Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 4	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 11 (8 Punkte)**.** Es sei $S = \{\preceq\}$ eine Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol und Γ ist die Menge der folgenden S-Sätze.

(a) $\forall x \; x \preceq x$.

(b) $\forall x \; \forall y \; \forall z \; [(x \preceq y \wedge y \preceq z) \;\longrightarrow\; x \preceq z]$.

(c) $\forall x \; \forall y \; \exists w \; [w \preceq x \;\wedge\; w \preceq y \;\wedge\; \forall u \; [(u \preceq x \;\wedge\; u \preceq y) \longrightarrow u \preceq w]]$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), dass

$$\Gamma \vdash \forall x \; \forall y \; \forall z \; \exists w$$
$$[w \preceq x \;\wedge\; w \preceq y \;\wedge\; w \preceq z \;\wedge \forall u \; [(u \preceq x \;\wedge\; u \preceq y \;\wedge\; u \preceq z) \longrightarrow u \preceq w]] \, .$$

gilt.

Aufgabe 12 (6 Punkte)**.** Es sei S eine Sprache und Φ eine konsistente Menge von S-Sätzen.

(1) Es bezeichne $\mathcal{F}_+$ die kleinste Klasse von S-Formeln, die alle atomaren Formeln enthält und unter Konjunktionen und $\forall$-Quantifikation abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass
$$\Phi \vdash \varphi \iff \mathfrak{T}^{\Phi} \models \varphi$$
für jede Formel φ in $\mathcal{F}_+$ gilt.

Es sei $S_G = \{\circ, {}^{-1}, e\}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie und $\Phi_G \subseteq L^{S_G}$ die Menge der Axiome der Gruppentheorie.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_G}$ eine Gruppe ist.

(3) Beweisen Sie, dass für jede abzählbare Gruppe $\mathfrak{G}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $s : \mathfrak{T}^{\Phi_G} \to \mathfrak{G}$ existiert.

Es bezeichne nun $S_R = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ die erweiterte Sprache der Ringtheorie und $\Phi_K \subseteq L^{S_R}$ die Axiome der Körpertheorie.

(4) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ ein Ring ist.

(5) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ kein Körper ist.

(6) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 13. Für eine Sprache L und ein L-Modell $\mathfrak{M}$ definieren wir $\Phi_{\mathfrak{M}}$ als die Menge der Formeln φ mit $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Wir betrachten das Modell $\mathfrak{N}$, das aus der Struktur
$$(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$$
und der Belegung $\mathfrak{N}(v_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht.

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mathfrak{N}}$ eine Henkin-Theorie ist.

(2) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Modelle $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}^{\Phi_{\mathfrak{N}}}$ isomorph sind.

Zuletzt betrachten wir das Modell $\mathfrak{R}$, das aus der Struktur

$$(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, {}^{-1})$$

und der Belegung $\mathfrak{R}(v_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht.

(3) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mathfrak{R}}$ keine Henkin-Theorie ist.

Abgabe: Mittwoch, 09. Mai 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.