Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2018

Übungsaufgaben — Prof. Dr. Peter Koepke

Serie 1 — Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 1. Es sei $S_{Arith} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik mit Konstantensymbolen 0 und 1 sowie zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$.

(1) (3 Punkte) Formulieren Sie die folgenden Axiome der Körpertheorie als S_{Arith}-Formeln zuerst in der durch $\vee$, $\wedge$ und $\exists$ erweiterten Sprache und anschließend in der nicht-erweiterten Sprache.
  (a) *Existenz von Inversen bezüglich der Multiplikation.*
  (b) *Kommutativität der Addition.*
  (c) *Distributivität.*

(2) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass jeder S_{Arith}-Term aus einer ungeraden Anzahl von Symbolen besteht.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine Sprache S. Beweisen Sie ausführlich, dass die Konkatenationsoperation auf der Klasse aller Wörter über S assoziativ ist.

Aufgabe 3 (Eindeutige Lesbarkeit von Termen und Formeln)**.** Gegeben sei eine Sprache S.

(1) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für jeden Term $t \in T^S$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:
  (a) t ist eine Variable.
  (b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Sequenz $t_0, \ldots, t_{n-1} \in T^S$ und ein eindeutig bestimmtes n-stelliges Funktionssymbol $f \in S$ mit $t = ft_0 \ldots t_{n-1}$.

(2) (3 Punkte) Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für Formeln in L^S.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Es sei $\mathbb{B}$ die boolesche Algebra der Wahrheitswerte. Zeigen Sie, dass jede Funktion $F : |\mathbb{B}|^n \longrightarrow |\mathbb{B}|$ durch Komposition der Funktionen $\mathbb{B}(\wedge)$ und $\mathbb{B}(-)$ dargestellt werden kann.

Abgabe: Mittwoch, 18. April 2018, bis 13:00 Uhr in den Briefkästen.