

Einführung in die Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben
Serie 6

Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 18 (5 Punkte). Gegeben sei eine Sprache S . Eine Klasse K von S -Strukturen heißt *endlich axiomatisierbar*, wenn es eine endliche Menge Φ von S -Sätzen mit $K = \text{Mod}^S(\Phi)$ gibt.

- (1) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für jede Menge Φ von S -Sätzen äquivalent sind:
- (a) Die Klasse $\text{Mod}^S(\Phi)$ ist endlich axiomatisierbar.
 - (b) Es existiert eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ mit $\text{Mod}^S(\Phi_0) = \text{Mod}^S(\Phi)$.
 - (c) Die Klasse aller S -Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \not\models \Phi$ ist axiomatisierbar.
 - (d) Die Klasse aller S -Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \not\models \Phi$ ist endlich axiomatisierbar.
- (2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klasse aller unendlichen S -Strukturen nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Es sei $S_G = \{E\}$ die Sprache der Graphentheorie mit einem zweistelligem Relationssymbol E und

$$\Phi = \{\forall x \neg E(x, x), \forall x \forall y [E(x, y) \longrightarrow E(y, x)]\}$$

seien die Axiome der Graphentheorie. Ist $\mathcal{G}$ ein Graph, dann ist eine Sequenz $\langle a_0, \dots, a_{n+2} \rangle$ von Elementen von $\mathcal{G}(\forall)$ ein *Zykel*, falls

$$\mathcal{G} \models E(a_0, a_1) \wedge \dots \wedge E(a_{n+1}, a_{n+2}) \wedge E(a_{n+2}, a_0)$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Klasse aller Graphen, die Zykel enthalten, nicht axiomatisiert werden kann.

Aufgabe 20. (1) (3 Punkte) Gegeben sei eine natürliche Zahl n . Konstruieren Sie einen Körper F mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) F ist nicht algebraisch abgeschlossen.
- (b) Jedes Polynom in $F[X]$ hat entweder eine Nullstelle in F oder Grad größer als n .

(Hinweis: *Betrachten Sie einen algebraischen Abschluss des Körpers mit zwei Elementen und konstruieren Sie eine aufsteigende Kette von endlichen Teilkörpern. Verwenden Sie die Multiplikativität der Körpergrade endlicher Körpererweiterungen, um zu zeigen, dass gewisse Polynome keine Nullstellen in der Vereinigung der Kette besitzen.*)

- (2) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 21. Ist S eine Sprache und φ ein S -Satz, so bezeichnen wir mit $\text{Spec}_{fin}(\varphi)$ die Menge aller natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass eine S -Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $|\mathfrak{A}(\forall)| = n$ existiert. Mengen natürlicher Zahlen der Form $\text{Spec}_{fin}(\varphi)$ nennen wir *spektral*. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) (1 Punkt) Alle endlichen und koendlichen Mengen natürlicher Zahlen sind spektral.
- (2) (1 Punkt) Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Menge aller Vielfachen von n spektral.
- (3) (1 Punkt) Sind $A_0, \dots, A_n$ spektrale Mengen natürlicher Zahlen, so sind die Mengen

$$\{a_0 + \dots + a_n \mid a_0 \in A_0, \dots, a_n \in A_n\}$$

und

$$\{a_0 \cdot \dots \cdot a_n \mid a_0 \in A_0, \dots, a_n \in A_n\}$$

ebenfalls spektral.

- (4) (2 Punkte) Die Menge aller Primzahlpotenzen ist spektral (Hinweis: *Verwenden Sie Resultate aus der Körpertheorie*).
- (5) (5 Bonuspunkte) Die Mengen aller Primzahlen ist spektral.
- (6) (5 Bonuspunkte) Es existiert eine Menge natürlicher Zahlen, die nicht spektral ist.