform um.

Aufgabe 24 (*Die Russellsche Antinomie*, 3 Punkte). Es bezeichne $S_{\in} = \{\in\}$ die Sprache der Mengenlehre mit einem zweistelligen Relationssymbol $\in$. Beweisen Sie

$$\vdash \forall x \neg \forall y [y \in x \longleftrightarrow y \notin y]$$

mit Hilfe des Satzes von Herbrand.

Aufgabe 25. Gegeben sei eine Sprache S . Wir sagen, dass ein S -Modell $\mathfrak{M} = (M, \dots)$ ein *elementares Submodell* eines S -Modells $\mathfrak{N}$ ist, falls $\mathfrak{M}$ ein Submodell von $\mathfrak{N}$ ist und

$$\mathfrak{M} \frac{a_0, \dots, a_{m-1}}{x_0, \dots, x_{m-1}} \models \varphi \iff \mathfrak{N} \frac{a_0, \dots, a_{m-1}}{x_0, \dots, x_{m-1}} \models \varphi$$

für jede S -Formel φ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_0, \dots, x_{m-1}\}$ und alle $a_0, \dots, a_{m-1} \in M$ gilt. In diesem Fall nennen wir $\mathfrak{N}$ eine *elementare Erweiterung* von $\mathfrak{M}$.

Ist $\mathfrak{M} = (M, \dots)$ ein S -Modell, so bezeichne $S_{\mathfrak{M}}$ die eindeutig bestimmte Sprache, die S um ein Konstantensymbol $\dot{a}$ für jedes $a \in M$ erweitert, und $\mathfrak{M}_*$ bezeichne die eindeutig bestimmte $S_{\mathfrak{M}}$ -Expansion von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}_*(\dot{a}) = a$ für alle $a \in M$. Zuletzt bezeichne $\Delta_{el}(\mathfrak{M})$ die Menge aller $S_{\mathfrak{M}}$ -Sätze, die in $\mathfrak{M}_*$ erfüllt sind.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) (2 Punkte) Ein S -Modell $\mathfrak{N}$ ist genau dann zu einer elementaren Erweiterung von $\mathfrak{M}$ isomorph, wenn ein $S_{\mathfrak{M}}$ -Modell $\mathfrak{N}_*$ mit $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_*$ und $\mathfrak{N}_* \models \Delta_{el}(\mathfrak{M})$ existiert.
- (2) (3 Punkte) Die folgenden Aussagen sind für jede Menge Φ von S -Sätzen äquivalent:
 - (a) Es existiert eine Menge Γ von universellen S -Sätzen mit $\Phi \vdash \Gamma$ und $\Gamma \vdash \Phi$.
 - (b) Ist $\mathfrak{N}$ ein Modell von Φ und $\mathfrak{M}$ eine Substruktur von $\mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{M}$ ein Modell von Φ .

Gilt eine der beiden äquivalenten Aussagen, so sagen wir, dass Φ *universell axiomatisierbar* ist. (Hinweis: Betrachten Sie $\Gamma = \{\varphi \text{ universell} \mid \Phi \vdash \varphi\}$ und $\Delta_{el}(\mathfrak{M}) \cup \Phi$ für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von Γ .)

- (3) (3 Punkte) Sei Φ eine universell axiomatisierbare Menge von S -Sätzen und $\varphi = \exists x \psi$ ein S -Satz mit $\Phi \vdash \varphi$. Wenn S mindestens ein Konstantensymbol enthält, dann existieren konstante S -Terme $t_0, \dots, t_{m-1}$ mit

$$\Phi \vdash \psi \frac{t_0}{x} \vee \dots \vee \psi \frac{t_{m-1}}{x}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie (2) und Ideen aus dem Beweis des Satzes von Herbrand.)

- (4) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es keine Schranke für die natürliche Zahl m in Teilaufgabe (3) gibt, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Sprache S_n mit mindestens einem Konstantensymbol, eine universell axiomatisierbare Menge Φ_n von S_n -Sätzen und eine quantorenfreie S_n -Formel ψ_n mit $\Phi_n \vdash \exists x \psi_n$ und der Eigenschaft, dass

$$\Phi_n \not\vdash \psi_n \frac{t_0}{x} \vee \dots \vee \psi_n \frac{t_{n-1}}{x}$$

für alle konstanten S_n -Terme $t_0, \dots, t_{n-1}$ gilt.