Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 2	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 5. Gegeben sei eine Sprache S. Für eine Menge Φ von S-Sätzen besteht die zugehörige *Modellklasse* $\mathrm{Mod}^S(\Phi)$ aus allen S-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$. Eine Klasse K von S-Strukturen heißt *axiomatisierbar*, falls eine Menge Φ von S-Sätzen mit $K = \mathrm{Mod}^S(\Phi)$ existiert.

(1) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass die Klasse aller S-Strukturen $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass die Menge $\mathcal{A}(\forall)$ genau n Elemente besitzt, für jede natürliche Zahl $n > 0$ nicht leer und axiomatisierbar ist.

(2) (1 Punkt) Gegeben sei eine axiomatisierbare Klasse K von S-Strukturen. Zeigen Sie, dass die Klasse aller $\mathcal{A} \in K$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{A}(\forall)$ eine unendliche Menge ist, axiomatisierbar ist.

(3) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}^S(\Phi \cup \Psi) = \mathrm{Mod}^S(\Phi) \cap \mathrm{Mod}^S(\Psi)$ für alle Mengen Φ und Ψ von S-Sätzen gilt.

(4) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}^S(\Phi \cap \Psi) \supseteq \mathrm{Mod}^S(\Phi) \cup \mathrm{Mod}^S(\Psi)$ für alle Mengen Φ und Ψ von S-Sätzen gilt, und konstruieren Sie Mengen Φ und Ψ von S-Sätzen mit $\mathrm{Mod}^S(\Phi \cap \Psi) \nsubseteq \mathrm{Mod}^S(\Phi) \cup \mathrm{Mod}^S(\Psi)$.

Aufgabe 6. (1) (4 Punkte) Gegeben sei eine Sprache S , $\Phi \subseteq L^S$ und ein S-Modell $\mathfrak{M}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle S-Formeln φ und ψ.

(a) Falls $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$, so gilt $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$.

(b) Falls $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$, so gilt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$.

(c) Falls $\Phi \models \varphi$, so gilt $\Phi \models \varphi \vee \psi$ und $\Phi \models \psi \vee \varphi$.

(d) Falls $\Phi \models \varphi \vee \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$, so gilt $\Phi \models \varphi$.

(2) (2 Punkte) Definieren Sie eine Sprache S, $\Phi \subseteq L^S$ und S-Formeln φ und ψ, so dass $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$, $\Phi \not\models \varphi$ und $\Phi \not\models \psi$ gilt.

Aufgabe 7 (Mehrsortige Sprachen)**.** Gegeben sei eine Menge $\Sigma \neq \emptyset$. Die Basissymbole für eine Σ-*sortierte erststufige Sprache* sind:

- $\equiv$, $\neg$, $\rightarrow$, $\perp$, $\forall$, (und).
- Variablen v_n^σ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \Sigma$.

Zusätzlich enthält eine Σ-*sortierte erststufige Sprache* die folgenden Symbole:

- Eine Klasse von *Relationssymbolen* R mit einer Stelligkeit $\#R \in \mathbb{N}$ und einer Sorte $\mathrm{sort}(R) \in \Sigma^{\#R}$, die für jedes $\sigma \in \Sigma$ ein Relationssymbol R_σ mit $\#R_\sigma = 1$ und $\mathrm{sort}(R_\sigma) = \sigma$ enthält.
- Eine Klasse von *Funktionssymbolen* f mit einer Stelligkeit $\#f \in \mathbb{N}$ und einer Sorte $\mathrm{sort}(f) \in \Sigma^{\#R+1}$.

Die Klasse T^S_σ aller Terme der Sorte $\sigma \in \Sigma$ einer Σ-sortierten erststufigen Sprache S ist induktiv durch die folgenden Regeln definiert:

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist v^σ_n ein Element von T^S_σ.
- Ist f Funktionssymbol in S mit $\#f = n$ und $\mathrm{sort}(f) = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma)$, so gilt $ft_0 \ldots t_{n-1} \in T^S_\sigma$ für alle $(t_0, \ldots, t_{n-1}) \in T^S_{\sigma_0} \times \ldots \times T^S_{\sigma_{n-1}}$.

(1) (2 Punkte) Formulieren Sie eine entsprechende Definition der Klasse aller Formeln einer Σ-sortierten erststufigen Sprache.

(2) (2 Punkte) Formulieren Sie eine entsprechende Definition für Modelle einer Σ-sortierten erststufigen Sprache.

(3) (2 Punkte) Formulieren Sie eine entsprechende Definition für die Erfüllbarkeitsrelation für Modelle einer Σ-sortierten erststufigen Sprache.

(4) (2 Punkte) Axiomatisieren Sie die Klasse aller Vektorräume durch eine geeignete mehrsortige Sprache.

Abgabe: Mittwoch, 25. April 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.