

# Einführung in die Mathematische Logik

## Sommersemester 2018

Übungsaufgaben  
Serie 5

Prof. Dr. Peter Koepke  
Dr. Philipp Lücke

**Aufgabe 14** (5 Punkte). Gegeben sei eine abzählbare Sprache  $S$  und eine konsistente Menge  $\Phi$  von  $S$ -Formeln mit der Eigenschaft, dass keine Variable der Form  $v_{2 \cdot n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  in Formeln in  $\Phi$  verwendet wird. Zeigen Sie, dass eine Henkin-Menge  $\Psi \subseteq L^S$  mit  $\Phi \subseteq \Psi$  existiert.

**Aufgabe 15.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Kompaktheitsatzes.

- (1) (3 Punkte) Gegeben sei eine Sprache  $S$  und eine Menge  $\Phi$  von  $S$ -Sätzen, die endliche Modelle besitzt. Dann ist die Klasse aller endlichen  $S$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A} \models \Phi$  genau dann axiomatisierbar, wenn es eine natürliche Zahl  $N$  gibt, so dass die Trägermenge jeder  $S$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A} \models \Phi$  höchstens  $N$  Elemente enthält.
- (2) (3 Punkte) Es bezeichne  $S_{Gr}$  die Sprache der Gruppentheorie. Dann gibt es für jeden  $S_{Gr}$ -Satz  $\varphi$ , der in jeder unendlichen Gruppe gilt, eine natürliche Zahl  $N$  mit der Eigenschaft, dass  $\varphi$  in jeder Gruppe mit mindestens  $N$  Elementen gilt.

**Aufgabe 16** (4 Punkte). Gegeben sei eine Sprache  $S$  und ein  $S$ -Struktur  $\mathfrak{A}$ . Es bezeichne  $S_{\mathfrak{A}}$  die eindeutig bestimmte Sprache, die  $S$  um ein Konstantensymbol  $\dot{a}$  für jedes  $a \in \mathfrak{A}(\forall)$  erweitert, und  $\mathfrak{A}_*$  die eindeutig bestimmte  $S_{\mathfrak{A}}$ -Struktur mit  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_*$  und  $\mathfrak{A}_*(\dot{a}) = a$  für alle  $a \in \mathfrak{A}(\forall)$ . Zudem bezeichne  $\Delta_{at}(\mathfrak{A})$  die Menge aller atomaren  $S_{\mathfrak{A}}$ -Sätze und Negationen von atomaren  $S_{\mathfrak{A}}$ -Sätzen, die in  $\mathfrak{A}_*$  erfüllt sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für jede  $S$ -Struktur  $\mathfrak{B}$  äquivalent sind:

- (1) Es existiert eine  $S_{\mathfrak{A}}$ -Struktur  $\mathfrak{B}_*$  mit  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_*$  und  $\mathfrak{B}_* \models \Delta_{at}(\mathfrak{A})$ .
- (2) Es existiert eine Einbettung von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{B}$ .

**Aufgabe 17** (5 Punkte). Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, des Satzes von Kronecker und von Aufgabe 16, dass jeder Körper ein Teilkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers ist (Hinweis: *Verwenden Sie diese Resultate, um eine aufsteigende Kette  $\langle K_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$  von Körpern zu konstruieren, die die Eigenschaft besitzt, dass jedes nicht-konstante Polynom in  $K_n[X]$  eine Nullstelle in  $K_{n+1}$  besitzt*).

Abgabe: Mittwoch, 16. Mai 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.